PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 412 — № 460 (1973)

446. QUELQUES CONSÉQUENCES D'UNE INÉGALITÉ D'OSTROWSKI*

Živko Madevski

Nous appellerons *suite* toute suite finie de nombres réels.

1. Dans le livre [*AI*] on trouve les résultats suivants: 1° Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux suites non proportionnelles; pour toute suite $(x_1, \ldots, x_n)$, avec

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1, \tag{1}$$

on a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2}; \tag{2}$$

c'est l'inégalité d'OSTROWSKI (*AI*; 2.12; T.1).

2° Soit

$$\alpha_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^r, \tag{3}$$

où $(y_1, \ldots, y_n)$ est une suite avec

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = n. \tag{4}$$

On a (*AI*; 3.9.18):

$$\alpha_4 \geqq \alpha_3^2 + 1, \tag{5}$$

$$\alpha_3 \leqq \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}, \tag{6}$$

$$\alpha_4 \leqq n - 2 + \frac{1}{n-1}, \tag{7}$$

$$\alpha_{2r} \geqq \alpha_{r+1}^2 + \alpha_r^2. \tag{8}$$

---

* Présenté le 25 juin 1973 par D. S. MITRINOVIĆ.

Notons que l'existence d'un rapport entre les résultats 1° et 2° est bien évidente; par exemple, si $a_i=1$, $b_i=\frac{1}{n}y_i$, $x_i=y_i$ $(1\leqq i\leqq n)$, alors les conditions (1) se ramènent à celles de (4). Pour en profiter, nous allons généraliser, en un certain sens, l'inégalité (2).

2. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une suite soumise aux conditions (1); on forme la suite $(y_{1\ldots 1}, \ldots, y_{n\ldots n})$ de n^m nombres réels tels que

$$y_{i_1\ldots i_m}=x_{i_1}\cdots x_{i_m} \qquad (1\leqq i_1, \ldots, i_m\leqq n).$$

Si l'on pose $a_{i_1\ldots i_m}=a_{i_1}\cdots a_{i_m}$, $b_{i_1\ldots i_m}=b_{i_1}\cdots b_{i_m}$, alors

$$\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}a_{i_1\ldots i_m}y_{i_1\ldots i_m}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\right)^m=0,$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}b_{i_1\ldots i_m}y_{i_1\ldots i_m}=\left(\sum_{i=1}^{n}b_i x_i\right)^m=1;$$

il en résulte que la suite $(y_{1\ldots 1}, \ldots, y_{n\ldots n})$, elle aussi, remplit les conditions (1), et on tire de (2) l'inégalité suivante:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^m\geqq\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^m}{\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^m\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^m-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^{2m}} \qquad (m\in\mathbf{N}). \tag{9}$$

3. Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une suite satisfaisant aux conditions (4). On forme la suite $(x_1, \ldots, x_n)$ telle que

1° $x_1=\cdots=x_n=1$; si $a_i=y_i$, $b_i=\frac{1}{n}y_i^2$ $(1\leqq i\leqq n)$, alors il est facile de voir que (1) sont vérifiées et dans ce cas (9) implique

$$\alpha_4^m\geqq\alpha_3^{2m}+1; \tag{10}$$

pour $m=1$ on a (5).

2° $x_1=\cdots x_n=1$; si $a_i=y_i$, $b_i=\frac{1}{n}(y_i^2+\lambda y_i)$ $(1\leqq i\leqq n)$, λ nombre réel, alors les conditions (1) sont satisfaites, et on tire de (9)

$$(\alpha_4+2\lambda\alpha_3+\lambda^2)^m\geqq(\alpha_3+\lambda)^{2m}+1; \tag{11}$$

pour $m=1$ on a (5).

3° $x_i=y_i$ $(1\leqq i\leqq n)$; si $a_i=1$, $b_1=\frac{1}{2n}\left(y_i+\frac{1}{y_i}+\lambda\right)$, $y_i\neq 0$ $(1\leqq i\leqq n)$, λ nombre réel, alors les conditions (1) sont satisfaites, et dans ce cas (9) entraîne

$$(\alpha_{-2}+2\lambda\alpha_{-1}+\lambda^2+3)^m\geqq(\alpha_{-1}+\lambda)^{2m}+4^m; \tag{12}$$

pour $m=1$ on a $\alpha_{-2}\geqq\alpha_{-1}^2+1$ (v. *AI*, p. 340).

4° $x_i = y_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$; si $a_i = 1$, $b_i = \frac{1}{ny_i}$, $y_i \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq n)$, alors on vérifie immédiatement que (1) sont satisfaites, et (9) implique

(13) $$\alpha_{-2}{}^m \geqq \alpha_{-1}{}^m + 1.$$

5° $x_1 = \cdots = x_n = 1$; si $a_i = y_i^2 + \lambda y_i - 1$, $b_i = \frac{1}{n}(1 + \mu y_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$, λ et μ nombres réels, alors les conditions (1) sont remplies, et on tire de (9)

(14) $$((1+\mu^2)^m - 1)(\alpha_4 + 2\lambda\alpha_3 + \lambda^2 - 1)^m \geqq \mu^{2m}(\alpha_3 + \lambda)^{2m};$$

pour $m = 1$ on a (5).

6° $x_1 = \cdots = x_n = 1$; si $a_i = y_i^2 + \lambda y_i - 1$, $b = \frac{1}{2n}(y_i^2 + \mu y_i + 1)$, $(1 \leqq i \leqq n)$, λ et μ nombres réels, alors (1) sons satisffaites et on tire de (9)

(15) $$(\alpha_4 + 2\lambda\alpha_3 + \lambda^2 - 1)^m ((\alpha_4 + 2\mu\alpha_3 + \mu^2 + 3)^m - 4^m) \geqq (\alpha_4 + (\lambda + \mu)\alpha_3 + \lambda\mu - 1)^{2m};$$

pour $m = 1$, $\lambda \neq \mu$ on a (5); pour $\lambda = \mu = -\alpha_3$ on a

(15') $$(\alpha_4 - \alpha_3^2 + 3)^m \geqq (\alpha_4 - \alpha_3^2 - 1)^m + 4^m;$$

pour $\lambda = \mu = 0$, vu $\alpha_4 \geqq 1$ (v. (5)), on a

(15'') $$(\alpha_4 + 3)^m \geqq (\alpha_4 - 1)^m + 4^m,$$

d'où, vu (5),

(15''') $$(\alpha_4 + 3)^m \geqq \alpha_3^{2m} + 4^m, \qquad (\text{v. } (12),\ \lambda = 0).$$

7° $x_i = y_i^p$ $(1 \leqq i \leqq n)$, p nombre réel; si $a_i = y_i^q$ $b_i = \frac{1}{n} y_i^{1+q}$ $(1 \leqq i \leqq n)$, q nombre réel et $p + q = 1$, alors les conditions (1) sont satisfaites, et on tire de (9)

(16) $$\alpha_{2p}{}^m \geqq \frac{\alpha_{2q}{}^m}{\alpha_{2q}{}^m \, \alpha_{2(q+1)}{}^m - \alpha_{2q+1}{}^{2m}}.$$

4. Pour finir nous allons indiquer une généralisation des résultats (*AI*, 3.9.18). Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une suite vérifiant les conditions (4); on forme la suite $(z_{1\ldots 1}, \ldots, z_{n\ldots n})$ de n^m nombres réels tels que

$$z_{i_1\ldots i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m} \qquad (1 \leqq i_1, \ldots, i_m \leqq n).$$

Alors, on a

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} z_{i_1\ldots i_m} = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^m = 0,$$

$$\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} z_{i_1\ldots i_m}{}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^m = n^m,$$

et, il en résulte que les sommes

$$\beta_r = \frac{1}{n^m} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} z_{i_1\ldots i_m}{}^r,$$

vérifient les inégalités (5), (6), (7) et (8), aussi bien que (10), (11), (12), (13), (14), (15) et (16).

Il est immédiat que $\beta_r = \alpha_r^m$, d'où résulte que toute suite $(y_1, \ldots, y_n)$ satisfaisant à (4) vérifie les inégalités suivantes:

1° $$\alpha_3^m \leqq \frac{n^m-2}{\sqrt{n^m-1}},$$

2° $$\alpha_4^m \leqq n^m - 2 + \frac{1}{n^m-1},$$

3° $$\alpha_{2r}^m \geqq \alpha_{r+1}^{2m} + \alpha_r^{2m},$$

4° $$(\alpha_4^{m_1} + 2\lambda\alpha_3^{m_1} + \lambda^2)^{m_2} \geqq (\alpha_3^{m_1} + \lambda)^{2m_2} + 1,$$

5° $$(\alpha_{-2}^{m_1} + 2\lambda\alpha_{-1}^{m_1} + \lambda^2 + 3)^{m_2} \geqq (\alpha_{-1}^{m_1} + \lambda)^{2m_2} + 4^{m_2},$$

6° $$(\alpha_4^{m_1} + 3)^{m_2} \geqq (\alpha_4^{m_1} - 1)^{m_2} + 4^{m_2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[*AI*] D. S. Mitrinović: *Analytic inequalities*. Berlin-Heidelberg-New York 1970.

Prirodno-matematički fakultet
91000 Skopje, Jugoslavija