YU ISSN 0522—8441

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PUBLIKACIJE

ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA

SERIJA:

MATEMATIKA I FIZIKA

№ 543 (1976)

BEOGRAD

UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 543 (1976), 1–47.

543. PRILOZI TEORIJI ANALITIČKIH NEJEDNAKOSTI

Ljubomir R. Stanković

1. UVOD

Ovaj rad predstavlja skraćenu verziju doktorske disertacije odbranjene na Elektronskom fakultetu u Nišu. Iz rukopisa koji je prihvaćen i odbranjen kao doktorska teza, izostavljena su dva poglavlja za koje smo smatrali da su od manjeg značaja. Takođe su izvršena izvesna skraćivanja i u ostalim poglavljima.

Definicije i oznake koje nisu eksplicitno navedene u radu, mogu se naći u monografiji D. S. MITRINOVIĆ (In cooperation with P. M. VASIĆ): *Analytic inequalities*. Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

*

*   *

I ovom prilikom želim da se zahvalim profesorima dr D. S. MITRINOVIĆu i dr P. M. VASIĆu koji su me podstakli da počnem da se bavim naučnim radom u matematici a posebno u teoriji nejednakosti i koji su mi, u toku izrade teze, pružali dragocenu pomoć kako diskusijom o pojedinim problemima tako i omogućavanjem korišćenja dokumentacije pripremljene za monografiju Analitičke nejednakosti.

Isto tako zahvaljujem se profesorima dr R. Ž. ĐORĐEVIĆu i dr R. R. JANIĆu koji su me podržavali u izradi ove teze i starali se da mi stvore što bolje uslove za rad.

Pored toga zahvalan sam Elektronskom fakultetu u Nišu što mi je omogućio da provedem jednu godinu na Katedri za matematiku Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, za koje vreme sam i dobio rezultate koji su poslužili kao osnov ove teze.

2. PROBLEM OPPENHEIMA

A. OPPENHEIM je dokazao sledeća dva rezultata [1], [2] (videti takođe D. S. MITRINOVIĆ [1] str. 339):

Teorema I. *Ako su* a_i *i* c_i $(i=1, 2, 3)$ *pozitivni brojevi koji zadovoljavaju uslove*

$$\min(a_1, a_2, a_3) \leqq c_j \leqq \max(a_1, a_2, a_3) \qquad (j=1, 2, 3),$$

$$c_1 + c_2 + c_3 \geqq a_1 + a_2 + a_3$$

tada važi nejednakost

$$c_1 c_2 c_3 \geqq a_1 a_2 a_3$$

sa jednakošću ako i samo ako su a_i *i* c_i *u nekom uređenju jednaki.*

Teorema II. *Ako su* a_i *i* c_i $(i=1, 2, 3)$ *pozitivni brojevi koji zadovoljavaju uslove*

$$\min(a_1, a_2, a_3) \leqq c_j \leqq \max(a_1, a_2, a_3) \qquad (j=1, 2, 3),$$

$$c_1 c_2 c_3 \leqq a_1 a_2 a_3$$

tada važi nejednakost

$$c_1 + c_2 + c_3 \leqq a_1 + a_2 + a_3$$

sa jednakošću ako i samo ako su a_i *i* c_i *u nekom uređenju jednaki.*

Ove teoreme, u stvari, su odgovor za $n=3$ na sledeći problem. Neka su data dva skupa pozitivnih brojeva $a_1, \ldots, a_n$ i $c_1, \ldots, c_n$. Ako je aritmetička sredina brojeva $c_1, \ldots, c_n$ manja ili jednaka aritmetičkoj sredini brojeva $a_1, \ldots, a_n$, kakav je odnos među geometrijskim sredinama?

U članku u kome posmatra gornji problem, A. OPPENHEIM kaže: „Bilo bi interesantno da se prošire ovi rezultati na skupove pozitivnih brojeva za $n>3$. No, očigledno je da direktno proširenje nije moguće". Jedno proširenje za bilo koje n dali su kasnije E. K. GODUNOVA i V. I. LEVIN [1] (videti Teoremu 1 i 2). Drugo proširenje za proizvoljno n dao je P. M. VASIĆ [1]. Naime, on je dokazao sledeće teoreme:

Teorema III. *Ako brojevi* a_i *i* c_i $(i=1, \ldots, n)$ *zadovoljavaju uslove*

$$0<a_1 \leqq \cdots \leqq a_n, \quad 0<c_1 \leqq \cdots \leqq c_n, \quad \sum_{i=1}^{k} a_i \leqq \sum_{i=1}^{k} c_i \qquad (k=1, \ldots, n)$$

tada je

$$c_1 \cdots c_n \geqq a_1 \cdots a_n,$$

odnosno, važi

$$\prod_{i=1}^{k} a_i \leqq \prod_{i=1}^{k} c_i \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Teorema IV. *Ako brojevi* a_i *i* c_i $(i=1, \ldots, n)$ *zadovoljavaju uslove*

$$0<a_n \leqq \cdots \leqq a_1 \quad 0<c_n \leqq \cdots \leqq c_1, \quad \prod_{i=1}^{k} a_i \geqq \prod_{i=1}^{k} c_i \qquad (k=1, \ldots, n),$$

tada je

$$c_1+\cdots+c_n \leqq a_1+\cdots+a_n,$$

odnosno, važi

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \leqq \sum_{i=1}^{k} a_i \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Glavni rezultat OPPENHEIMA je:

Teorema 1. *Neka su* (a), (b) *dva niza pozitivnih brojeva koji zadovoljavaju uslov:*
(h) *Elementi niza* (b) *leže između najvećeg i najmanjeg elementa niza* (a).

Ako je $0 \leqq \alpha \leqq \frac{2}{3}$ *i* $A_3(b) \geqq A_3(a)$, *tada je*

$$G_3(b) \geqq \left(\frac{A_3(b)}{A_3(a)}\right)^{\alpha} G_3(a). \tag{1}$$

Odavde sleduje

$$G_3(b) \geqq G_3(a). \tag{2}$$

Jednakost u (1) *ili* (2) *važi ako i samo ako je* (a) *neko preuređenje od* (b).

Dokaz nejednakosti (2) je dao OPPENHEIM u **[1]**, a (1) je jedan od glavnih rezultata u **[2]**. Jasno, da nejednakost (1) za neko dato α $\left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{2}{3}\right)$ povlači, po pretpostavci, istu nejednakost za manje α. Ustvari, za $\alpha=\frac{2}{3}$ dobija se najstrožija nejednakost; u **[2]** OPPENHEIM pokazuje da ako je $\alpha \geqq \frac{2}{3}$ nejednakost ne važi u opštem slučaju.

Otuda, u Teoremi 1, mi ćemo pretpostaviti da su (a) i (b) monotoni i rastući. Tada je pretpostavka (h) ekvivalentna sa $a_1 \leqq b_1$ i $b_3 \leqq a_3$.

Problem postavljen od OPPENHEIMA u **[1]** bio je da se nađe generalizacija za (h). To su dali E. K. GODUNOVA i V. I. LEVIN u **[1]**. GODUNOVA i LEVIN daju proširenje Teoreme 1.

Teorema 2. *Neka je* $n>2$ *i neka su* (a), (b) *dva niza pozitivnih brojeva koji zadovoljavaju*

$$0<a_1 \leqq \cdots \leqq a_n, \qquad 0<b_1 \leqq \cdots \leqq b_n$$

$$a_i \leqq b_i \qquad (1 \leqq i \leqq n-m, \ 1 \leqq m \leqq n), \tag{H}$$

$$a_i \geqq b_i \qquad (n-m+1 \leqq i \leqq n).$$

(Ako je $m=1$ poslednji uslov je nepotreban, ako je $m=n$ pretposlednji uslov je nepotreban).

Ako je (p) drugi niz pozitivnih brojeva, i ako je

$$0 \leqq \alpha \leqq 1 - \frac{P_{n-m}}{P_n} \quad i \quad A_n(b, p) \geqq A_n(a, p),$$

tada je

$$G_n(b, p) \geqq \left(\frac{A_n(b, p)}{A_n(a, p)}\right)^{\alpha} G_n(a, p). \tag{3}$$

Iz (3) neposredno sleduje

$$G_n(b, p) \geqq G_n(a, p).$$

Ako je $n=3$, $m=2$ pretpostavka (H) je ekvivalentna sa (h). Ako pretpostavimo da je $p_1=p_2=p_3$ Teorema 2 se svodi na Teoremu 1.

Prirodno proširenje problema OPPENHEIMa je zamena aritmetičke i geometrijske sredine sa opštim sredinama. OPPENHEIM ne daje odgovor na to pitanje mada neki od tih rezultata daju parcijalne odgovore za opštije probleme. Tačnije, postavićemo problem: ako je poznato da su s-te sredine od (a) i (b) u nekom uređenju kada ćemo zaključiti da isto uređenje važi za njihove t-te sredine (videti P. S. BULLEN, P. M. VASIĆ i Lj. R. STANKOVIĆ [1])? Teorema 2 daje odgovor za slučaj $s=1$, $t=0$; OPPENHEIM je u [1] i [2] dao rešenje za slučaj $s=0$, $t=1$.

Teorema 3. *Neka su (a) i (b) dve trojke pozitivnih brojeva koji zadovoljavaju* (h).

(i) *Ako je $r>0$ i $M_3^{[r]}(b) \geqq M_3^{[r]}(a)$, tada je*

$$G_3(b) \geqq G_3(a).$$

(ii) *Ako je $r \geqq 0$ i $G_3(a) \geqq G_3(b)$, tada je*

$$M_3^{[r]}(a) \geqq M_3^{[r]}(b).$$

(iii) *Ako je $A_3(b) \geqq A_3(a)$, tada je*

$$H_3(a) \geqq \left(\frac{G_3(a)}{G_3(b)}\right)^3 H_3(b).$$

(iv) *Ako je $H_3(b) \geqq \left(\frac{G_3(b)}{G_3(a)}\right)^3 H_3(a)$, tada je*

$$A_3(a) \leqq A_3(b).$$

Jednakost važi aka i samo ako je (a) neko preuređenje od (b).

Delovi (iii) i (iv) su oslabljeni odgovor na postavljeni problem.

Delovi (i) i (ii) su proširenje slučaja $r=1$.

Teorema 4. *Neka je $F: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ rastuća i konkavna funkcija i neka su (a) i (b) dva niza od n pozitivnih brojeva koji zadovoljavaju* (H). *Neka je (p) drugi niz od n pozitivnih brojeva. Ako je*

$$A_n(b, p) \geqq A_n(a, p) \tag{4}$$

tada je

(5) $$\sum_{i=1}^{n} F(b_i)\, p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} F(a_i)\, p_i;$$

ako je F strogo rastuća, imamo

(6) $$M_n^{[F]}(b, p) \geqq M_n^{[F]}(a, p).$$

Ako je F' pozitivna bar u jednoj tački tada jednakost u (5) *važi ako i samo ako je $a_i = b_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$.*

Dokaz. Neka je $c_i = \lambda b_i + (1-\lambda) a_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$; tada sa (c) možemo zameniti (a) ili (b) u (H); u stvari (c) je rastući niz. Kako je F konkavna F' egzistira sem na prebrojivom skupu i opadajuća je funkcija; pošto je F rastuća F' je nenegativna. Definišimo funkciju f pomoću

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i (c_i).$$

Tada je potrebno dokazati da je $f(1) \geqq f(0)$; kako F' egzistira sem na prebrojivom skupu dovoljno je pokazati da je $f'(\lambda) \geqq 0$, kad god postoji.

Ako je $1 \leqq i \leqq n-m$ tada je $b_i \geqq a_i$ pa je, na osnovu gornje primedbe, $F'(c_i) \geqq F'(c_{n-m+1})$, odavde dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n-m} p_i (b_i - a_i) F'(c_i) \geqq \sum_{i=1}^{n-m} p_i (b_i - a_i) F'(c_{n-m+1}).$$

Slično, ako je $n-m+1 \leqq i \leqq n$, $b_i \leqq a_i$, tada je

$$\sum_{i=n-m+1}^{n} p_i (b_i - a_i) F'(c_i) \geqq \sum_{i=n-m+1}^{n} p_i (b_i - a_i) F'(c_{n-m+1}).$$

Iz ovoga se sledeće nejednakosti lako proveravaju

$$F'(\lambda) = \sum_{i=i}^{n} p_i (b_i - a_i) F'(c_i) \geqq \sum_{i=i}^{n} p_i (b_i - a_i) F'(c_{n-m+1}) \geqq 0,$$

što kompletira dokaz nejednakosti (5).

Nejednakost (6) i slučaj kada nastupa jednakost su očigledni. Koristeći gornji dokaz možemo dobiti slične rezultate uzimajući različite pretpostavke za F; ukratko to su sledeći rezultati:

(A) Ako je F konveksna i rastuća i nejednakost (4) je obrnuta tada nejednakosti (5) i (6) su obrnute.

(B) Ako je F konveksna i opadajuća nejednakost (5) je obrnuta ali (6) važi.

Posmatrajmo slučaj $F(x) = x^r$:

(i) ako je $0 < r \leqq 1$ tvrđenja teoreme 4 važe;

(ii) ako je $r \geqq 1$ tvrđenja iz (A) važe;

(iii) ako je $r<0$ tvrđenja iz (B) važe.

Ako je $F(x)=\log x$, tada pretpostavka teoreme 4 važi.

Ako je $F(x)=e^{\lambda x}$, tada pretpostavka iz (A) važi ako je $\lambda>0$, ali ako je $\lambda<0$ tada (B) važi.

To je dovoljno da kompletno rešimo problem postavljen na početku.

Posledica 5. *Neka* (a), (b) *budu dva niza od* n *pozitivnih brojeva koji zadovoljavaju* (H) *i* (p) *drugi takav niz.*

Ako je $-\infty<s<+\infty$, *tada:*

(i) *ako je* $M_n^{[s]}(b,p)\geqq M_n^{[s]}(a,p)$ *i ako je* $t<s$, *tada je*

$$M_n^{[t]}(b,p)\geqq M_n^{[t]}(a,p); \tag{7}$$

(ii) *ako je* $M_n^{[s]}(a,p)\geqq M_n^{[s]}(b,p)$ *i ako je* $t>s$, *tada je*

$$M_n^{[t]}(a,p)\geqq M_n^{[t]}(b,p). \tag{8}$$

Jednakost u (7) *ili* (8) *važi ako i samo ako je* $a_i=b_i\,(1\leqq i\leqq n)$.

Posledica 5 ima vrlo interesantnu implikaciju.

Posledica 6. *Pretpostavimo da su* (a), (b) *dva niza pozitivnih brojeva, od kojih nijedan nije preuređenje drugog; pretpostavimo, zatim, da je* (p) *drugi takav niz brojeva.*

Ako je

$$M_n^{[-\infty]}(a,p)<M_n^{[-\infty]}(b,p), \quad M_n^{[+\infty]}(a,p)>M_n^{[+\infty]}(b,p) \tag{9}$$

tada ako (a), (b) *zadovoljavaju* (h) *postoji jedno* $s\,(-\infty<s<+\infty)$ *takvo da je:*

(i) *ako je* $t<s$ *tada je* $M_n^{[t]}(a,p)<M_n^{[t]}(b,p)$,

(ii) *ako je* $t>s$ *tada je* $M_n^{[t]}(a,p)>M_n^{[t]}(b,p)$,

(iii) *ako je* $t=1$ *tada je* $M_n^{[1]}(a,p)=M_n^{[1]}(b,p)$.

Dokaz je očigledan.

Postavimo sledeće interesantno pitanje: pretpostavimo da u (9) uzmemo $u,v\,(-\infty\leqq u<v\leqq+\infty)$, i da je

$$M_n^{[u]}(a,p)<M_n^{[u]}(b,p) \text{ i } M_n^{[v]}(a,p)>M_n^{[v]}(b,p),$$

da li postoji jedno $s\,(u<s<v)$ sa sličnim osobinama kao u posledici 6?

Deo posledice 5 (i) sledi iz rezultata Godunove i Levina **[1]**, mada oni ne daju to eksplicitno. U stvari, važi stroži rezultat — jedna analogija od (3); kao što smo napomenuli Oppenheim **[2]** je dokazao da takva analogija ne važi u opštem slučaju. Osnovna teorema Godunove i Levina u **[1]** je:

Teorema 7. *Pretpostavimo da su* (a), (b), (p) *tri niza pozitivnih brojeva, gde* (a) *i* (b) *zadovoljavaju* (H). *Neka funkcija* $F: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ *ispunjava sledeće uslove:*

(i) F *je konkavna,*

(ii) F *je rastuća,*

(iii) $xF'(x)$ *je rastuća.*

Ako je

$$A_n(b,p) \geqq A_n(a,p) \tag{10}$$

tada za $0 \leqq \alpha \leqq 1 - \frac{P_{n-m}}{P_n}$ *važi*

$$A_n(F(a),p) - \alpha F(A_n(a,p)) \leqq A_n(F(b),p) - \alpha F(A_n(b,p)) \tag{11}$$

$\big(F(a)$ *označava n-torku* $(F(a_1), \ldots, F(a_n))\big)$.

Koristeći dokaz dat u **[1]** dobijamo sledeće rezultate:

(A') Ako je F konveksna i $xF'(x)$ rastuća i ako je nejednakost (10) obrnuta tada je i nejednakost (11) obrnuta.

(B') Ako je F konveksna i opadajuća i ako je $xF'(x)$ opadajuća tada je nejednakost (11) obrnuta.

Posledica 8. *Neka su* (a), (b) *dva niza od* n *pozitivnih brojeva koji zadovoljavaju* (H) *i neka je* (p) *drugi takav niz brojeva.*

Ako je $-\infty < s < +\infty$ *i* $0 \leqq \alpha \leqq 1 - \frac{P_{n-m}}{P_n}$ *tada:*

(i) *ako je*

$$M_n^{[s]}(b,\,p) \geqq M_n^{[s]}(a,\,p) \tag{12}$$

i ako je $t < s$, *važi*

$$\big((M_n^{[t]}(b,\,p))^t - \alpha\big(M_n^{[s]}(b,\,p)\big)^t\big)^{1/t} \geqq \big((M_n^{[s]}(a,\,p))^t - \alpha\big(M_n^{[s]}(a,\,p)\big)^t\big)^{1/t} \; (t \neq 0), \tag{13}$$

$$G_n(b,\,p) \geqq \left(\frac{M_n^{[s]}(b,\,p)}{M_n^{[s]}(a,\,p)}\right)^{\alpha} G_n(a,\,b) \;\; (t=0), \tag{14}$$

(ii) *ako pretpostavimo da u* (12) *važi obrnuta nejednakost i ako je* $t > s$ *tada u* (13) *ili* (14) *imamo obrnute nejednakosti. Jednakost u* (13) *ili* (14) *važi ako i samo ako je* $a_i = b_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$.

Dokaz. Ako u Teoremi 7 uzmemo za $F(x)$ redom x^r, $\log x$ ili e^x tvrđenje neposredno sledi.

OPPENHEIM **[2]** je pokazao da ako u (ii) stavimo $s=0$, $t=1$ analogna nejednakost od (14) ne važi u opštem slučaju (tj. G_n zamenjujući sa A_n i $M_n^{[s]}$ sa G_n); tačnije, u tom slučaju nejednakost će biti obrnuta od (13).

Teorema 4 biće generalisana zamenjujući uslove (H) sa uslovima (F):

Teorema 9. *Neka su* (a), (b), (p) *nizovi od* n *pozitivnih brojeva za koje važi*

$$a_1 \leqq \cdots \leqq a_n, \quad b_1 \leqq \cdots \leqq b_n,$$

$$\text{(F)} \qquad \sum_{i=1}^{k} a_i p_i \leqq \sum_{i=1}^{k} b_i p_i \quad (1 \leqq k \leqq n-m,\ 1 \leqq m \leqq n),$$

$$\sum_{i=k}^{n} a_i p_i \geqq \sum_{i=k}^{n} b_i p_i \quad (n-m+1 \leqq k \leqq n).$$

(Ako je $m=1$ *drugi uslov je nepotreban; ako je* $m=n$ *prvi uslov je nepotreban).*

(i) *Ako je funkcija* $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *konkavna i ako je*

$$\text{(15)} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i p_i = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i$$

tada (5) *važi.*

(ii) *Ako je funkcija* $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *konkavna i rastuća i* (4) *važi, tj.*

$$\sum_{i=1}^{n} b_i p_i \geqq \sum_{i=1}^{n} a_i p_i$$

tada (5) *važi; jednakost važi pod istim uslovima kao u Teoremi* 4.

Dokaz. Definišimo (c) i f kao u Teoremi 4. Tada, koristeći istu primedbu kao u tom dokazu, dovoljno je pokazati da je $f' \geqq 0$. Uvedimo sledeće oznake:

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i p_i, \quad A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i p_i \quad (1 \leqq k \leqq n),$$

$$B_k' = B_n - B_k, \quad A_k' = A_n - A_k \quad (1 \leqq k \leqq n);$$

tada je

$$f'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} p_i (b_i - a_i) F'(c_i) = \sum_{i=1}^{n-m} (B_i - A_i)\big(F'(c_i) - F'(c_{i+1})\big)$$

$$+ \sum_{i=n-m+1}^{n-1} (A_i' - B_i')\big(F'(c_i) - F'(c_{i+1})\big) + (B_n - A_n) F'(c_{n-m+1}).$$

Sa pretpostavkama (F) i pretpostavkama za F dobijamo nejednakost $f'(\lambda) \geqq 0$. Slučaj jednakosti je očigledan.

PRIMEDBA. Ako su težine (p) nenegativne tada (H) povlači (F). Šta više tačno je: (H) i (4) povlače (F). Očigledno $a_i \leqq b_i (1 \leqq i \leqq n-m)$ povlači $A_k \leqq B_k (i \leqq k \leqq n-m)$, ako je $k > n-m$ tada je $A_k = A_n - A_k' \leqq B_n - B_n' = B_k$, iz (H) i (4). Obrnuto je netačno kao što se vidi na primeru $n=3$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 5$, $b_1 = b_2 = 3$, $b_3 = 6$.

U Teoremi 9 (ii) ako je F strogo rastuća (6) važi. Kada sa Teoremom 4 koristimo gornji dokaz možemo dokazati slične rezultate dobijene sa različitim pretpostavkama. Neki od tih su sledeći:

(α) Ako su (a) i (b) opadajući; (F) je isto; F konveksna; (15) važi, tada i (5) važi.

(β) Ako su (a) i (b) opadajući; (F) isto; F je konveksna i rastuća i (4) važi; tada je isti zaključak kao u (α).

(γ) Ako su (a) i (b) rastući, (F) je obrnuto, (4) je obrnuto, F je konvekcna i opadajuća, tada (5) važi.

(δ) Ako su (a) i (b) rastući; (F) je obrnuto; (4) je obrnuto; F konkavna i opadajuća, tada nejednakost (5) je obrnuta.

Teorema 9(α) je malo proširenje rezultata L. FUCHS [1]; FUCHSov rezultat je za slučaj $m=1$. Mogućnost zamene pretpostavke (H) sa (F) u posledici 5, i odatle u posledici 6, nije jednostavna. Posledica 5 je dokazana uzimajući pogodan specijalan slučaj u Teoremi 4 za nizove (a^s) i (b^s); to je moguće samo ako (a) i (b) zadovoljavaju (H); za slučaj $s<0$ potrebna je neznatna specijalna modifikacija. Slučaj sa pretpostavkama (F) je predmet sledeće posledice.

Posledica 10. (i) *Ako pretpostavka* (F), *za* $m=1$, *važi za* (a) *i* (b) *i ako je* F *konkavna rastuća, tada važi i za* $(F(a))$ *i* $(F(b))$.

(ii) *Ako pretpostavka* (F), *za* $m=n$, *važi za* (a) *i* (b) *i ako je* F *konveksna rastuća, tada važi i za* $(F(a))$ *i* $(F(b))$.

(iii) *Ako pretpostavka* (F), *za* $1<m<n$, *važi za* (a) *i* (b) *i ako je* F *linearna rastuća funkcija, tada važi i za* $(F(a))$ *i* $(F(b))$.

Dokaz. Dokazaćemo (iii). Kako je F rastuća funkcija imamo

$$F(a_1)\leqq\cdots\leqq F(a_n),\quad F(b_1)\leqq\cdots\leqq F(b_n).$$

Sada koristeći Teoremu 9(ii) za $(a_1,\ldots,a_k)$ i $(b_1,\ldots,b_k)$ $(1\leqq k\leqq n-m)$ dobijamo

$$\sum_{i=1}^{k}F(a_i)p_i\leqq\sum_{i=1}^{k}F(b_i)p_i\quad(1\leqq k\leqq n-m).$$

Na kraju uzimajući Teoremu 9(β) za $(b_n, b_{n-1},\ldots,b_k)$ i $(a_n, a_{n-1},\ldots,a_k)$ $(n-m+1\leqq k\leqq n)$ imamo

$$\sum_{i=k}^{n}F(a_i)p_i\geqq\sum_{i=k}^{n}F(b_i)p_i\quad(n-m+1\leqq k\leqq n).$$

PRIMEDBA. (i) Iz toga sledi da u opštem slučaju Posledica 5 može biti delimično proširena zavisno od toga kako su pretpostavke (F) izabrane.

Ako su (a), (b), (p) tri niza pozitivnih brojeva, gde su (a) i (b) opadajući, tj. $a_1\geqq\cdots\geqq a_n$, $b_1\geqq\cdots\geqq b_n$ i ako je F strogo monotona, tada (b) F-dominira (a) sa težinama (p) ako je

$$M_k^{[F]}(b,p)\geqq M_k^{[F]}(a,p)\quad(1\leqq k\leqq n);$$

rećićemo da (b) s-dominira (a) sa težinama (p) ako je $F(x)=x^s(s\neq0)$, $F(x)=\log x\,(s=0)$; na kraju ako je $s=1$ reći ćemo da (b) dominira (a) sa težinama (p).

PRIMEDBA. (i) Za svako F i (p) definisana je uređajna relacija na skupu opadajućih n-torki.

(ii) Ako je $s=1$, $p_1=\cdots=p_n$ tada se to uređenje svodi na uređenje koje su dali HARDY, LITTLEWOOD i PÓLYA [2].

(iii) Teorema 9(β) pokazuje da ako (b) dominira (a) sa težinama (p) tada (b) F-dominira (a) sa težinama (p) za svaku konveksnu strogo rastuću funkciju F.

Posledica 11. *Ako (b) s-dominira (a) sa težinama (p) $(-\infty \leqq s \leqq +\infty)$ tada (b) t-dominira (a) sa težinama (p) za svako $t>s$.*

Dokaz. (i) Pretpostavimo da je $s>0$; tada možemo reći da (b^s) dominira (a^s) i tako rezultat sledi iz prethodne primedbe (iii) za $F(x)=x^r\left(r=\frac{t}{s},\ t>s\right)$.

(ii) Pretpostavimo da je $s<0$; tada su nizovi (a^s) i (b^s) rastući, koji zadovoljavaju obrnutu drugu nejednakost iz (F), $m=1$, i obrnutu od (4). Tada ako je $t>0$ i $F(x)=x^r\left(r=\frac{t}{s}\right)$ rezultat sledi iz Teoreme 9(γ); ako je $t\leqq 0$, $F(x)=x^r$ $\left(r=\frac{t}{s},\ t\neq 0\right)$, $F(x)=\log x$, $t=0$, rezultat sledi iz Teoreme 9(δ).

(iii) Na sličan način se dobija i slučaj $s=0$ uzimajući da je $F(x)=e^{tx}(t>0)$.

Interesantno bi bilo ispitati da li slični rezultati važe za simetrične i kontra-harmonične sredine (videti D. S. MITRINOVIĆ i P. M. VASIĆ [1]).

3. POBOLJŠANJE I PROŠIRENJE REZULTATA J. C. BURKILLA

Sledeću teoremu je dokazao J. C. BURKILL u [**1**]:

Teorema A. *Ako je f dva puta diferencijabilna konveksna funkcija, tada za p, q, $r \geqq 0$ važi*

$$(1)\qquad (p+q+r)f\left(\frac{px+qy+rz}{p+q+r}\right)-(p+q)f\left(\frac{px+qy}{p+q}\right)-(q+r)f\left(\frac{qy+rz}{q+r}\right)$$

$$-(r+p)f\left(\frac{rz+px}{r+p}\right)+pf(x)+qf(y)+rf(z)\geqq 0.$$

Pored ove teoreme (Teorema 2 gore pomenutog članka), J. C. BURKILL je dokazao još sedam teorema. Za neke od njih (na primer, Teorema 3 i 4), on je sam pokazao da su posledice nekih drugih teorema iz pomenutog članka. Nije teško videti da se sledeća nejednakost (Teorema 1 u [**1**])

$$(2)\qquad x^a y^b z^c-(b+c)\,y^{b/(b+c)}z^{c/(b+c)}-(c+a)\,z^{c/(c+a)}x^{a/(c+a)}$$

$$-(a+b)\,x^{a/(a+b)}y^{b/(a+b)}+ax+by+cz\geqq 0\quad (a+b+c=1)$$

može dobiti iz (1).

Naime, ako stavimo $f(x)=e^x$, $p=a$, $q=b$, $r=c$ $(a+b+c=1)$ i uvedemo nove promenljive $\log x$, $\log y$, $\log z$ umesto x, y, z iz (1) dobijamo (2).

Teorema 6 dobija se iz Teoreme A (videti J. D. KEČKIĆ i I. B. LACKOVIĆ [**1**]). J. C. BURKILL je pokazao da se Teorema 7 dobija kao posledica Teoreme 6. Iz svega ovoga se vidi da je Teorema A glavni rezultat J. C. BURKILLA u [**1**].

Sada ćemo dati neke nove rezultate vezane za Teoremu A (videti P. M. VASIĆ i LJ. R. STANKOVIĆ [**2**]).

Teorema 1. *Ako je f konveksna funkcija tada za p, q, $r\geqq 0$ nejednakost* (1) *važi.*

Dokaz. Bez smanjenja opštosti, pretpostavićemo da je $x\leqq y\leqq z$. Tada je, na osnovu osobine sredina,

$$x\leqq\frac{px+qy}{p+q}\leqq y\leqq\frac{qy+rz}{q+r}\leqq z.$$

Broj $\dfrac{px+rz}{p+r}$ nalaziće se u jednom od sledećih segmenata:

$$1^\circ\ \left[x,\ \frac{px+qy}{p+q}\right],\quad 2^\circ\ \left[\frac{px+qy}{p+q},\ y\right],\quad 3^\circ\ \left[y,\ \frac{qy+rz}{q+r}\right],\quad 4^\circ\ \left[\frac{qy+rz}{q+r},\ z\right].$$

Slučaj 1°. Ako je $x \leqq \frac{px+rz}{p+r} \leqq \frac{px+qy}{p+q}$, tada je

$$\frac{px+rz}{p+r} \leqq \frac{px+qy+rz}{p+q+r} \leqq y, \qquad \frac{px+qy}{p+q} \leqq \frac{px+qy+rz}{p+q+r} \leqq z,$$

tj.

$$\frac{px+qy}{p+q} \leqq \frac{px+qy+rz}{p+q+r} \leqq y.$$

Ako stavimo

$$x_1 = x_2 = \frac{qy+rz}{q+r}, \quad x_3 = x_4 = \frac{px+qy}{p+q}, \quad x_5 = x_6 = \frac{qy+rz}{q+r};$$

(3)
$$y_1 = z, \quad y_2 = y, \quad y_3 = y_4 = y_5 = \frac{px+qy+rz}{p+q+r}, \quad y_6 = x,$$

$$p_1 = r, \ p_2 = q, \ p_3 = p, \ p_4 = q, \ p_5 = r, \ p_6 = p,$$

vidimo da su uslovi sledeće teoreme zadovoljeni (L. Fuchs [**1**], videti takođe D. S. Mitrinović [**1**] str. 165).

Teorema B. *Nejednakost*

(4)
$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i f(y_i)$$

važi za svaku konveksnu funkciju f *i za proizvoljne realne brojeve* $p_1, \ldots, p_n$ *ako i samo ako je*

$$x_1 \geqq \cdots \geqq x_n, \qquad y_1 \geqq \cdots \geqq y_n,$$

$$\sum_{i=1}^{r} p_i x_i \leqq \sum_{i=1}^{r} p_i y_i \qquad (r = 1, \ldots, n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i.$$

Na osnovu ovoga, ako su p_i, q_i, y_i definisani sa (3), iz (4) za $n=6$, dobijamo Teoremu 1.

Slučaj 2°. Na sličan način iz Teoreme B za

$$x_1 = x_2 = \frac{qy+rz}{q+r}, \quad x_2 = x_4 = \frac{px+rz}{p+r}, \quad x_5 = x_6 = \frac{px+qy}{p+q};$$

$$y_1 = z, \ y_2 = y, \ y_3 = y_4 = y_5 = \frac{px+qy+rz}{p+q+r}, \ y_6 = x;$$

$$p_1 = r, \ p_2 = q, \ p_3 = p, \ p_4 = r, \ p_5 = q, \ p_5 = p$$

dobija se Teorema 1.

Slučaj 3°. Teorema B, za

$$x_1 = x_2 = \frac{qy+rz}{q+r}, \quad x_3 = x_4 = \frac{px+rz}{p+r} \quad x_5 = x_6 = \frac{px+qy}{p+q};$$

$$y_1=z,\ y_2=y_3=y_4=\frac{px+qy+rz}{p+q+r},\ y_5=y,\ y_6=x;$$

$$p_1=r,\ p_2=q,\ p_3=p,\ p_4=r,\ p_5=q,\ p_6=p,$$

daje Teoremu 1.

Slučaj 4°. Teorema 1 se dobija iz Teoreme B ako stavimo:

$$x_1=x_2=\frac{px+rz}{p+r},\quad x_3=x_4=\frac{qy+rz}{q+r},\quad x_5=x_6=\frac{px+qy}{p+q};$$

$$y_1=z,\ y_2=y_3=y_4=\frac{px+qy+rz}{p+q+r},\ y_5=y,\ y_6=x;$$

$$p_1=r,\ p_2=p,\ p_3=q,\ p_4=r,\ p_5=q,\ p_6=p.$$

U sledećem tekstu za funkciju $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, uslov

$$\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq n}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_k})f\left(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_k}x_{i_k}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_k}}\right) \tag{5}$$

$$\leqq\binom{n-2}{k-2}\left(\frac{n-k}{k-1}\sum_{i=1}^{n}p_i f(x_i)+\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\right),$$

označićemo sa $(C_{n,k})$.

Tada, važi sledeća teorema:

Teorema 2. (a) *Za svaku funkciju* $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *važi implikacija*

$$(C_{3,2})\ \Rightarrow\ (C_{n,k})\qquad (2\leqq k\leqq n-1;\ n\geqq 3). \tag{6}$$

(b) *Ako je f neprekidna funkcija, tada važi implikacija*

$$\operatorname{non}(C_{n,k})\ \Rightarrow\ \operatorname{non}(C_{3,2}). \tag{7}$$

Dokaz. (a) Prvo ćemo dokazati implikaciju

$$(C_{3,2})\ \Rightarrow\ (C_{n,2})\qquad (n\geqq 3). \tag{8}$$

Dokaz izvodimo matematičkom indukcijom.

Za $n=3$, (8) se svodi na $(C_{3,2})\Rightarrow(C_{3,2})$, što je očigledno.

Pretpostavimo da je (8) tačno za neko $n\,(n\geqq 3)$, tj. neka je

$$\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(p_i+p_j)f\left(\frac{p_ix_i+p_jx_j}{p_i+p_j}\right)\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\right)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)+(n-2)\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i). \tag{9}$$

U nejednakosti (9) uzmimo elemente:

$$x_1,\ldots,x_{n-1},\ \frac{p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_n+p_{n+1}} \tag{10}$$

sa odgovarajućim težinama

$$p_1,\ldots,p_{n-1},\ p_n+p_{n+1}. \tag{11}$$

Tada dobijamo

$$(12)\quad \sum_{1\leq i<j\leq n-1}(p_i+p_j)f\left(\frac{p_ix_i+p_jx_j}{p_i+p_j}\right)+\sum_{i=1}^{n-1}(p_i+p_n+p_{n+1})f\left(\frac{p_ix_i+p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_i+p_n+p_{n+1}}\right)$$

$$\leq\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i\Big)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_{n+1}x_{n+1}}{p_1+\cdots+p_{n+1}}\right)+(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n-1}p_if(x_i)+(p_n+p_{n+1})f\left(\frac{p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_n+p_{n+1}}\right)\right).$$

Kako je $(C_{3,2})$ tačno, imamo

$$(13)\quad -(p_i+p_n+p_{n+1})f\left(\frac{p_ix_i+p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_i+p_n+p_{n+1}}\right)$$

$$\leq-(p_i+p_n)f\left(\frac{p_ix_i+p_nx_n}{p_i+p_n}\right)-(p_i+p_{n+1})f\left(\frac{p_ix_i+p_{n+1}x_{n+1}}{p_i+p_{n+1}}\right)$$

$$-(p_n+p_{n+1})f\left(\frac{p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_n+p_{n+1}}\right)+p_if(x_i)+p_nf(x_n)+p_{n+1}f(x_{n+1}).$$

Sabirajući nejednakosti (13) za $i=1, 2, \dots, n-1$ i sabirajući tako dobijenu nejednakost sa (12) dobijamo $(C_{n+1,2})$. Prema tome, implikaciju (8) smo dokazali matematičkom indukcijom.

Matematičkom indukcijom ćemo dokazati i implikaciju:

$$(14)\quad (C_{3,2})\Rightarrow(C_{n,n-1}).$$

Pretpostavimo da je $(C_{n,n-1})$ tačno, tj. da važi nejednakost

$$(15)\quad \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{n-1}\leq n}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_{n-1}})f\left(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_{n-1}}x_{i_{n-1}}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_{n-1}}}\right)$$

$$\leq(n-2)\Big(\sum_{i=1}^{n}p_i\Big)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)+\sum_{i=1}^{n}p_if(x_i).$$

Primenom $(C_{3,2})$ na elemente

$$(16)\quad x_n,\ x_{n+1},\ \frac{\sum_{i=1}^{n-1}p_ix_i}{\sum_{i=1}^{n-1}p_i}$$

sa težinama

$$(17)\quad p_n,\ p_{n+1},\ \sum_{i=1}^{n-1}p_i$$

dobijamo

$$(18)\quad \Big(\sum_{i=1}^{n}p_i\Big)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)+\Big(\sum_{i=1}^{n-1}p_i+p_n+p_{n+1}\Big)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_{n-1}x_{n-1}+p_{n+1}x_{n+1}}{p_1+\cdots+p_{n-1}+p_{n+1}}\right)$$

$$+(p_n+p_{n+1})f\left(\frac{p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_n+p_{n+1}}\right)$$

$$\leq\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i\Big)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_{n+1}x_{n+1}}{p_1+\cdots+p_{n+1}}\right)$$

$$+\Big(\sum_{i=1}^{n-1}p_i\Big)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_{n-1}x_{n-1}}{p_1+\cdots+p_{n-1}}\right)+p_nf(x_n)+p_{n+1}f(x_{n+1}).$$

S druge strane, koristeći nejednakost (12) za elemente (10) sa težinama (11) dobijamo:

$$(19)\quad \Big(\sum_{i=1}^{n-1} p_i\Big) f\Big(\frac{p_1 x_1+\cdots+p_{n-1}x_{n-1}}{p_1+\cdots+p_{n-1}}\Big)$$

$$+\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{n-2}\leq n-1}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_{n-2}}+p_n+p_{n+1})$$

$$\times f\Big(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_{n-2}}x_{i_{n-2}}+p_n x_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_{n-2}}+p_n+p_{n+1}}\Big)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} p_i f(x_i)+(p_n+p_{n+1}) f\Big(\frac{p_n x_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_n+p_{n+1}}\Big)+(n-2)\Big(\sum_{i=1}^{n+1} p_i\Big) f\Big(\frac{p_1 x_1+\cdots+p_{n+1}x_{n+1}}{p_1+\cdots+p_{n+1}}\Big).$$

Sabiranjem nejednakosti (18) i (19) dobijamo $(C_{n+1,n})$. Kako $(C_{3,2}) \Rightarrow$ $\Rightarrow (C_{3,2})$ implikacija (14) je dokazana matematičkom indukcijom.

Pretpostavimo da je $(C_{n,k})$ tačno i primenimo tu nejednakost na elemente (10) sa težinama (11). Tada, imamo:

$$(20)\quad \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n-1}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_k}) f\Big(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_k}x_{i_k}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_k}}\Big)$$

$$+\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}\leq n-1}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_{k-1}}+p_n+p_{n+1})$$

$$\times f\Big(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_{k-1}}x_{i_{k-1}}+p_n x_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_{k-1}}+p_n+p_{n+1}}\Big)$$

$$\leq \binom{n-2}{k-2}\frac{n-k}{k-1}\Big(\sum_{i=1}^{n-1} p_i f(x_i)+(p_n+p_{n+1}) f\Big(\frac{p_n x_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_n+p_{n+1}}\Big)\Big)$$

$$+\binom{n-2}{k-2}\Big(\sum_{i=1}^{n+1} p_i\Big) f\Big(\frac{p_1 x_1+\cdots+p_{n+1}x_{n+1}}{p_1+\cdots+p_{n+1}}\Big).$$

Primenom nejednakosti (15) na elemente $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_n, x_{n+1}$ sa težinama $p_{i_1}, \ldots, p_{i_{k-1}}, p_n, p_{n+1}$ i sabiranjem tako dobijenih nejednakosti, imamo

$$(21)\quad -(k-1)\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}\leq n}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_{k-1}}+p_n+p_{n+1})$$

$$\times f\Big(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_{k-1}}x_{i_{k-1}}+p_n x_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_{k-1}}+p_n+p_{n+1}}\Big)$$

$$\leq \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}\leq n-1}(p_{i_1} f(x_{i_1})+\cdots+p_{i_{k-1}} f(x_{i_{k-1}}))$$

$$+\binom{n-1}{k-1}(p_n f(x_n)+p_{n+1} f(x_{n+1})).$$

Ako nejednakost (20) pomnožimo sa $(k-1)$ i saberemo sa (21), dobijamo

$$(22)\qquad (k-1)\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n-1}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_k})f\left(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_k}x_{i_k}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_k}}\right)$$

$$+\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}\leq n-1}\ \sum_{\substack{j_1<\cdots<j_k\\ j_1,\ldots,j_k\in\{i_1,\ldots,i_{k-1}\,n,\,n+1\}}}(p_{j_1}+\cdots+p_{j_k})f\left(\frac{p_{j_1}x_{j_1}+\cdots+p_{j_k}x_{j_k}}{p_{j_1}+\cdots+p_{j_k}}\right)$$

$$\leq\binom{n-2}{k-2}(n-k)\sum_{i=1}^{n-1}p_if(x_i)+\binom{n-1}{k-1}(p_nf(x_n)+p_{n+1}f(x_{n+1}))$$

$$+\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_{k-1}\leq n-1}(p_{i_1}f(x_{i_1})+\cdots+p_{i_{k-1}}f(x_{i_{k-1}}))$$

$$+\binom{n-2}{k-2}(n-k)\,(p_n+p_{n+1})f\left(\frac{p_nx_n+p_{n+1}x_{n+1}}{p_n+p_{n+1}}\right)$$

$$+\binom{n-2}{k-1}(k-1)\,\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i\Big)\,f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_{n+1}x_{n+1}}{p_1+\cdots+p_{n+1}}\right).$$

Na sličan način mogu se formirati $\binom{n+1}{2}-1$ nejednakosti koje su analogne nejednakosti (22), gde se umesto x_n i x_{n+1} uzimaju svi ostali parovi elemenata. Sabiranjem tako dobijenih nejednakosti, imamo

$$(23)\qquad A_n\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_k})f\left(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_n}x_{i_n}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_n}}\right)$$

$$\leq b_n\sum_{i=1}^{n+1}p_if(x_i)+c_n\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i\Big)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_{n+1}x_{n+1}}{p_1+\cdots+p_{n+1}}\right)$$

$$+\binom{n-2}{k-2}(n-k)\sum_{i\leq i<j\leq n+1}(p_i+p_j)f\left(\frac{p_ix_i+p_jx_j}{p_i+p_j}\right),$$

gde su A_n, b_n, c_n koeficijenti koje ćemo kasnije odrediti.

Množenjem nejednakosti $(C_{n+1,2})$ sa $\binom{n-2}{k-2}(n-k)$ dobijamo

$$(24)\qquad \binom{n-2}{k-2}(n-k)\sum_{1\leq i<j\leq n+1}(p_i+p_j)f\left(\frac{p_ix_i+p_jx_j}{p_i+p_j}\right)$$

$$\leq\binom{n-2}{k-2}(n-k)\,(n-1)\sum_{i=1}^{n+1}p_if(x_i)+\binom{n-2}{k-2}(n-k)\,\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i\Big)f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right),$$

odakle sabiranjem sa (23) sleduje

$$(25)\qquad A_n\sum_{i\leq i_1<\cdots<i_k\leq n+1}(p_{i_1}+\cdots+p_{i_k})f\left(\frac{p_{i_1}x_{i_1}+\cdots+p_{i_k}x_{i_k}}{p_{i_1}+\cdots+p_{i_k}}\right)$$

$$\leq B_n\sum_{i=1}^{n+1}p_if(x_i)+C_n\Big(\sum_{i=1}^{n+1}p_i\Big)\,f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_{n+1}x_{n+1}}{p_1+\cdots+p_{n+1}}\right),$$

gde su A_n, B_n, C_n definisani pomoću

$$A_n=(k-1)\binom{n-k+1}{2}+(n-k+1)\binom{k+1}{2}=\frac{1}{2}(n-k+1)(nk-n+2k),$$

$$B_n=b_n+\binom{n-2}{k-2}(n-k)(n-1)$$

$$=\left(\left(\binom{n+1}{2}-n\right)\binom{n-2}{k-2}(n-k)+n\binom{n-1}{k-1}+\left(\binom{n+1}{2}-n\right)\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-2}{k-2}(n-k)(n-1)\right.$$

$$=\binom{n-1}{k-1}\frac{n-k+1}{k-1}A_n,$$

$$C_n=c_n+\binom{n-2}{k-2}(n-k)$$

$$=\binom{n+1}{2}(k-1)\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-2}{k-2}(n-k)$$

$$=\binom{n-1}{k-2}A_n.$$

Dakle, nejednakost (25) daje $(C_{n+1,k})$.

Ovim je dokaz matematičkom indukcijom završen.

T. Popoviciu [4] je dokazao sledeći rezultat:

Neka su n i k prirodni brojevi takvi da je $n\geqq 3$ i $2\leqq k\leqq n-1$. Neprekidna funkcija je konveksna na intervalu I ako i samo ako važi

$$\sum_{1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq n} f\left(\frac{x_{i_1}+\cdots+x_{i_k}}{k}\right)\leqq\frac{1}{k}\binom{n-2}{k-2}\left(\frac{n-k}{k-1}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)+nf\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)\right) \tag{26}$$

za svako $x_1,\ldots,x_n\in I$.

Ako važi $(C_{n,k})$ tada stavljanjem $p_1=\cdots=p_n=1$ dobijamo (26). Međutim, tada je funkcija f konveksna pa na osnovu Teoreme 1 važi $(C_{3,2})$.

4. O NEKIM REZULTATIMA V. K. LIMA

U članku [1] V. K. LIM je dokazao sledeće dve teoreme:

Teorema A. *Neka su a i b dva nenegativna realna broja takva da je $a+b \leqq c$. Tada je*

$$a^r + (b+c)^r \geqq (a+b)^r + c^r \tag{1}$$

za $r \geqq 1$.

Nejednakost je obrnuta ako je $0<r<1$, i jednakost važi ako i samo ako je $b=0$ ili $r=1$.

Teorema B. *Neka su $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ nenegativni realni brojevi,*

$$r>0 \ i \ Q \geqq \max(Q_1, \ldots, Q_m).$$

(i) *Ako je za neki realan broj s, $sQ = \sum_{i=1}^{m} Q_i$, tada je*

$$sQ^r \geqq \sum_{i=1}^{m} Q_i^r \quad (r \geqq 1), \qquad sQ^r \leqq \sum_{i=1}^{m} Q_i^r \quad (0<r<1). \tag{2}$$

Jednakost važi ako je ispunjen jedan od uslova:

(a) $r=1$,

(b) $Q_i=0$ *za* $1 \leqq i \leqq m$,

(c) *s je neki ceo broj $(1 \leqq s \leqq m)$ takav da je $Q_i = Q$ za $1 \leqq i \leqq s$ i $Q_i=0$ kada je $i>s$.*

(ii) *Ako je za neki realan broj s, $sQ+Q_0 = \sum_{i=1}^{m} Q_i$, gde je $0<Q_0<Q$, i ili je $s=0$ ili ako je $s \neq 0$, $sQ > Q_i$ za $1<i<m$, tada je*

$$sQ^r + Q_0^r \geqq \sum_{i=1}^{m} Q_i^r \quad (r \geqq 1). \tag{3}$$

Jednakost važi ako jedan od uslova važi:

(a) $r=1$,

(b) $s=0$, $Q_0=Q_i$ *za neko* i *i* $Q_j=0$ *za* $j \neq i$,

(c) *s je jedan ceo broj takav da postoji jedno Q_i takvo da je $sQ_i=Q$, jedno $Q_i=Q_0$ i ostali Q_i jednaki nuli.*

Kako je H. T. CROFT [1] primetio, zaključak (ii) Teoreme B, tj. nejednakost (3) nije tačna za proizvoljan realan broj s. Kontraprimer za (3) je

$$Q=Q_1=Q_2=1, \quad Q_0=0.5, \quad s=1.5, \quad m=r=2.$$

S druge strane Teoreme A i B su neposredne posledice dobro poznatih osobina konveksnih funkcija, pa se mogu dokazati na jednostavniji način nego u članku V. K. LIMA.

Mi ćemo, u stvari, dokazati sledeće tri teoreme (videti LJ. R. STANKOVIĆ i I. B. LACKOVIĆ [1]).

Teorema 1. *Neka su a i b nenegativni brojevi i neka je $a+b \leqq c$. Tada za svaku konveksnu funkciju $x \mapsto f(x)$ definisanu za svako $x \geqq 0$ važi sledeća nejednakost*

$$f(a)+f(b+c) \geqq f(a+b)+f(c). \tag{4}$$

Ako je funkcija f konkavna, nejednakost je obrnuta.

U slučaju kada je $f(t)=t^r$ gde je $t \geqq 0$ i $r \geqq 1$ ili $0<r<1$ Teorema 1 se svodi na Teoremu A.

Dokaz. Po pretpostavci teoreme je ili $a \leqq b \leqq c$ ili $b \leqq a \leqq c$. Ako uvedemo oznake $x_1=b+c$, $x_2=a$, $y_1=c$, $y_2=a+b$ tada imamo $x_1 \geqq x_2$, $y_1 \geqq y_2$, $x_1+x_2=$ $=y_1+y_2$, tj. vektor y je majoriziran vektorom x, što označavamo sa $x \succ y$, (videti D. S. MITRINOVIĆ [1], str. 162). Otuda iz dobro poznate teoreme HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA sledi nejednakost

$$f(x_1)+f(x_2) \geqq f(y_1)+f(y_2)$$

čime je, u stvari, teorema dokazana.

Teorema 2. *Neka su brojevi $Q_1, \ldots, Q_m$ $(m \in \mathrm{N})$ nenegativni i neka je*

$$Q \geqq \max(Q_1, \ldots, Q_m).$$

Ako postoji realan broj s takav da je $sQ=\sum_{i=1}^{m} Q_i$ tada važi sledeća nejednakost

$$sf(Q) \geqq \sum_{i=1}^{m} f(Q_i) \tag{5}$$

za svaku konveksnu funkciju, definisanu za svako $x>0$, za koju je $f(0)=0$.

Dokaz. Ako je $Q=0$, tada je $Q_i=0$ $(i=1, \ldots, m)$ pa se nejednakost (5) svodi na jednakost, jer je $f(0)=0$. Pretpostavimo sada da je $Q>0$. Kako za svaku konveksnu funkciju važi nejednakost $f(ax) \leqq af(x)$ za svako $x \geqq 0$ i $0 \leqq a \leqq 1$ dobijamo

$$f(Q_i)=f\left(\frac{Q_i}{Q} Q\right) \leqq \frac{Q_i}{Q} f(Q) \qquad (i=1, \ldots, m) \tag{6}$$

jer je $0 \leqq \frac{Q_i}{Q} \leqq 1$ $(i=1, \ldots, m)$. Sabirajući nejednakosti (6) za $i=1, 2, \ldots, m$, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{m} f(Q_i) \leqq \frac{f(Q)}{Q} \sum_{i=1}^{m} Q_i=sf(Q), \tag{7}$$

čime je teorema dokazana.

Teorema 3. *Pretpostavimo da su brojevi* $Q_1, \ldots, Q_m$ $(m \in \mathbf{N})$ *nenegativni i neka je* $Q \geqq \max(Q_1, \ldots, Q_m)$. *Ako je* n *prirodan broj takav da je* $nQ + Q_0 = \sum_{i=1}^{m} Q_i$, *gde je* $0 < Q_0 < Q$, *tada važi sledeća nejednakost*

$$nf(Q) + f(Q_0) \geqq \sum_{i=1}^{m} f(Q_i) \tag{8}$$

za svaku konveksnu funkciju, definisanu za svako $x \geqq 0$ *i za koju je* $f(0) = 0$.

Dokaz. Jednakost u (8) važi ako je ispunjen jedan od uslova:

(a) $Q = 0$ (tada je $Q_0 = Q_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$),

(b) $n = 0$, $Q_0 = Q_{i_0}$ i $Q_j = 0$ za $j \neq i_0$.

Ako pretpostavimo da je $Q > 0$, tada je

$$nQ < nQ + Q_0 = \sum_{i=1}^{m} Q_i \leqq mQ$$

odakle sledi da je $n < m$.

Uvedimo sledeće oznake

$$x_i = Q \ (i = 1, \ldots, n) \ \text{i} \ x_{n+1} = Q_0 \ \text{ako je} \ m = n + 1,$$

ili

$x_i = Q$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x_{n+1} = Q_0$, $x_i = 0$ $(i = n + 2, \ldots, m)$ ako je $m \geqq n + 2$, $y_i = Q_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Možemo pretpostaviti da je $Q_i \geqq Q_{i+1}$. Tada imamo

$$x_1 \geqq x_2 \geqq \cdots \geqq x_m \quad \text{i} \quad y_1 \geqq y_2 \geqq \cdots \geqq y_m,$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geqq \sum_{i=1}^{k} y_i \ (k = 1, \ldots, m-1), \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i,$$

tj. $x \succ y$, gde je $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Koristeći teoremu Hardy-Littlewood-Pólya imaćemo

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) \geqq \sum_{i=1}^{m} f(y_i).$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_i) = nf(Q) + f(Q_0), \qquad \sum_{i=1}^{m} f(y_i) = \sum_{i=1}^{m} f(Q_i)$$

nejednakost (8) je dokazana.

5. O NEKIM NEJEDNAKOSTIMA ZA KONVEKSNE I g-KONVEKSNE FUNKCIJE

Nejednakost

$$\text{(1)} \qquad \frac{f(x_1)}{g(x_1, x_3)\, g(x_1, x_2)} + \frac{f(x_2)}{g(x_2, x_1)\, g(x_2, x_3)} + \frac{f(x_3)}{g(x_3, x_1)\, g(x_3, x_2)} \geqq 0$$

je ekvivalentna sa

$$g(x_2, x_3) f(x_1) + g(x_3, x_1) f(x_2) + g(x_1, x_2) f(x_3) \geqq 0$$

bez obzira kako su brojevi x_1, x_2, x_3 uređeni, pod uslovom da je $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$.

Stavljajući (videti P. M. VASIĆ i LJ. R. STANKOVIĆ [1])

$$x_1 = x_i, \quad x_2 = \sum_{k=0}^{n} p_k x_k, \quad x_3 = x_0 \quad (p_k > 0, \ x_i \in I)$$

u (1), dobijamo

$$\text{(2)} \qquad \frac{f(x_i)}{g(x_i, x_0)\, g(x_i, \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k)} + \frac{f(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k)}{g(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k, x_i)\, g(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k, x_0)}$$

$$+ \frac{f(x_0)}{g(x_0, x_i)\, g(x_0, \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k)} \geqq 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ako je

$$\text{(3)} \qquad g(x_i, x_0)\, g(x_i, \sum_{k=0}^{n} p_k x_k) < 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

tada, množeći nejednakost (2) sa p_i dobijamo nejednakost

$$\text{(4)} \quad p_i f(x_i) \leqq \frac{p_i g(x_i, x_0)}{g(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k, x_0)} f(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k) + \frac{p_i g(x_i, \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k)}{g(x_0, \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k)} f(x_0) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Sabirajući nejednakosti (4) imamo

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leqq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i g(x_i, x_0)}{g\left(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k, x_0\right)} f\left(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right) + \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i g\left(x_i, \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)}{g\left(x_0, \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)} f(x_0).$$

Kako je $g(x_0, x_0) = 0$, za

$$(6)\qquad g(x_0, \sum_{k=0}^{n} p_k x_k) \neq 0$$

biće

$$p_0 f(x_0) = \frac{p_0 g(x_0, x_0)}{g\left(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k, x_0\right)} f\left(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right) + \frac{p_0 g\left(x_0, \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)}{g\left(x_0, \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)} f(x_0),$$

koja, kada se sabere sa (5), daje

$$(7)\qquad \sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i) \leqq \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i g(x_i, x_0)}{g\left(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k, x_0\right)} f\left(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right) + \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i g\left(x_i, \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)}{g\left(x_0, \sum_{k=0}^{n} p_k x_k\right)} f(x_0).$$

Time smo, u stvari, dokazali sledeći rezultat:

Teorema 1. *Ako su uslovi* (3) *i* (6) *ispunjeni, tada za svaku g-konveksnu funkciju f nejednakost* (7) *važi.*

Ako stavimo da je $g(x, y) = y - x$, tada se g-konveksnost transformiše u običnu konveksnost, i (3) postaje

$$(8)\qquad (x_i - x_0)\left(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k - x_i\right) > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

U tom slučaju nejednakost (7) postaje

$$(9)\qquad \sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i) \leqq \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_0 \sum_{i=0}^{n} p_i}{\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_0} f\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x_i\right) + \frac{1 - \sum_{i=0}^{n} p_i}{\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_i} \sum_{i=0}^{n} p_i x_i f(x_0).$$

F. Giaccardi [1] dokazao je nejednakost (9) pod pretpostavkom da je f konveksna funkcija i da je

$$(10)\qquad 0 \leqq x_0 < x_j < \sum_{i=0}^{n} p_i x_i \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Uslov (8) je slabiji od (10).

Označimo sa

$$(11)\qquad P_n(p, x; f)=f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i)-\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)-(1-\sum_{i=1}^{n} p_i) f(0).$$

Ako je $x_0=0$, nejednakost (9) se svodi na

$$(12)\qquad P_n(p, x; f)\geqq 0,$$

što pokazuje da je f konveksna funkcija, pa je

$$(13)\qquad x_i(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k - x_i)>0 \qquad (i=1, \ldots, n).$$

i

$$(14)\qquad \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \neq 0.$$

Očigledno je da je uslov (14) impliciran uslovom (13) i stoga se može izostaviti.

Nejednakost (12) je partikularan slučaj gornjeg rezultata pod uslovom da je f konveksna funkcija, $x_1, \ldots, x_n>0$, $p_1, \ldots, p_n \geqq 1$ (videti D. S. MITRINOVIĆ [1]), kao i PETROVIĆeva nejednakost (videti M. PETROVIĆ [1]):

$$(15)\qquad f(\sum_{i=1}^{n} x_i)\geqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)-(1-n) f(0)$$

gde je $x_1, \ldots, x_n \geqq 0$ i f konveksna funkcija. Iz (12) nalazimo

$$P_n(p, x; f)-P_{n-1}(p, x; f)=f(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i)-f(\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i)-p_n f(x_n)+p_n f(0).$$

Za $n=2$, iz (12) i (13), dobijamo

$$(16)\qquad f(p_1 x_1+p_2 x_2)-p_1 f(x_1)-p_2 f(x_2)-(1-p_1-p_2) f(0)\geqq 0$$

pod uslovom

$$(17)\qquad x_1(p_1 x_1+p_2 x_2-x_1)\geqq 0, \qquad x_2(p_1 x_1+p_2 x_2-x_2)\geqq 0.$$

Supstitucijom

$$x_1 \to x_n,\ x_2 \to \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i,\ p_1 \to p_n,\ p_2 \to 1,$$

iz (16) nalazimo

$$(18)\qquad P_n(p, x; f)-P_{n-1}(p, x; f)\geqq 0$$

da je f konveksna funkcija i da važi pod pretpostavkom

$$(19)\qquad x_n(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - x_n)>0,\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i-\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i)=p_n x_n \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i>0.$$

Imajući to u vidu važi sledeća teorema.

Teorema 2. *Ako je f konveksna funkcija i ako su uslovi* (19) *ispunjeni, tada nejednakost* (18) *važi.*

PRIMEDBA. Iteracijom nejednakosti (18), dolazimo do nejednakosti

$$P_n(p,\ x;\ f) \geqq P_{n-1}(p,\ x;\ f) \geqq \cdots \geqq P_1(p,\ x;\ f)=0,$$

gde je f konveksna funkcija i

$$x_k\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - x_k\Big)>0, \qquad p_k x_k \sum_{i=1}^{n} p_i x_i>0 \qquad (k=1,\ldots,\ n).$$

Ovaj rezultat je poboljšanje nejednakosti (12).

N. LEVINSON [1] dokazao je nejednakost

$$\text{(20)}\qquad \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} - f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right) \leqq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(2a-x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} - f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k f(2a-x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k}\right)$$

pod pretpostavkom da je $f'''(t)>0$ za $t \in (0,\ 2a)$, $0<x_k \leqq a$, $p_k>0$. P. M. VASIĆ i R. R. JANIĆ [1] dokazali su, pod jačim uslovima: $p_k \geqq 1$ i $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k x_k \in [0,\ a)$, nejednakost

$$\text{(21)}\qquad \sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} p_k f(2a-x_k)$$
$$\geqq f\Big(\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\Big) - f\Big(2a - \sum_{k=1}^{n} p_k x_k\Big) - \Big(1-\sum_{k=1}^{n} p_k\Big)\big(f(0)-f(2a)\big).$$

Stavljajući $n=2$ u (20) i zamenjujući $x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2$ redom sa

$$\sum_{k=0}^{n} p_k x_k,\quad x_0,\quad 1,\quad \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k - x_i}{x_i - x_0} \qquad (i=1,\ \ldots,\ n)$$

nalazimo

$$\text{(22)}\qquad f(x_i)-f(2a-x_i) \geqq \frac{x_i-x_0}{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k - x_0} f\Big(\sum_{k=0}^{n} p_k x_k\Big) + \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k - x_i}{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k - x_0}\big(f(x_0)-f(2a-x_0)\big)$$
$$-\frac{x_i-x_0}{\sum\limits_{k=0}^{n} p_k x_k - x_0} f\Big(2a-\sum_{k=0}^{n} p_k x_k\Big) \qquad (i=1,\ \ldots,\ n).$$

Množenjem (22) sa $p_i > 0$, sumiranjem dobijenih nejednakosti i dodavanjem izraza $f(x_0) - f(2a - x_0)$ levoj i desnoj strani rezultujuće nejednakosti, dobijamo

$$(23) \quad \sum_{i=0}^{n} p_i f(x_i) - \sum_{i=0}^{n} p_i f(2a - x_i)$$

$$\geqq \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_0 \sum_{i=0}^{n} p_i}{\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_0} \left(f\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x_i\right) - f\left(2a - \sum_{i=0}^{n} p_i x_i\right)\right)$$

$$+ \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i - 1}{\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_0} \sum_{i=0}^{n} p_i x_i \left(f(x_0) - f(2a - x_0)\right)$$

pod uslovom

$$(x_i - x_0)\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x_i - x_0\right) > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

i

$$f'''(t) > 0 \text{ za } t \in (0, 2a) \text{ i } \sum_{i=0}^{n} p_i x_i \in [0, a].$$

Nejednakost (22) zadovoljava (21) za $x_0 = 0$.

Neka je f konveksna funkcija drugog reda za $x \in (0, 2a)$ i neka je $x_1, \ldots, x_4 \in [0, a]$. Tada nejednakost

$$(24) \quad \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$+ \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + \frac{f(x_4)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \geqq 0$$

važi (videti D. S. MITRINOVIĆ [1], str. 15—17).

Supstitucijom $x_i \to 2a - x_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$, iz (24) dobijamo

$$(25) \quad \frac{-f(2a - x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \frac{-f(2a - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$+ \frac{-f(2a - x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + \frac{-f(2a - x_4)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \geqq 0.$$

Stavljajući da je $x_4 = a$ u (24) i (25) i sabirajući dobijene nejednakosti, dolazimo do nejednakosti

$$\frac{\dfrac{f(x_1) - f(2a - x_1)}{x_1 - a}}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{\dfrac{f(x_2) - f(2a - x_2)}{x_2 - a}}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{\dfrac{f(x_3) - f(2a - x_3)}{x_3 - a}}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \geqq 0.$$

Otuda sleduje da je funkcija

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(2a-x)}{x-a}$$

konveksna (reda 1) na segmentu $[0, a]$ i iz JENSENove nejednakosti dobijamo

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{f(x_k)-f(a-x_k)}{x_k-a} \leqq \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{f\left(\dfrac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right)-f\left(2a-\dfrac{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k}\right)}{\sum_{k=1}^{n} p_k x_k - a \sum_{k=1}^{n} p_k}. \tag{26}$$

Iz nejednakosti (20) ne sleduje (26) i obrnuto. To proizilazi iz činjenice da konveksnost funkcije $x \mapsto g(x)$ ne znači neophodnost da je i funkcija $x \mapsto \frac{g(x)}{x-a}$ konveksna, i obrnuto.

6. ČEBIŠEVLJEVA I SA NJOM POVEZANE NEJEDNAKOSTI

Teorema 1. *Neka su* $a=(a_1, \ldots, a_n)$ *i* $b=(b_1, \ldots, b_n)$ *dva realna niza takva da je*

(1)
$$a_1 \leqq \cdots \leqq a_n, \qquad b_1 \leqq \cdots \leqq b_n,$$

ili

$$a_1 \geqq \cdots \geqq a_n, \qquad b_1 \geqq \cdots \geqq b_n.$$

Tada važi sledeća nejednakost

(2)
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Jednakost u (2) *važi ako i samo ako je* $a_1=\cdots=a_n$ *i* $b_1=\cdots=b_n$.

Ova nejednakost zove se ČEBIŠEVljeva nejednakost.

Teorema 2. *Ako je*

(3)
$$0 \leqq a_1 \leqq \cdots \leqq a_n, \qquad 0 \leqq b_1 \leqq \cdots \leqq b_n, \quad \ldots, \qquad 0 \leqq l_1 \leqq \cdots \leqq l_n,$$

tada je

(4)
$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{n} \cdots \frac{\sum_{k=1}^{n} l_k}{n} \leqq \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \cdots l_k}{n}.$$

Kao specijalan slučaj imamo sledeći rezultat:

Ako je $a_k \geqq 0$ za $k=1, \ldots, n$ i ako je m prirodan broj, tada je

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^m \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k{}^m.$$

Primetimo da je uslov nenegativnosti brojeva u (3) neophodan ako se posmatraju tri ili više nizova.

Uslov (1) da su oba niza a i b rastuća ili oba opadajuća je dovoljan uslov za važenje ČEBIŠEVljeve nejednakosti. Međutim, ovaj uslov nije potreban. Neke druge dovoljne uslove, koji takođe nisu potrebni, dao je D. N. LABUTIN

[1] koji, međutim, nije eksplicitno naveo da se radi o ČEBIŠEVljevoj nejednakosti. Ovaj problem su u potpunosti rešili D. W. SASSER i M. L. SLATER [1], koji su dali potrebne i dovoljne uslove da važi ČEBIŠEVljeva nejednakost. Njihov rezultat dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 3. *Neka su $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ dva niza realnih brojeva. Neka su a i b n-dimenzionalne vektor-kolone čije su komponente $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ respektivno. Neka je e n-dimenzionalna vektor-kolona čiji su svi elementi* 1. *Tada je potreban i dovoljan uslov za važenje Čebiševljeve nejednakosti $b = Aa + ce$ ili $a = Ab + ce$, gde je c realan broj i gde je A realna pozitivna semidefinitna matrica takva da je zbir svih elemenata svake kolone ili svake vrste jednak* 0. *Jednakost u* (2) *važi ako i samo ako je $(A + A')a = 0$ ili $(A + A')b = 0$.*

Integralni analogon ČEBIŠEVljeve nejednakosti (2) dat je sledećom teoremom:

Teorema 4. *Neka su f i g realne integrabilne funkcije na $[a, b]$ i neka su ili obe rastuće ili obe opadajuće. Tada je*

$$(5) \qquad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \geqq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ako je jedna funkcija rastuća a druga opadajuća, važi suprotna nejednakost.

ČEBIŠEVljeva nejednakost (5) može se, kao što je pokazao O. DUNKEL [1], generalisati na n funkcija. Njegov rezultat glasi:

Teorema 5. *Neka su $f_1, \ldots, f_n$ nenegativne funkcije koje su monotone istog smisla. Ako su ove funkcije integrabilne na (a, b), tada je*

$$(6) \qquad \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \cdots \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)^{n-1} \int_a^b f_1(x) \cdots f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sledeću generalizaciju nejednakosti (5) dao je P. L. ČEBIŠEV [1]:

Teorema 6. *Neka su f i g dve integrabilne funkcije na (a, b) koje su monotone istog smisla na (a, b) i neka je p pozitivna i integrabilna funkcija na istom intervalu. Tada je*

$$(7) \qquad \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

sa jednakošću ako i samo ako se jedna od funkcija f i g svodi na konstantu.

Ako su f i g monotone funkcije suprotnog smisla, u (7) *važi suprotna nejednakost.*

Iz (7) za $p(x) = 1$ dobija se (6).

Za $p(x) = f_2(x)^2$, $f(x) = g(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, (7) daje BUNIAKOWSKI-SCHWARZOVU nejednakost.

M. BIERNACKI [1] je dokazao da (7) važi pod drugim uslovima od onih koji su dati u Teoremi 6. Ustvari on je dokazao:

Teorema 7. *Neka su f, g i p integrabilne funkcije na (a, b) i neka je p pozitivna na tom intervalu. Ako funkcije*

$$f_1(x)=\frac{\int_a^x p(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^x p(x)\,\mathrm{d}x},\quad g_1(x)=\frac{\int_a^x p(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^x p(x)\,\mathrm{d}x}$$

dostižu ekstremne vrednosti samo u konačnom broju zajedničkih tačaka iz (a, b) i ako su one monotone istog smisla na (a, b), tada važi (7).

U tvrđenju Teoreme 7 funkcije f_1 i g_1 mogu se zameniti sledećim funkcijama

$$f_2(x)=\frac{\int_x^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_x^b p(x)\,\mathrm{d}x},\quad g_2(x)=\frac{\int_x^b p(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_x^b p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Ako su funkcije f_1 i g_1 (ili f_2 i g_2) monotone suprotnog smisla, u (7) *važi suprotna nejednakost.*

Teoremu 6 ponovo je otkrio M. Fujiwara [1] u nešto drugačijem obliku. Naime, dokazao je sledeću teoremu:

Teorema 8. *Neka je $f_2(x)g_2(x)>0$ u (a, b) i neka funkcije F i G definisane sa*

$$F(x, y)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}-\frac{f_1(y)}{f_2(y)},\quad G(x, y)=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}-\frac{g_1(y)}{g_2(y)} \tag{8}$$

imaju isti znak za svako x, $y\in(a, b)$. Tada važi nejednakost

$$\int_a^b f_1(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f_2(x)g_2(x)\,\mathrm{d}x\geqq\int_a^b f_1(x)g_2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b f_2(x)g_1(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

To je samo prividna generalizacija nejednakosti Čebiševa. Naime, ako stavimo

$$f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)},\quad g(x)=\frac{g_1(x)}{g_2(x)},\quad p(x)=f_2(x)g_2(x)$$

u (7) dobijamo (8).

M. J. Favard [1] dokazao je sledeći rezultat (25 godina kasnije do istog rezultata došao je B. J. Andersson [1]):

Teorema 9. *Neka $f_1, \ldots, f_n$ budu integrabilne funkcije na $[0, 1]$ koje zadovoljavaju uslove:*

(C_1) *$f_1, \ldots, f_n$ su konveksne funkcije na $[0, 1]$;*

(C_2) $f_k(x)\geqq 0$ $(x\in[0, 1],\ k=1, \ldots, n)$;

(C_3) $f_k(0)=0$ $(k=1, \ldots, n)$.

Tada,

$$\int_0^1 f_1(x)\cdots f_n(x)\,\mathrm{d}x \geqq \frac{2^n}{n+1}\Big(\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x\Big)\cdots\Big(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\Big). \tag{10}$$

Uslovi (C_1), (C_2) *i* (C_3) *mogu biti zamenjeni uslovima* (C_1), (C_3) *i*
(C_4) $f_1, \ldots, f_n$ *su rastuće funkcije na* $[0, 1]$.

Ako $f_1, \ldots, f_n$ zadovoljavaju uslove (C_3) i (C_4) tada važi nejednakost ČEBIŠEVA

$$\int_0^1 f_1(x)\cdots f_n(x)\,\mathrm{d}x \geqq \Big(\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x\Big)\cdots\Big(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\Big). \tag{11}$$

Nejednakost (10) je strožija od nejednakosti (11).

Matematičkom indukcijom može se dokazati da nejednakost (7) može da se proširi na n funkcija.

Teorema 10. *Neka su* $F_1, \ldots, F_n$ *nenegativne integrabilne funkcije i monotone istog smisla na* $[a, b]$. *Neka je* P *pozitivna i integrabilna funkcija na istom intervalu. Tada je*

$$\begin{aligned}\Big(\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{n-1}&\Big(\int_a^b P(x)F_1(x)\cdots F_n(x)\,\mathrm{d}x\Big)\\ &\geqq\Big(\int_a^b P(x)F_1(x)\,\mathrm{d}x\Big)\cdots\Big(\int_a^b P(x)F_n(x)\,\mathrm{d}x\Big).\end{aligned} \tag{12}$$

Jednakost u (12) *važi ako i samo ako je* $F_i(x)=C_i$ ($C_i=\mathrm{const}$) ($i=1, \ldots, n$).

Poznato je da ako navedemo neka ograničenja za funkcije F_i, nejednakost (12) može biti poboljšana. Naime, P. M. VASIĆ [2] je dokazao sledeću teoremu:

Teorema 11. *Ako su* $f_1, \ldots, f_n$ *integrabilne i konveksne funkcije na* $[a, b]$ *takve da je* $f_k(x)\geqq 0$ *za* $x\in[a, b]$ *i ako je* $f_k(a)=0$ ($k=1, \ldots, n$) *i* $p(x)$ *je pozitivna i integrabilna funkcija na* $[a, b]$ *tada je*

$$\begin{aligned}\Big(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{n-1}&\Big(\int_a^b p(x)f_1(x)\cdots f_n(x)\,\mathrm{d}x\Big)\\ &\geqq M\Big(\int_a^b p(x)f_1(x)\,\mathrm{d}x\Big)\cdots\Big(\int_a^b p(x)f_n(x)\,\mathrm{d}x\Big),\end{aligned} \tag{13}$$

gde je

$$M=\frac{\displaystyle\int_a^b p(x)(x-a)^n\,\mathrm{d}x\Big(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{n-1}}{\displaystyle\Big(\int_a^b p(x)(x-a)\,\mathrm{d}x\Big)^n}. \tag{14}$$

Jednakost u (13) *važi ako i samo ako je* $f_k(x)=c_k(x-a)$ ($k=1, \ldots, n$).

Kako je $M \geqq 1$, vidimo da je nejednakost (13) strožija od (12).

Stavljajući $p(x)=1$, $a=0$, $b=1$, dobijamo $M=\frac{2^n}{n+1}$, i nejednakost (13) daje nejednakost (10).

Pokazaćemo da se uvođenjem novih uslova nejednakost (13) može poboljšati (videti LJ. R. STANKOVIĆ [1]). Pre svega, važi sledeći rezultat, koji se dokazuje matematičkom indukcijom.

Teorema 12. *Neka je f nenegativna funkcija na $[a, b]$ koja zadovoljava sledeće uslove:*

1° *f je konveksna funkcija reda k,*

2° $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^{k-2}}=0$,

tada je funkcija $x \mapsto \frac{f(x)}{(x-a)^{k-1}}$ *neopadajuća.*

Stavimo u (12) $n=2$, $P(x)=p(x)(x-a)^{k-1}$, $F_1(x)=((x-a)^{k-1})^{n-1}$, $F_2(x)=\frac{f_1(x)\cdots f_n(x)}{((x-a)^{k-1})^n}$ gde funkcije $f_1, \ldots, f_n$ zadovoljavaju uslove Teoreme 2. Tada je

$$\text{(15)} \quad \Big(\int_a^b p(x)(x-a)^{k-1}\,dx\Big)\Big(\int_a^b p(x) f_1(x)\cdots f_n(x)\,dx\Big)$$

$$\geqq \Big(\int_a^b p(x)((x-a)^{k-1})^n dx\Big)\Big(\int_a^b p(x)\frac{f_1(x)\cdots f_n(x)}{((x-a)^{k-1})^{n-1}}\,dx\Big).$$

Stavljajući u (12) $P(x)=p(x)(x-a)^{k-1}$, $F_i(x)=\frac{f_i(x)}{(x-a)^{k-1}}$ $(i=1, \ldots, n)$, dobijamo

$$\text{(16)} \quad \Big(\int_a^b p(x)(x-a)^{k-1}\,dx\Big)^{n-1}\Big(\int_a^b p(x)\frac{f_1(x)\cdots f_n(x)}{((x-a)^{k-1})^{n-1}}\,dx\Big)$$

$$\geqq \Big(\int_a^b p(x) f_1(x)\,dx\Big)\cdots\Big(\int_a^b p(x) f_n(x)\,dx\Big).$$

Kombinujući nejednakosti (15) i (16) imamo

$$\text{(17)} \quad \Big(\int_a^b p(x)\,dx\Big)^{n-1}\Big(\int_a^b p(x) f_1(x)\cdots f_n(x)\,dx\Big)$$

$$\geqq M_k\Big(\int_a^b p(x) f_1(x)\,dx\Big)\cdots\Big(\int_a^b p(x) f_n(x)\,dx\Big),$$

gde je

$$M_k = \frac{\left(\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^n \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{n-1}}{\left(\int_a^b p(x)\,(x-a)^{k-1}\,\mathrm{d}x\right)^n}. \tag{18}$$

Jednakost u (17) važi ako i samo ako je $f_i(x) = c_i(x-a)^{k-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Stavljajući $k=2$ dobijamo $M_2 = M$, i (17) postaje (13). Odavde imamo teoremu.

Teorema 13. *Ako su* $f_1, \ldots, f_n$ *integrabilne nenegativne i konveksne funkcije reda* k *na* $[a, b]$ *takve da je* $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_i(x)}{(x-a)^{k-2}} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, *tada važi nejednakost* (17), *gde je* M_k *dato sa* (18).

Dokazaćemo da je $M_k \geqq M_{k-1}$, tj. da se povećanjem reda konveksnosti dobijaju sve bolje nejednakosti.

Zamenjujući u (1)

$$P(x) = p(x)(x-a)^{k-2}, \quad F_1(x) = ((x-a)^{k-2})^{n-1}, \quad F_i(x) = x-a \quad (i = 2, \ldots, n+1),$$

dobijamo

$$\left(\int_a^b p(x)(x-a)^{k-2}\mathrm{d}x\right)^n \left(\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^n \mathrm{d}x\right) \tag{19}$$
$$\geqq \left(\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)(x-a)^{k-1}\mathrm{d}x\right)^n,$$

tj.

$$\frac{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^n \mathrm{d}x}{\left(\int_a^b p(x)(x-a)^{k-1}\mathrm{d}x\right)^n} \geqq \frac{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n \mathrm{d}x}{\left(\int_a^b p(x)(x-a)^{k-2}\mathrm{d}x\right)^n}. \tag{20}$$

Kako je, na osnovu (20), $M_k \geqq M_{k-1}$, vidimo da je (17) strožija nejednakost od (13). Strožija nejednakost je dobijena povećanjem reda konveksnosti.

PRIMEDBA Opširan istorijat ČEBIŠEVljeve nejednakosti kao i pitanje prioriteta u vezi sa njom dati su u članku D. S. MITRINOVIĆ i P. M. VASIĆ [2].

7. PROŠIRENJE THUNSDORFFOVE NEJEDNAKOSTI ZA SLUČAJ KONVEKSNIH FUNKCIJA REDA k

Neka su f i p pozitivne i integrabilne funkcije na $[a, b]$. Težinska sredina reda r funkcije f na segmentu $[a, b]$ sa težinom p definisana je sa

$$M^{[r]}(f, p, a, b)=\left(\frac{\int_a^b p(x) f(x)^r \mathrm{d} x}{\int_a^b p(x) \mathrm{d} x}\right)^{1/r} \qquad (r \neq 0, |r|<+\infty),$$

$$=\exp \left(\frac{\int_b^b p(x) \log f(x) \mathrm{d} x}{\int_a^b p(x) \mathrm{d} x}\right) \qquad (r=0),$$

$$=m \qquad (r=-\infty),$$

$$=M \qquad (r=+\infty),$$

gde je $m=\inf f(x)$, $M=\sup f(x)$ za $x \in[a, b]$.

Poznato je da je $M^{[r]}$ neopadajuća funkcija od r tako da važi nejednakost

$$M^{[r]}(f, p, a, b) \leqq M^{[s]}(f, p, a, b) \qquad (r<s). \tag{1}$$

Takođe je poznato da ako se za funkciju f uvedu neka dopunska ograničenja nejednakost (1) može da se poboljša. Naime THUNSDORFF [1] je dokazao sledeći rezultat:

Neka je $0 \leqq m \leqq n$. Tada je

$$M^{[m]}(f, 1, 0, 1) \leqq M^{[n]}(f, 1, 0, 1) \frac{(n+1)^{1/n}}{(m+1)^{1/m}}, \tag{2}$$

gde je f nenegativna konveksna funkcija na $0 \leqq x \leqq 1$ i $f(0)=0$.

Kako je $(n+1)^{1/n} \leqq(m+1)^{1/m}$ nejednakost (2) je strožija od nejednakosti (1), za slučaj $p(x)=1$, $a=0$, $b=1$. (Ovo se dobija iz (1) za $p(x)=1$, $f(x)=x$, $a=0$, $b=1$).

Mi ćemo pokazati da se nejednakost (1) može poboljšati za proizvoljno p, a, b (videti Lj. R. Stanković [2]). Naime važi:

Teorema 1. *Neka je* $0 \leqq m \leqq n$. *Tada je*

$$M^{[m]}(f, p, a, b) \leqq N \cdot M^{[n]}(f, p, a, b), \tag{3}$$

gde je

$$N = \left(\frac{\int_a^b p(x)(x-a)^m \,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x} \right)^{1/m} \left(\frac{\int_a^b p(x)(x-a)^n \,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x} \right)^{-1/n}, \tag{4}$$

i f *nenegativna konveksna funkcija na* $[a, b]$ *i* $f(a)=0$, *a* $p(x)$ *pozitivna funkcija.*

Dokaz. Stavimo li u (1) $p(x)(x-a)^n$ umesto $p(x)$ i $\frac{f(x)}{x-a}$ umesto $f(x)$, dobijamo

$$\left(\frac{\int_a^b p(x)(x-a)^{n-m} f(x)^m \,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)(x-a)^n \,\mathrm{d}x} \right)^{1/m} \leqq \left(\frac{\int_a^b p(x) f(x)^n \,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)(x-a)^n \,\mathrm{d}x} \right)^{1/n}. \tag{5}$$

Nejednakost Čebiševa za funkcije

$$F_1(x) = \frac{f(x)^m}{(x-a)^m}, \quad F_2(x) = (x-a)^{n-m}, \quad P(x) = p(x)\,(x-a)^m$$

(a to je moguće jer su funkcije F_1 i F_2 rastuće) postaje

$$\left(\int_a^b p(x)\,(x-a)^m \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)\,(x-a)^{n-m} f(x)^m \mathrm{d}x\right) \tag{6}$$

$$\geqq \left(\int_a^b p(x) f(x)^m \mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b p(x)\,(x-a)^n \mathrm{d}x\right).$$

Iz (5) i (6) dobijamo

$$\left(\frac{\int_a^b p(x) f(x)^m \,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\,(x-a)^m \,\mathrm{d}x} \right)^{1/m} \leqq \left(\frac{\int_a^b p(x) f(x)^n \,\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)(x-a)^n \,\mathrm{d}x} \right)^{1/n}, \tag{7}$$

ili

$$\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)^m\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)^{1/m} \leqq N\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)^n\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)^{1/n} \tag{8}$$

gde je N dato sa (4) i $N \leqq 1$.

Ako stavimo da je $p(x)=1, a=0, b=1$ dobijamo nejednakost THUNSDORFFa [1].

Teorema 2. *Neka je f nenegativna, integrabilna i konveksna funkcija reda k na $[a, b]$ takva da je* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^{k-2}}=0.$

Tada važi nejednakost

$$\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)^m\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)^{1/m} \leqq N_k\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)^n\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)^{1/n} \tag{9}$$

gde je

$$N_k=\left(\frac{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^m\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)^{1/m}\left(\frac{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right)^{-1/n}. \tag{10}$$

Dokaz ove teoreme je sličan dokazu Teoreme 1, samo umesto $x-a$ treba uzeti $(x-a)^{k-1}$.

Za $k=2$ nejednakost (9) se svodi na nejednakost (8).

Treba dokazati da je $N_k \leqq N_{k-1}$, odnosno

$$\left(\frac{\int_v^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^m\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^m\mathrm{d}x}\right)^{1/m} \leqq \left(\frac{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n\mathrm{d}x}\right)^{1/n}. \tag{11}$$

Ako u (1) stavimo

$$P(x)=p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n, \qquad F(x)=x-a,$$

imamo

$$\left(\frac{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n(x-a)^m\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n\mathrm{d}x}\right)^{1/m} \leqq \left(\frac{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^n\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n\mathrm{d}x}\right)^{1/n}. \tag{12}$$

Ako u nejednakosti ČEBIŠEVa izvršimo smenu

$$P(x)=p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^m, \quad F_1(x)=(x-a)^m, \quad F_2(x)=\left((x-a)^{k-2}\right)^{n-m}$$

dobijamo

$$\int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^m \mathrm{d}x \int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n (x-a)^m \mathrm{d}x \tag{13}$$

$$\geqq \int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-2}\right)^n \mathrm{d}x \int_a^b p(x)\left((x-a)^{k-1}\right)^m \mathrm{d}x.$$

Iz (12) i (13) dobijamo (11).

Odavde vidimo da se povećanjem reda konveksnosti dobijaju sve bolje nejednakosti.

8. NEKA OTVORENA PITANJA I MOGUĆNOSTI DALJIH GENERALIZACIJA

1. Problem OPPENHEIMA rešen je za slučaj težinskih sredina reda r. Od interesa bi bilo da se reši odgovarjući problem za generalisane sredine oblika

$$M_f(a;\, p)=f^{-1}\left(\frac{p_1 f(a_1)+\cdots+p_n f(a_n)}{p_1+\cdots+p_n}\right)$$

(videti D. S. MITRINOVIĆ i P. M. VASIĆ [1]), ili za integralne sredine oblika

$$\begin{aligned} M^{[r]}(f;\, p,\, a,\, b) &= \left(\frac{\int_a^b p(x)\, f(x)^r\, \mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\, \mathrm{d}x}\right)^{1/r} && (r\neq 0,\ |r|<+\infty), \\ &= \exp \frac{\int_a^b p(x) \log f(x)\, \mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\, \mathrm{d}x} && (r=0), \\ &= m && (r=-\infty), \\ &= M && (r=+\infty), \end{aligned}$$

gde je $m=\inf f(x)$ i $M=\sup f(x)$ za $x\in[a,\, b]$.

Sledeća generalizacija je da se umesto ovih posmatraju i opštije sredine koje su u skorije vreme uvedene u matematičku literaturu.

2. Rezultate koji su dobijeni u vezi sa BURKILLovim rezultatima bilo bi interesantno proširiti koristeći konveksne funkcije viših redova. Isto tako bilo bi interesantno dobiti integralne analogone. Pri tome bi umesto korišćene teoreme o majorizaciji trebalo koristiti njen integralni analogon koji su dali HARDY, LITTLEWOOD i PÓLYA [**1**].

Teorema 3 bi mogla da se dokaže pod znatno manjim pretpostavkama koristeći ideju P. M. VASIĆa i D. D. ADAMOVIĆa [**1**].

3. Slične generalizacije bi došle u obzir i za korektnu formu rezultata V. K. LIMA (tj. generalizacije u vezi sa konveksnim funkcijama viših redova i integralni analogoni).

4. U vezi sa g-konveksnim funkcijama do sada su dobijeni samo neki polazni rezultati (neprekidnost i sl.). S obzirom na opštost ovakvog pojma konveksnosti bili bi veoma korisni daljni rezultati — stavovi o diferencijabilnosti takvih funkcija, dovoljni uslovi za konveksnost, i uopšte rezultati analogni onima datim u poglavlju o konveksnim funkcijama u knjizi D. S. MITRINOVIĆ [1]. Interesantno bi bilo i da se ispita kako bi izgledao pojam g-konveksnih funkcija viših redova. Ako bi se dobili takvi rezultati bila bi mogućna daljna generalizacija rezultata dobijenih u paragrafu 5.

5. U vezi nejednakosti ČEBIŠEVA i THUNSDORFFA mogućne generalizacije su u pravcu uvođenja pojma opštije konveksnosti umesto konveksnosti reda k.

9. BIBLIOGRAFIJA

ANDERSSON, B. J.

[1] *An inequality for convex functions.* Nordisk Mat. Tidskr. **6** (1958), 25—26.

BECKENBACH, E. F. and R. BELLMAN,

[1] *Inequalities.* Berlin-Heidelberg-New York, 1965.

BIERNACKI, M.

[1] *Sur une inégalité entre les intégrales due à Tchébyscheff,* Ann. Univ. Mariae Curie--Sklodowska, Sect. A **5** (1951), 23—29.

BULLEN, P. S., P. M. VASIĆ and LJ. STANKOVIĆ,

[1] *A problem of A. Oppenheim.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412** — № **460** (1973), 21—30.

BURKILL, J. C.

[1] *The concavity of discrepancies in inequalities of the means and of Hölder.* J. London Math. Soc. (**2**) **7** (1974), 617—626.

CROFT, H. T.

[1] *Review* 7001. Math. Reviews **45** (1973).

ЧЕБИШЕВ, П. Л.

[1] *Полное Собрание Сочинений,* том **3**. Москва-Ленинград 1948, стр. 128—131.

DUNKEL, O.

[1] *Integral inequalities with applications to the calculus of variations.* Amer. Math. Monthly **31** (1924), 326—337.

FAVARD, M. J.

[1] *Sur les valeurs moyennes.* Bull. Sci. Math. (**2**) **57** (1933), 54—64.

FUCHS, L.

[1] *A new proof of an inequality of Hardy-Littlewood-Pólya.* Mat. Tidsskr. **B** 1947, 53—54.

FUJIWARA, M.

[1] *Ein von Brunn vermuteter Satz über konvexe Flächen und eine Verallgemeinerung der Schwarzschen und der Tschebyscheffschen Ungleichungen für bestimmte Integrale.* Tôhoku Math. J. **13** (1918), 228—235.

GALVANI, L.

[1] *Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in a aggregate qualunque.* Rend. Circ. Mat. Palermo **41** (1916), 103—134.

GIACCARDI, F.

[1] *Su alcune disuguaglianze.* Giorn. Mat. Finanz. **1** (**4**) (1955), 139—153.

GODUNOVA, E. K. i V. I. LEVIN,

[1] *Ob odnom neravenstve Oppenheima.* Sib. Mat. Žurn. **11** (1970), 1174—1177.

Hardy, G. H., J. E. Littlewood and G. Pólya,
[1] *Inequalities.* Cambridge 1952.
[2] *Some simple inequalities satisfied by convex functions.* Messenger Math. **58** (1928/29), 145—152.

Kečkić, J. D. and I. B. Lacković,
[1] *Generalization of some inequalities of P. M. Vasić.* Mat. Vesnik 7 (**22**) (1970), 74—78.

Labutin, D. N.
[1] *On inequalities* (na ruskom). Pyatigorsk, Sb. Nauč. Trudov Ped. Inta. **1** (1947), 188—196.

Levinson, N.
[1] *Generalization of an inequality of Ky Fan.* J. Math. Anal. Appl. **8** (1964), 133—134.

Lim, V. K.
[1] *A note on an inequality.* Nanta Math. № **1**, **5** (1971), 38—40.

Mitrinović, D. S. (in cooperation with P. M. Vasić),
[1] *Analytic Inequalities.* Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

Mitrinović, D. S. i P. M. Vasić,
[1] *Sredine.* Matematička biblioteka, sv. 40, Beograd, 1969.
[2] *History, variations and generalisations of the Čebyšev inequality and the questions of some priorities.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **461**—№ **497** (1974), 1—30.

Nanson, E. J.
[1] *An inequality.* Mess. Math. **34** (1904), 89—90.

Oppenheim, A.
[1] *On inequalities connecting arithmetic means and geometric means of two sets of three positive numbers.* Math. Gaz. **49** (1965), 160—162.
[2] *On inequalities connecting arithmetic and geometric means of two sets of three positive numbers*, II. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **210**—№ **228** (1968), 21—24.

Ovčarenko, I. E.
[1] *O treh tipah vypuklosti.* Zap. Meh.-mat. fak. Har'kov Gos. Univ. IV. **30** (1964), 106—113.

Petrović, M.
[1] *Sur une fonctionnelle.* Publ. Math. Univ. Beograd **1** (1932), 149—156.

Pólya, G.
[1] *Remark on Weyl's note „Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation".* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **36** (1950), 49—51.

Popoviciu, T.
[1] *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur*, III. Mathematica (Cluj) **16** (1940), 74—86.
[2] *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur*, IV. Disquisitiones Mathematicae **1** (1940), 163—171.
[3] *Les fonctions convexes.* Actualités Sci. Ind. № **992**, Paris 1945.
[4] *Sur certaines inégalités qui caractérisent les fonctions convexes.* An. Sti. Univ. Al. I Cuza Iasi Sect. Ia Mat. (N. S.) **11 B** (1965), 155—164.

Sasser, D. W. and M. L. Slater,
[1] *On the inequality $\Sigma x_i y_i > (1/n) \Sigma x_i \Sigma y_i$ and the van der Waerden permanent conjecture.* J. Comb. Theory **3** (1967), 25—33.

STANKOVIĆ, LJ. R.

[1] *On an inequality for convex functions of order k.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **461** — № **497** (1974), 47—50.

[2] *Extension of Thunsdorff's inequality to the case of convex function of order k.* Ibid. № **498**—№ **541** (1975), 145—148.

STANKOVIĆ, LJ. R. and I. B. LACKOVIĆ,

[1] *Some remarks on the paper „A note on an inequality" of V. K. Lim.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser Mat. Fiz. № **461**—№ **497** (1974), 51—54.

THUNSDORFF, H.

[1] *Konvexe Funktionen und Ungleichungen.* Göttingen 1932, 40 pp. (Diss).

TOMIĆ, M.

[1] *Gausov stav o težištu i njegova primena.* Bul. Soc. Math. Phys. Serbie **1**, № 1 (1949), 31—40.

VALIRON, G.

[1] *Fonctions convexes et fonctions entières.* Bull. Soc. Math. France **60** (1932), 278—287.

VASIĆ, P. M.

[1] *On inequalities connecting arithmetic means and geometric means of two sets of n positive numbers.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **381**—№ **409** (1972), 63—66.

[2] *On an inequality for convex functions.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **381**—№ **409** (1972), 67—70.

VASIĆ, P. M. et D. D. ADAMOVIĆ,

[1] *Sur un système infini d'inégalités des fonctionnelles.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **9** (**23**) (1969), 107—114.

VASIĆ, P. M. and R. R. JANIĆ,

[1] *On an inequality of N. Levinson.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **10** (**24**) (1970), 155—157.

VASIĆ, P. M. and J. D. KEČKIĆ,

[1] *A generalisation of the concept of convexity.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **11** (**25**) (1971), 53—56.

VASIĆ, P. M. and LJ. R. STANKOVIĆ,

[1] *On some inequalities for convex and g-convex functions.* Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **412**—№ **460** (1973), 11—16.

[2] *Some inequalities for convex functions.* (predato za štampu).

SUMMARY

This paper contains the following chapters:

1. Introduction.

2. The second chapter gives a generalization of some results of OPPENHEIM. Namely, OPPENHEIM proposed the following problem: Let us have two sets of positive numbers $a_1, \ldots, a_n$ and $c_1, \ldots, c_n$. If the arithmetic mean of numbers $c_1, \ldots, c_n$ is at least equal to that of the numbers $a_1, \ldots, a_n$, when can we say non trivially that the geometric mean of the numbers $c_1, \ldots, c_n$ is at least equal to that of the numbers $a_1, \ldots, a_n$? He gave the answer to that question for $n=3$ (see Theorems I and II p. 4 of this paper). An extension to general n was given a little later by E. K. GODUNOVA and V. I. LEVIN [1] (Theorems 1 and 2 p. 5). Another extension to arbitrary n was given by P. M. VASIĆ [1] (Theorems III and IV pp. 4—5).

A natural extension of OPPENHEIM's problem quoted above is to replace arithmetic and geometric means by more general means. OPPENHEIM did not ask this question although some of his results give partial answers to this more general problem; more surprising is the fact that the question was not raised as their general theorem can be used to answer part of this problem.

In this chapter we consider the following problem: if it is known that the s-th power means of (a), (b) are in a certain order when can we deduce that the same order holds between their t-th power means?

Then a number of more general results were proved, one of which has as a consequence:

Let (a), (b) be two n-tples of positive numbers satisfying (H) and (p) another n-tple of positive numbers. If $-\infty<s<+\infty$ then:

(i) if

$$M_n^{[s]}(b; p) \geqq M_n^{[s]}(a; p)$$

and if $t<s$, then

$$M_n^{[t]}(b; p) \geqq M_n^{[t]}(a; p);$$

(ii) if

$$M_n^{[s]}(a; p) \geqq M_n^{[s]}(b; p)$$

and if $t>s$, then

$$M_n^{[t]}(a; p) \geqq M_n^{[t]}(b; p).$$

(See Corollary 5, p. 8 of this paper.)

This result is a direct generalization of OPPENHEIM's problem.

3. In a recently published paper J. C. BURKILL [1] has proved a number of inequalities which hold for the real numbers.

The third chapter first shows how all main results of J. C. BURKILL may be obtained from a theorem proved by the same author in the mentioned paper (Theorem A, p. 13 of this paper).

Then it was proved that this theorem also holds under considerably weaker conditions (without the assumption that the function of interest is twice differentiable). After that there was given a generalization of the mentioned theorem (Theorem 2, p. 15 of this paper).

4. This chapter first investigates some results by V. K. LIM **[1]**, who proved theorems A and B (p. 20 of this paper). H. T. CROFT **[1]** noticed that the conclusion (ii) of Theorem B was not correct for an arbitrary real number s.

This chapter also precises the conditions under which the inequalities from Theorems A and B hold, and then it was shown how this result may be obtained in a simple way, from the majorization theorem which holds for convex functions (see D. S. MITRINOVIĆ **[1]** p. 164).

5. P. M. VASIĆ and J. D. KEČKIĆ have introduced the idea of g-convex functions which comprises more types of previously observed types of convexity (classical convexity, convexity in the sense of VALIRON **[1]**, convexity in the sense of OVČARENKO **[1]**, etc.).

In this chapter, starting with the idea of g-convex functions, we prove Theorem 1 (p. 24 of this paper) which, as a special case, includes the results by F. GIACCARDI **[1]** and M. PETROVIĆ **[1]**.

This chapter also includes another generalization in another sense of the classical inequality by M. PETROVIĆ **[1]**, that is; in the sense of superadditivity of a term which, in the limiting case, gives the result of M. PETROVIĆ.

In addition to other results, this chapter gives a generalization of inequalities of P. M. VASIĆ and R. R. JANIĆ **[1]**, which represents the inversion of the known LEVINSON'S result **[1]** (see D. S. MITRINOVIĆ **[1]** p. 363).

6. The sixth chapter gives an improvement of ČEBYŠEV'S inequality by introducing certain restrictions on the function f_1. Thus, FARAD **[1]** (see also ANDERSSON **[1]**) introducing the condition of convexity, obtained stricter inequality than ČEBYŠEV'S. Later, P. M. VASIĆ gave the generalization of this inequality.

This chapter shows that increasing the order of convexity (see Theorem 3, p. 30) one obtains better and better inequality, that is, that $M_k > M_{k-1}$ (see p. 34 of this paper) where k denotes the order of convexity.

7. In the seventh chapter, starting with the r-th order weighted mean of function f, which is known to be a nondecreasing function of r, i.e. that

$$M^{[r]}(f, p, a, b) < M^{[s]}(f, p, a, b) \qquad (r < s) \tag{1}$$

introducing additional restrictions, we prove that this inequality may be improved.

THUNSDORFF has given an improvement of inequality (1) when f is a non-negative convex function, for the case $p=1$, $a=0$, $b=1$ and $f(0)=0$.

This paper proves that inequality (1) may be improved for an arbitrary p, a, b (see Theorem 1, p. 36, of this paper). The second improvement of inequality (1) was obtained by increasing the order of convexity (see Theorem 2, p. 37, of this paper).

8. The eighth chapter points out some problems which may of use in obtain in further improvements of the results from this thesis.

9. Finally, literature at the end of this thesis is given in alphabetical order.

S A D R Ž A J