PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 412 — № 460 (1973)

417. KOMPLANATION EINER FLÄCHE*

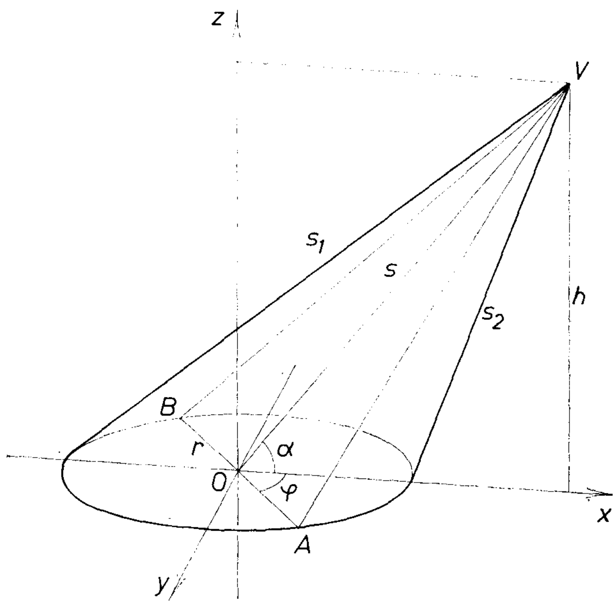
Stanimir Fempl

In jedem Achsenschnitt eines schiefen Kreiskegels kann man seinen Inkreis konstruieren. Der geometrische Ort sämtlicher Inkreise stellt eine Fläche dar, deren Gleichung man auf folgende Weise erhalten kann.

Es sei

$$x^2+y^2=r^2, \quad z=0$$

die Gleichung des Kegelgrundkreises. Das charakteristische Dreieck falle in die XOZ-Ebene, die Kegelspitze sei $V(x_0, 0, h)$. Bezeichnet man die Kegelachse mit s und den Winkel zwischen der orthogonalen Projektion einer beliebigen Mantellinie in die Kegelbasis u. X-Achse mit φ, so besitzen die Ecken A u. B der



Grundlinie des Achsenschnittes Koordinaten $A(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$, $B(-r\cos\varphi,\ -r\sin\varphi,\ 0)$ (man kann $x_0 \geqq 0$ annehmen). Es seien noch s_1 u. s_2 die grösste u. kleinste Mantellinie des Kegels.

* Received May 5, 1973.

Die Gleichung der Ebene durch die Punkte A, B, V ist

$$hx - hy\operatorname{ctg}\varphi - x_0 z = 0. \tag{1}$$

Wenn $\vec{r}(\xi, \eta, \zeta)$ den Radiusvektor des Inzentrums in ΔABV darstellt, so ist wie bekannt [1]

$$\vec{r} = \frac{a\vec{r}_1 + b\vec{r}_2 + c\vec{r}_3}{a+b+c} \qquad (\vec{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\},\ i = 1, 2, 3),$$

wo $\vec{r}_i$ resp. die Radiusvektoren der Ecken A, B, V sind, und a, b, c resp. die gegenüber liegenden Seiten:

$$\overline{BV}^2 = (x_0 + r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi + h^2 = r^2 + s^2 + 2rx_0\cos\varphi \qquad (h^2 + x_0^2 = s^2),$$

$$\overline{AV}^2 = r^2 + s^2 - 2rx_0\cos\varphi, \quad \overline{AB} = 2r.$$

Sodann sind die Koordinaten des Inkreiszentrums

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\left(\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi} - \sqrt{r^2+s^2-2rx_0\cos\varphi}\right) r\cos\varphi + 2rx_0}{2\sigma}, \\ \eta &= \frac{\left(\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi} - \sqrt{r^2+s^2-2rx_0\cos\varphi}\right) r\sin\varphi}{2\sigma}, \quad \zeta = \frac{2rh}{2\sigma}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\left(2\sigma = a + b + c = \sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi} + \sqrt{r^2+s^2-2rx_0\cos\varphi} + 2r\right).$$

Der Inkreishalbmesser ρ in ΔABV hat den Wert $2p/2\sigma$, wo

$$|2\vec{p}| = |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BV}| = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2r\cos\varphi & 2r\sin\varphi & 0 \\ x_0 + r\cos\varphi & r\sin\varphi & h \end{vmatrix} = 2r\sqrt{s^2 - x_0^2\cos^2\varphi}.$$

Die Gleichung (1) und die Gleichung $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = \rho^2$ stellen die Gleichungen des Inkreises in ΔABV dar. Bestimmt man noch den Wert $\rho^2 - |\vec{r}|^2$, so erhält man nach Rationalmachen des Nenners den Wert

$$-\frac{1}{2}\left[r^2 + s^2 - \sqrt{(r^2+s^2)^2 - 4r^2x_0^2\cos^2\varphi}\right].$$

Auf diese Weise sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2(\xi x + \eta y + \zeta z) + \frac{r^2 + s^2 - \sqrt{(r^2+s^2)^2 - 4r^2x_0^2\cos^2\varphi}}{2} &= 0, \\ hx - hy\operatorname{ctg}\varphi - x_0 z &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(ξ, η, ζ Funktionen von φ) die Parametergleichungen des gesuchten geometrischen Ortes charakterisiert.

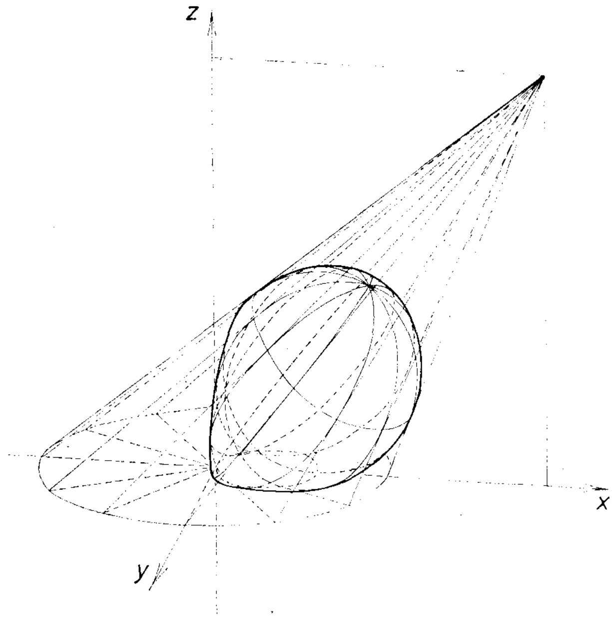
Da der geometrische Ort der Inzentren durch (2) gegeben ist, so ist es möglich die Fläche (3) auch genetisch aufzufassen: die Erzeugende der Fläche ist ein Kreis von veränderlichen Halbmesser

$$\rho = \frac{2r\sqrt{s^2 - x_0^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi} + \sqrt{r^2+s^2-2rx_0\cos\varphi} + 2r},$$

und ihre Leitlinie ist die Kurve (2). Den Winkel θ zwischen der Leitlinie und der Ebene eines beliebigen Achsenschnittes erhält man auf Grund der Formel

$$|\sin\theta| = \frac{hr\left(\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi}-\sqrt{r^2+s^2-2rx_0\cos\varphi}\right)}{\left(2r+\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi}+\sqrt{r^2+s^2-2rx_0\cos\varphi}\right)\dfrac{d\sigma_1}{d\varphi}\sqrt{s^2-x_0^2\cos^2\varphi}},$$

wo $d\sigma_1$ das Bogendifferential der Leitlinie darstellt. Der Ausdruck für $d\sigma_1/d\varphi$ besitzt eine ziemlich komplizierte Gestalt und ist hier nicht angeführt. Man bemerke nur, dass die Tangente auf die Leitlinie für $\varphi=0$ auf die Ebene des charakteristischen Dreiecks senkrecht steht, während für $\varphi=\pi/2$ die Tangente in die Ebene des zu dem charakteristischem Dreieck Normalschnitt fällt. Die Tangenten sind also für $\varphi=0$ und $\varphi=\pi/2$ parallel. Darüber kann man sich überzeugen, wenn man den Ausdruck für $d\sigma_1/d\varphi$ formiert (für $\varphi=0$ ist $d\sigma_1/d\varphi = r(s_1-s_2)/(s_1+s_2+2r)$, und für $\varphi=\pi/2$ ist $d\sigma_1/d\varphi = r^2x_0/\left(r+\sqrt{r^2+s^2}\right)\sqrt{r^2+s^2}$.



Da also Kreise die Fläche (3) erzeugen, so könnte man ihren Inhalt mittels einen einfachen Integral ausdrücken, wenn man nur als Flächenelement ein sphärisches Zweieck annimmt, dessen Winkel $d\omega$ den Neigungswinkel zwischen den Ebenen von zwei unendlich nahen Inkreisen darstellt (wäre ein solches Zweieck mit zwei gleichen Kreisen von Halbmesser ρ begrenzt, andersmal von zwei Halbmessern $\rho+d\rho$, so wäre die Flächendifferenz $2(\rho+d\rho)^2\,d\omega-2\rho^2\,d\omega$, also eine Infinitesimale von höheren Ordnung).

Die gesamte Fläche ist mit

$$M = 2\int_0^{\pi} 2\rho^2\,d\omega$$

gegeben. Der Winkel $d\omega$ ist der Winkel zwischen der Ebene (1) und der Nachbarebene

$$hx - hy \operatorname{ctg}(\varphi + d\varphi) - x_0 z = 0,$$

so dass

$$\cos d\omega = \frac{h^2 + h^2 \operatorname{ctg}\varphi \operatorname{ctg}(\varphi + d\varphi) + x_0^2}{\sqrt{(h^2 + h^2 \operatorname{ctg}^2\varphi + x_0^2)\,[h^2 + h^2 \operatorname{ctg}^2(\varphi + d\varphi) + x_0^2]}}$$

ist. Bestimmt man daraus $\sin d\omega = d\omega$, wegen $h^2 + x_0^2 = s^2$ erhält man

$$d\omega = \frac{hs\,|\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}(\varphi + d\varphi)|}{\sqrt{(s^2 + h^2 \operatorname{ctg}^2\varphi)\,[s^2 + h^2 \operatorname{ctg}^2(\varphi + d\varphi)]}}\,.$$

Da

$$\operatorname{ctg}(\varphi + d\varphi) = \operatorname{ctg}\varphi - \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} + o\,(d\varphi)$$

ist, so erhält man

$$d\omega = \frac{hs\,d\varphi}{s^2 \sin^2\varphi + h^2 \cos^2\varphi} = \frac{hs}{s^2 - x_0^2 \cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Deshalb ist

$$M = 16 r^2 hs \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{r^2 + s^2 + 2 r x_0 \cos\varphi} + \sqrt{r^2 + s^2 - 2 r x_0 \cos\varphi} + 2r)^2}\,.$$

Nach Rationalmachen des Nenners bekommt man für die Funktion unter dem Integralzeichen den Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{1}{8 r^2 (s^2 - x_0^2 \cos^2\varphi)^2} \{ & 2 r^4 + r^2 s^2 + s^4 - x_0^2 (5 r^2 - s^2) \cos^2\varphi \\ & + (2 r^2 - s^2 - x_0^2 \cos^2\varphi) \sqrt{(r^2 + s^2)^2 - 4 r^2 x_0^2 \cos^2\varphi} \\ & - 2\,[r^3 - r x_0^2 \cos^2\varphi - x_0 (r^2 - s^2) \cos\varphi] \sqrt{r^2 + s^2 + 2 r x_0 \cos\varphi} \\ & - 2\,[r^3 - r x_0^2 \cos^2\varphi + x_0 (r^2 - s^2) \cos\varphi] \sqrt{r^2 + s^2 - 2 r x_0 \cos\varphi} \}.\end{aligned}$$

Auf diese Weise, kann man schreiben

$$M = 2 hs (J_1 + J_2 + J_3 + J_4),$$

$$J_1 = \int_0^{\pi} \frac{2 r^4 + r^2 s^2 + s^4 - x_0^2 (5 r^2 - s^2) \cos^2\varphi}{(s^2 - x_0^2 \cos^2\varphi)^2}\,d\varphi,$$

$$J_2 = -2 \int_0^{\pi} \frac{r^3 - x_0 (r^2 - s^2) \cos\varphi - r x_0^2 \cos^2\varphi}{(s^2 - x_0^2 \cos^2\varphi)^2} \sqrt{r^2 + s^2 + 2 r x_0 \cos\varphi}\,d\varphi,$$

$$J_3 = -2 \int_0^{\pi} \frac{r^3 + x_0 (r^2 - s^2) \cos\varphi - r x_0^2 \cos^2\varphi}{(s^2 - x_0^2 \cos^2\varphi)^2} \sqrt{r^2 + s^2 - 2 r x_0 \cos\varphi}\,d\varphi,$$

$$J_4 = \int_0^{\pi} \frac{2 r^2 - s^2 - x_0^2 \cos^2\varphi}{(s^2 - x_0^2 \cos^2\varphi)^2} \sqrt{(r^2 + s^2)^2 - 4 r^2 x_0^2 \cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Das erste und das vierte Integral kann man auf Integrale mit den Grenzen $(0, \pi/2)$ zurückführen. Ausserdem, das erste Integral ist elementär und man erhält ($\operatorname{tg}\varphi = u$)

$$J_1 = \frac{\pi}{h^3 s^3}[s^2(r^2-s^2)^2 + h^2 r^2 (r^2+3s^2)]. \tag{4}$$

Das dritte Integral reduziert sich auf das zweite, wenn man φ mit $\pi-\varphi$ vertauscht. Es wird sodann

$$\frac{M}{2hs} = \frac{\pi}{h^3 s^3}[s^2(r^2-s^2)^2 + h^2 r^2(r^2+3s^2)] \tag{5}$$

$$-4\int_0^\pi \frac{r^3 - x_0(r^2-s^2)\cos\varphi - r x_0^2\cos^2\varphi}{(s^2-x_0^2\cos^2\varphi)^2}\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2r^2-s^2-x_0^2\cos^2\varphi}{(s^2-x_0^2\cos^2\varphi)^2}\sqrt{(r^2+s^2)^2-4r^2x_0^2\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite in (5) ist ein elliptisches Integral. Es lässt sich auf die Normalformen auf folgende Weise reduzieren. Zuerst erweitert man den Bruch im Integranden mit $(r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi)^{1/2}$. Es folgt

$$J = \frac{4}{x_0^4}\int_0^\pi \frac{2r^2x_0^3\cos^3\varphi + rx_0^2(3r^2-s^2)\cos^2\varphi - x_0(r^4+s^4)\cos\varphi - r^3(r^2+s^2)}{\left(\cos^2\varphi - \dfrac{s^2}{x_0^2}\right)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi}}. \tag{6}$$

Nachdem zerlegt man die rationale Funktion im Integranden in Partialbrüche von der Form $M_1/(\cos\varphi - s/x_0)^2 + N_1/(\cos\varphi - s/x_0) + P_1/(\cos\varphi + s/x_0)^2 + Q_1/(\cos\varphi + s/x_0)$. Hier ist

$$M_1 = -\frac{x_0^2(s^2-r^2)^2(s+r)}{4s^2}, \qquad N_1 = \frac{rx_0^3(s+r)}{4s^3}(r^3-r^2s+5rs^2-s^3),$$

$$P_1 = \frac{x_0^2(s^2-r^2)^2(s-r)}{4s^2}, \qquad Q_1 = \frac{rx_0^3(s-r)}{4s^3}(r^3+r^2s+5rs^2+s^3).$$

Die erste zwei Integrale in J berechnen sich auf Grund der Substitution

$$\cos\varphi = 1 - 2\,\mathrm{sn}^2 u.$$

Wegen

$$\sin\varphi = \sqrt{1-(1-2\,\mathrm{sn}^2u)^2} = 2\,\mathrm{sn}\,u\sqrt{1-\mathrm{sn}^2u} = 2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u$$

ist

$$d\varphi = \frac{4\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}du = 2\,\mathrm{dn}\,u\,du$$

und $(r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi)^{1/2} = (r^2+s^2+2rx_0-4rx_0\,\mathrm{sn}^2u)^{1/2}$. Wegen $s_1^2 = r^2+s^2+2rx_0$ $(\varphi=0)$, $s_2^2 = r^2+s^2-2rx_0$ $(\varphi=\pi)$ ist $4rx_0 = s_1^2 - s_2^2$, und es wird

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi}} = \frac{2\,\mathrm{dn}\,u}{s_1\sqrt{1-\dfrac{4rx_0}{s_1^2}\mathrm{sn}^2u}}du.$$

Die Grösse

(7) $$k^2 = \frac{4rx_0}{s_1^2}$$

ist nicht grösser als 1, und man kann sie als Quadrat des Moduls der elliptischen Funktion $\operatorname{sn} u$ auffassen $(\operatorname{sn} u = \sin am\,(u, k))$. Da $\sqrt{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dn} u$ [2] ist, so wird

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{r^2+s^2+2rx_0\cos\varphi}} = \frac{2}{s_1}\,du.$$

Es ist noch

$$\cos\varphi - \frac{s}{x_0} = -\frac{s-x_0}{x_0}\left(1+\frac{2x_0}{s-x_0}\operatorname{sn}^2 u\right), \quad \cos\varphi + \frac{s}{x_0} = \frac{s+x_0}{x_0}\left(1-\frac{2x_0}{s+x_0}\operatorname{sn}^2 u\right).$$

Auf Grund dessen nimmt J die Gestalt

(8) $$J = M\int_0^K \frac{du}{(1-\alpha_1^2\operatorname{sn}^2 u)^2} + N\int_0^K \frac{du}{1-\alpha_1^2\operatorname{sn}^2 u} + P\int_0^K \frac{du}{(1-\alpha_2^2\operatorname{sn}^2 u)^2} + Q\int_0^K \frac{du}{1-\alpha_2^2\operatorname{sn}^2 u},$$

an, wo

$$M = -\frac{2(s^2-r^2)^2(s+r)}{s_1 s^2 (s-x_0)^2}, \quad N = -\frac{2r(r^4+4r^2s^2+4rs^3-s^4)}{s_1 s^3 (s-x_0)},$$

$$P = \frac{2(s^2-r^2)^2(s-r)}{s_1 s^2 (s+x_0)^2}, \quad Q = -\frac{2r(r^4+4r^2s^2-4rs^3-s^4)}{s_1 s^3 (s+x_0)}$$

und

(9) $$\alpha_1^2 = -\frac{2x_0}{s-x_0} \quad (0 \leqq -\alpha_1^2 < +\infty), \quad \alpha_2^2 = \frac{2x_0}{s+x_0} \quad (k^2 \leqq \alpha_2^2 \leqq 1)$$

(für $\varphi = 0$ folgt $\operatorname{sn}^2 u = 0$ d. h. $u = 0$, während für $\varphi = \pi$ folgt $\operatorname{sn}^2 u = 1$ d. h. $u = K$, wo K ein vollständiges elliptisches LEGENDREsches Normalintegral I Gattung ist; es sind also 0 u. K die Grenzen für die Integrale in (8)). In den BYRD-FRIEDMANschen Tafeln für elliptische Integrale [3, Formel 410.07] findet man

(10) $$\int_0^K \frac{du}{(1-\alpha_1^2\operatorname{sn}^2 u)^2} = \frac{1}{2(\alpha_1^2-1)(k^2-\alpha_1^2)}\left[\alpha_1^2 E + \frac{2k^4\alpha_1^2 - 2k^4 + \alpha_1^4 k'^2}{k^2-\alpha_1^2} K \right.$$
$$\left. - \frac{\pi(2\alpha_1^2k^2 + 2\alpha_1^2 - \alpha_1^4 - 3k^2)\alpha_1^2}{2\sqrt{\alpha_1^2(1-\alpha_1^2)(\alpha_1^2-k^2)}} \cdot \Lambda_0(\psi, k)\right].$$

Hier ist E das vollständige elliptische Normalintegral II Gattung (Modul k), und $\Lambda_0(\psi, k)$ ist die HEUMANsche Λ_0-Funktion [4]. Dabei ist

(11) $$\sin\psi = \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2-k^2}} = \frac{s_1}{s+r}.$$

Die Grösse k' stellt den Komplementärmodul dem Modul k dar, d. h. es ist $k^2 + k'^2 = 1$.

Weiterhin ist [3, Formel 410.01]

$$\int_0^K \frac{du}{1-\alpha_1^2 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{k^2}{k^2-\alpha_1^2} K - \frac{\pi \alpha_1^2}{2\sqrt{\alpha_1^2 (1-\alpha_1^2)(\alpha_1^2-k^2)}} \Lambda_0 (\psi, k). \tag{12}$$

Wenn man jetzt in (10) u. (12) die Werte aus (7) u. (9) einträgt, so folgt

$$\frac{s-x_0}{2(s+x_0)(r+s)^2}\left[s_1^2 E - \frac{r^4-6r^2 s^2+4r^2 x_0^2+s^4}{(r+s)^2} K + \frac{s_1 \pi (r^2 s+3rs^2-rx_0^2+s^3)}{h(r+s)} \Lambda_0 (\psi, k)\right]$$

bzw.

$$\frac{2r(s-x_0)}{(r+s)^2} K + \frac{s_1 \pi (s-x_0)}{2h(r+s)} \Lambda_0 (\psi, k),$$

und wenn man diese Werte noch mit M bzw. N multipliziert, so erhält man die Summe Ω_1 der zwei ersten Glieder in (8). Es ist

$$\Omega_1 = -\frac{s_1 (s-r)^2 (s+r)}{h^2 s^2} E + \frac{r^6 s - 2r^5 (3s^2-2x_0^2) - r^4 s^3 - 4r^3 s^2 (2s^2-3x_0^2) - r^2 s^5 - 2rs^6 + s^7}{h^2 s_1 s^3 (r+s)} K$$
$$- \frac{r^4 (2s^2-x_0^2) + r^2 s^2 (s^2-3x_0^2) + s^6}{h^3 s^3} \pi \Lambda_0 (\psi, k).$$

Für die Integrale in denen der Parameter α_2 erscheint, entsprechen die Formeln [3, F. 413.07]

$$\int_0^K \frac{du}{(1-\alpha_2^2 \operatorname{sn}^2 u)^2} = \frac{1}{2(1-\alpha_2^2)(\alpha_2^2-k^2)}\Big[\alpha_2^2 E + (k^2-\alpha_2^2) K$$
$$+ \frac{\pi \alpha_2 (2\alpha_2^2 + 2\alpha_2^2 k^2 - 3k^2 - \alpha_2^4)}{2\sqrt{(1-\alpha_2^2)(\alpha_2^2-k^2)}} \Lambda_0 (\xi, k)\Big] \tag{13}$$

und [3, F. 413.01]

$$\int_0^K \frac{du}{1-\alpha_2^2 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\alpha_2 \pi}{2\sqrt{(\alpha_2^2-k^2)(1-\alpha_2^2)}} \Lambda_0 (\xi, k). \tag{14}$$

wo

$$\sin \xi = \sqrt{\frac{\alpha_2^2-k^2}{\alpha_2^2 k'^2}} = \frac{|s-r|}{s_2}. \tag{15}$$

Trägt man hier die Werte für α_2 und k ein, so folgt nach Multiplizierung mit resp. P u. Q und Addierung

$$\Omega_2 = \frac{s_1 (s+r)^2 (s-r)}{h^2 s^2} E - \frac{(s^2-r^2)^2 (s-r)}{h^2 s^2 s_1} K$$
$$+ \frac{r^4 (2s^2-x_0^2) + r^2 s^2 (s^2-3x_0^2) + s^6}{h^3 s^3} \pi \Lambda_0 (\xi, k) \operatorname{sgn} (s-r).$$

Auf Grund dessen, wegen $J = \Omega_1 + \Omega_2$ erhält man den Wert für J:

$$J = \frac{2r[r^5 s - r^4 (3s^2-2x_0^2) - 2r^3 s^3 - 2r^2 s^2 (2s^2-3x_0^2) + rs^5 - s^6]}{h^2 s_1 s^3 (s+r)} K + \frac{2rs_1 (s^2-r^2)}{h^2 s^2} E$$
$$- \frac{r^4 (2s^2-x_0^2) + r^2 s^2 (s^2-3x_0^2) + s^6}{h^3 s^3} \pi [\Lambda_0 (\psi, k) - \Lambda_0 (\xi, k) \operatorname{sgn} (s-r)]. \tag{16}$$

Für die HEUMANfunktion ist es möglich, das Additionstheorem [3]

$$\Lambda_0(\psi, k) \pm \Lambda_0(\xi, k) = \Lambda_0(\varphi, k) \pm \frac{2}{\pi} k'^2 K \sin\psi \sin\xi \sin\varphi$$

anzuwenden. Die Grössen ψ, ξ und φ müssen dabei der Gleichung

$$\cos\varphi = \cos\psi\cos\xi \mp \sin\psi\sin\xi\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}$$

genügen. Für $\operatorname{sgn}(s-r) = -1$ übergeht die Subtraktionsformel in die Additionsformel. Dann aber ist $\sin\xi = -(s-r)/s_2$, so dass man wieder die Formel

$$\Lambda_0(\psi, k) - \Lambda_0(\xi, k)\operatorname{sgn}(s-r) = \Lambda_0(\varphi, k) - \frac{2}{\pi} k'^2 K \sin\psi\sin\xi\sin\varphi \tag{17}$$

unter der Bedingung

$$\cos\varphi = \cos\psi\cos\xi + \sin\psi\sin\xi\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi} \tag{18}$$

anwenden kann.

Aus der letzten Gleichung ist es notwendig die Grösse $\sin\varphi$ und danach φ selbst zu bestimmen. Wenn man in ihr die Werte für ψ u. ξ aus (11) u. aus (15) einträgt, so erhält man

$$s_2(r+s)\cos\varphi = 2r(s-x_0) + (s-r)\sqrt{4rx_0 + s_2^2\cos^2\varphi}.$$

Von den zwei Lösungen dieser Gleichung befriedigt nur der Wert

$$\cos\varphi = \frac{s^2 - rx_0}{ss_2} \quad \left(\sin\varphi = \frac{rh}{ss_2}\right)$$

die Gleichung (18), weshalb

$$\Lambda_0(\psi, k) - \Lambda_0(\xi, k)\operatorname{sgn}(s-r) = \Lambda_0(\varphi, k) - \frac{2rh(s-r)}{\pi ss_1(s+r)} K$$

wird. Auf Grund dessen wird (16)

$$\begin{gathered} J = \frac{2rs_1(s^2-r^2)}{h^2s^2} E - \frac{2r^3(r^2+3s^2)}{s^4s_1} K - \frac{r^4(2s^2-x_0^2) + r^2s^2(s^2-3x_0^2) + s^6}{h^3s^3} \pi\Lambda_0(\varphi, k), \\ \sin\varphi = hr/ss_2. \end{gathered} \tag{19}$$

Endlich, für

$$J_4 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2r^2 - s^2 - x_0^2\cos^2\varphi}{(s^2 - x_0^2\cos^2\varphi)^2} \sqrt{(r^2+s^2)^2 - 4r^2x_0^2\cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

wenn man noch φ mit $(\pi/2)-\varphi$ vertauscht, erhält man

$$J_4 = \frac{2(2r^2-s^2)(r^2+s^2)}{s^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - \frac{x_0^2\sin^2\varphi}{2r^2-s^2}\right)\left[1 - \frac{4r^2x_0^2\sin^2\varphi}{(r^2+s^2)^2}\right]}{\left(1 - \frac{x_0^2}{s^2}\sin^2\varphi\right)^2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^{*2}\sin^2\varphi}},$$

wo

$$k^{*2} = \frac{4r^2 x_0^2}{(r^2+s^2)^2} \tag{20}$$

ist. Wenn man im Folgenden die elliptische Integrale die den Modul k^* erhalten asterisiert, so bekommt man nach Partialbruchzerlegung der Rationalfunktion im Integranden

$$\frac{J_4(r^2+s^2)}{8r^2} = K^* - \frac{(s^2-r^2)^3}{2r^2s^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1-\frac{x_0^2}{s^2}\sin^2\varphi\right)^2 \sqrt{1-k^{*2}\sin^2\varphi}}$$

$$- \frac{(9r^2-s^2)(s^2-r^2)}{4r^2s^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1-\frac{x_0^2}{s^2}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-k^{*2}\sin^2\varphi}}.$$

Man setze jetzt

$$\alpha^2 = \frac{x_0^2}{s^2} \qquad (k^{*2} \leqq \alpha^2 \leqq 1) \tag{21}$$

und

$$\sin\varphi = \operatorname{sn} u, \quad \text{also} \quad \cos\varphi = \operatorname{cn} u,$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^{*2}\sin^2\varphi}} = \frac{\operatorname{dn} u}{\sqrt{1-k^{*2}\operatorname{sn}^2 u}}\, du = du.$$

Dann ist

$$\frac{J_4(r^2+s^2)}{8r^2} = K^* - \frac{(s^2-r^2)^3}{2r^2s^4} \int_0^{K^*} \frac{du}{(1-\alpha^2\operatorname{sn}^2 u)^2} - \frac{(9r^2-s^2)(s^2-r^2)}{4r^2s^2} \int_0^{K^*} \frac{du}{1-\alpha^2\operatorname{sn}^2 u}. \tag{22}$$

Für die Grösse α gilt Ähnliches, was für α_2 in (9) gesagt ist. Deshalb kann man die Formeln [**3**, Formeln 413.07 u. 413.01] anwenden für die Integrale in (22). Analog den Werten (13) u. (14), wenn man für k^* u. α die Werte aus (20) u. (21) einträgt, erhält man

$$J_4 = -\frac{2[r^6-3r^4s^2-r^2s^2(s^2-4x_0^2)-s^6]}{h^2s^2(r^2+s^2)} K^* - \frac{2(s^4-r^4)}{h^2s^2} E^*$$

$$- \frac{r^4(2s^2-x_0^2)+r^2s^2(s^2-3x_0^2)+s^6}{h^3s^3} \pi\Lambda_0(\xi, k^*)\operatorname{sgn}(s^2-r^2),$$

$$\sin\xi = |s^2-r^2|/s_1s_2.$$

Für $s>r$ ist $\Lambda_0(\xi, k^*)\operatorname{sgn}(s^2-r^2) = \Lambda_0(\xi, k^*)$. Für $s<r$ erhält man $-\Lambda_0(\xi, k^*)$. Die Funktion Λ_0 ist eine ungerade Funktion [3] und es ist $-\Lambda_0(\xi, k^*) = \Lambda_0(-\xi, k^*)$. Jetzt ist aber $\sin\xi = -(s^2-r^2)/s_1s_2$. In jedem Falle also kann man $\sin\xi = (s^2-r^2)/s_1s_2$ annehmen.

Da $M/2hs = J_1+J+J_4$ ist, so folgt die definitive Formel für den gesuchten Flächeninhalt:

$$M = \frac{2\pi}{h^2s^2}[s^2(s^2-r^2)+h^2r^2(r^2+3s^2)] + \frac{4rs_1(s^2-r^2)}{hs}E - \frac{4(s^4-r^4)}{hs}E^* \tag{23}$$

$$-\frac{4hr^3(r^2+3s^2)}{s_1s^3}K - \frac{4[r^6-3r^4s^2-r^2s^2(s^2-4x_0^2)-s^6]}{hs}K^*$$

$$-\frac{2\pi}{h^2s^2}[r^4(2s^2-x_0^2)+r^2s^2(s^2-3x_0^2)+s^6][\Lambda_0(\varphi, k)+\Lambda_0(\xi, k^*)],$$

wo

$$k=\frac{2\sqrt{rx_0}}{s_1},\quad k^*=\frac{2rx_0}{r^2+s^2},\quad \sin\varphi=\frac{rh}{ss_2},\quad \sin\xi=\frac{s^2-r^2}{s_1 s_2}$$

ist.

Für den Fall eines geraden Kreiskegels ist $x_0=0$ und die Fläche M reduziert sich auf eine Kugel vom Halbmesser $r\left(\sqrt{r^2+s^2}-r\right)/s$. Deshalb ist ihr Flächeninhalt

$$M=\frac{4r^2\pi\left(\sqrt{r^2+s^2}-r\right)^2}{s^2}. \tag{24}$$

Dasselbe folgt auch aus den Gleichungen (3) und (23) für $x_0=0$. Dann ist nähmlich $\xi=\eta=0$, $\zeta=r\left(\sqrt{r^2+s^2}-r\right)/s$, und die Gleichung (3) bekommt die Form $x^2+y^2+(z-\zeta)^2=0$ $(z=\zeta,\ x=0,\ y=0)$ während in (23) wird $k=k^*=0$, die elliptischen Integrale erhalten die Werte $\pi/2$, und die Funktionen Λ_0 reduzieren sich auf $\sin\varphi\left(=r/\sqrt{r^2+s^2}\right)$ bzw. $\sin\xi\left(=(s^2-r^2)/(s^2+r^2)\right)$ [5]. Für M also folgt wirklich der Wert (24).

Wie man sieht, im Ausdruck (23) für die Fläche erscheinen nichtelementäre Transzendenten, und nur für den Fall eines geraden Kegels, drückt sich der Flächeninhalt elementär aus. Dass kommt daher, weil sich die elliptische Integrale nur für die Modulwerte 0 and 1 auf Elementärwerte $\pi/2$ reduzieren $(\Lambda_0(\beta,0)=\sin\beta,\ \Lambda_0(\beta,1)=2\beta/\pi)$. Aber k und k^* werden 0 nur für $x_0=0$, während sie den Wert 1 erhalten für $s_2=0$ oder $h=0$, was nicht in Betracht kommt, da der Kegel zu einer ebenen Figur degeneriert. Indessen ist es dennoch möglich, dass in der Formel (23) einzelne Glieder fehlen können, so dass ein solcher Ausdruck einfacher wird. Das letzte Glied in (23) kann nie fehlen, weil für $r^4(2s^2-x_0^2)+r^2s^2(s^2-3x_0^2)+s^6=0$ der Wert $x_0^2=s^2(2r^4+r^2s^2+s^4)/r^2(r^2+3s^2)$ folgt, und dieser Wert ist grösser als s^2, was wegen $x_0<s$ unmöglich ist. Der Koeffizient von K^* kann indessen für $s<r$ verschwinden. Ferner, für

$$x_0=2rs^2/(r^2+s^2)$$

ist

$$\sin\xi=\frac{s^2-r^2}{\sqrt{(r^2+s^2)^2-4r^2x_0^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^*}}.$$

Für einen solchen Wert von ξ ist [3, Formel 151.01]

$$\Lambda_0(\xi,k^*)=\frac{1}{2}+\frac{s_2^2}{\pi(r^2+s^2)}K^*$$

und der Ausdruck (23) wird einfacher. Der Wert von M selbst, ist hier nicht berechnet, da er kein besonderes Interesse bietet.

Ein interessanter Fall ist aber $r=s$.

Dann fallen alle Glieder, die elliptische Integrale II Gattung erhalten, ab. Da jetzt $\sin\xi=0$ ist, so wird $\Lambda_0(0,k^*)=0$ [3, F. 151.01].

In den Kegeln in welchen $r=s$ ist, sind sämtliche Achsenschnitte rechtwinkelige Dreiecke, bei denen der Durchmesser der Kegelbasis die Hypotenuse darstellt. Bezeichnet man den Winkel zwischen der Kegelachse und der Grundebene mit α, wegen $h=r\sin\alpha$, $x_0=r\cos\alpha$, $s_1=2r\cos(\alpha/2)$, $s_2=2r\sin(\alpha/2)$, erscheint die Formel für M in einfacherer Gestalt

$$M=8r^2\left\{\pi\left[1-\Lambda_0(\varphi,k)\right]-2K\sin\frac{\alpha}{2}+K^*\sin\alpha\right\},$$

$$k=\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos(\alpha/2)},\quad k^*=\cos\alpha,\quad \sin\varphi=\cos(\alpha/2).$$

LITERATUR

1. D. Mihailović: *Elementi vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru.* Matematička biblioteka № 8, Beograd, 1958.
2. D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković: *Specijalne funkcije.* Beograd 1964.
3. P. F. Byrd and M. D. Friedman: *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists.* Berlin — Göttingen — Heidelberg 1954.
4. C. Heuman: *Bidrag till teorien för sferiska pendeln.* Stokholm 1918.
5. F. Tölke: *Praktische Funktionenlehre*, III. Berlin—New York 1967.

Katedra za matematiku
Elektrotehnički fakultet
11000 Beograd, Jugoslavija