PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 412 — № 460 (1973)

412. SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE NON-LINÉAIRE*

Dragoslav S. Mitrinović et *Petar M. Vasić*

0. Introduction

Soit $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Nous allons considérer les équations fonctionnelles suivantes:

$$(0.1)\qquad nf(x_1, \ldots, x_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} C^{i-1} f(y_1, \ldots, y_n) f(y_{n+1}, \ldots, y_{2n})$$

pour $n=2$ et $n=3$.

Dans cette équation $y_1, \ldots, y_{2n}$ indique une permutation à répétitions des éléments $x_1, \ldots, x_n$, telle que chacun des éléments $x_1, \ldots, x_n$ figure dans cette permutation exactement deux fois. Par C est désigné un opérateur cyclique défini par

$$Cf(y_1, \ldots, y_n) f(y_{n+1}, \ldots, y_{2n}) = f(y_2, \ldots, y_{n+1}) f(y_{n+2}, \ldots, y_{2n}, y_1).$$

1. Le cas: $n=2$

Dans ce cas nous avons les équations fonctionnelles suivantes:

$$(1.1)\qquad 2f(x, y)^2 = f(x, y) f(y, x) + f(y, x) f(x, y) \quad (\Leftrightarrow f(x, y)^2 = f(x, y) f(y, x)),$$

$$(1.2)\qquad 2f(x, y)^2 = f(x, x) f(y, y) + f(y, y) f(x, x) \quad (\Leftrightarrow f(x, y)^2 = f(x, x) f(y, y)),$$

$$(1.3)\qquad 2f(x, y)^2 = f(x, y) f(x, y) + f(y, x) f(y, x) \quad (\Leftrightarrow f(x, y)^2 = f(y, x)^2).$$

Nous allons résoudre, premièrement, l'équation (1.1). Le second membre de cette équation est invariant par rapport à la permutation $(x, y) \to (y, x)$ et ainsi nous avons $f(x, y)^2 = f(y, x)^2$, d'où $f(x, y) = \pm f(y, x)$.

En partant de (1.1) nous inférons que $f(x, y)$ et $f(y, x)$ sont du même signe, et ainsi $f(x, y) = f(y, x)$.

Par conséquent, nous avons

Théorème 1. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (1.1) *est*

$$f(x, y) = g(x, y) + g(y, x),$$

où $g:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *est une fonction arbitraire.*

* Received January 5, 1973.

Procédons, maintenant, à la résolution de l'équation fonctionnelle (1.2). Posant $f(x, x)=F(x)$, de (1.2) nous obtenons $f(x, y)^2=F(x)F(y)$. À partir de (1.2) nous concluons que $f(x, x)$ et $f(y, y)$ sont du même signe, et ainsi nous avons

$$f(x, y)=\varepsilon(x, y)\, g(x)\, g(y), \tag{1.4}$$

où $\varepsilon:\mathbf{R}^2\to\{-1, 1\}$.

Substituant (1.4) dans (1.2), nous obtenons

$$\big(\varepsilon(x, x)\,\varepsilon(y, y)-1\big)\, g(x)^2 g(y)^2=0.$$

Soit $E\subset\mathbf{R}$ tel que $g(x)=0$ $(\forall x\in E)$, et $g(x)\neq 0$ $(\forall x\in\mathbf{R}\setminus E)$. Alors, pour tout $x, y\in\mathbf{R}\setminus E$, nous avons

$$\varepsilon(x, x)\,\varepsilon(y, y)=1.$$

Si $y\in\mathbf{R}\setminus E$ existait, de sorte que $\varepsilon(y, y)=-1$ alors $\varepsilon(x, x)=-1$ pour tout $x\in\mathbf{R}\setminus E$.

Donc le théorème suivant a lieu:

Théorème 2. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (1.2) *est*

$$f(x, y)=\varepsilon(x, y)\, g(x)\, g(y),$$

où $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *est une fonction arbitraire et* $\varepsilon:\mathbf{R}^2\to\{-1, 1\}$ *est une autre fonction arbitraire telle que pour tout* x, $\varepsilon(x, x)=-1$, *ou bien pour tout* x, $\varepsilon(x, x)=1$.

Finalement, nous allons résoudre l'équation fonctionnelle (1.3). De (1.3) nous avons $f(x, y)=\varepsilon(x, y)f(y, x)$ $(\varepsilon:\mathbf{R}^2\to\{-1, 1\})$. Ajoutant $f(x, y)$ aux deux membres de cette égalité, nous avons

$$f(x, y)=g(x, y)+\varepsilon(x, y)\, g(y, x),$$

avec $g(x, y)=\dfrac{1}{2}f(x, y)$.

Par conséquent, nous pouvons formuler le résultat suivant:

Théorème 3. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (1.3) *est*

$$f(x, y)=g(x, y)+\varepsilon(x, y)\, g(y, x),$$

où $g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ *et* $\varepsilon:\mathbf{R}^2\to\{-1, 1\}$ *sont des fonctions arbitraires telles que*

$$\varepsilon(x, y)=\varepsilon(y, x).$$

2. Le cas: $n=3$

En premier lieu nous allons résoudre l'équation fonctionnelle

$$3F(x, y)^2=F(x, x)\,F(y, x)\,\varepsilon(y, x)+F(x, y)^2\,\varepsilon(x, y)+F(y, x)\,F(x, x)\,\varepsilon(x, x) \tag{2.1}$$

où $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ est la fonction inconnue et $\varepsilon:\mathbf{R}^2\to\{-1, 1\}$ la fonction donnée.

Permutant x et y dans (2.1) nous avons

$$3F(y, x)^2 = F(y, y)\, F(x, y)\, \varepsilon(x, y) + F(y, x)^2\, \varepsilon(y, x) + F(x, y)\, F(y, y)\, \varepsilon(y, y). \tag{2.2}$$

L'élimination de $F(y, x)$ entre (2.1) et (2.2) conduit à

$$F(x, y)\left\{F(x, y)^3 - F(y, x)^2\, F(y, y)\, \frac{(\varepsilon(x, y)+1)\,(\varepsilon(y, x)+1)^2}{(3-\varepsilon(x, y))^2\,(3-\varepsilon(y, x))}\right\} = 0. \tag{2.3}$$

Si $F(a, a) = 0$ ($a \in \mathbf{R}$), alors, d'après (2.1), nous concluons que $F(a, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}$, et d'après (2.2) que $F(y, a) = 0$ pour tout $y \in R$.

Nous voyons de (2.1) que l'implication $F(y, x) = 0 \Rightarrow F(x, y) = 0$ est vraie. D'après (2.3) nous avons

$$F(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad F(x, y) = \frac{(\varepsilon(x, y)+1)^{1/3}\,(\varepsilon(y, x)+1)^{2/3}}{(3-\varepsilon(x, y))^{2/3}\,(3-\varepsilon(x, y))^{1/3}}\, H(x)^2\, H(y),$$

avec

$$H(x) = \sqrt[3]{F(x, x)}.$$

Par conséquent, la fonction F a des propriétés suivantes:

1° $F(x, y) = 0 \Rightarrow F(y, x) = 0$;

2° $F(x, x) = 0 \Rightarrow F(x, y) = 0 \Rightarrow F(y, x) = 0$;

3° $F(x, y) = 0$ ou $F(x, y) = \dfrac{(\varepsilon(x, y)+1)^{1/3}\,(\varepsilon(y, x)+1)^{2/3}}{(3-\varepsilon(x, y))^{2/3}\,(3-\varepsilon(y, x))^{1/3}}\, H(x)^2\, H(y)$.

Vérifions si la fonction F, ayant les propriétés 1°, 2°, 3°, satisfait l'équation (2.1). Si $F(x, y) = 0$, alors, d'après, 1°, nous avons $F(y, x) = 0$, ce qui signifie que l'équation (2.1) est satisfaite.

Si $F(x, y) \neq 0$, alors $F(y, x) \neq 0$, $F(x, x) \neq 0$, $F(y, y) \neq 0$. D'après 3°, nous avons

$$F(x, y) = \frac{(\varepsilon(x, y)+1)^{1/3}\,(\varepsilon(y, x)+1)^{2/3}}{(3-\varepsilon(x, y))^{2/3}\,(3-\varepsilon(y, x))^{1/3}}\, H(x)^2\, H(y),$$

et alors (2.1) prend la forme suivante

$$H(x)^4\, H(y)^2 \left\{1 - \frac{\varepsilon(x, x)+1}{3-\varepsilon(x, x)}\right\} = 0$$

donc étant donné que $H(x) = \sqrt[3]{F(x, x)} \neq 0$ et $H(y) = \sqrt[3]{F(y, y)} \neq 0$, on a

$$\varepsilon(x, x) = 1.$$

En conséquence, si $\varepsilon(x, x) \equiv 1$, alors, la solution générale de l'équation fonctionnelle (2.1) est toute fonction F ayant les propriétés 1°, 2°, 3°. Si $\varepsilon(x, x) \not\equiv 1$, alors, $F(x, x) \equiv 0$ et la solution générale est

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \frac{(\varepsilon(x, y)+1)^{1/3}\,(\varepsilon(y, x)+1)^{2/3}}{(3-\varepsilon(x, y))^{2/3}\,(3-\varepsilon(y, x))^{1/3}}\, H(x)^2\, H(y) && (x \in \{x \mid \varepsilon(x, x) = 1\}, \\ &= 0 && (x \in \{x \mid \varepsilon(x, x) \neq 1\}. \end{aligned}$$

Donc, nous avons:

Théorème 4. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2.1) *est*

$$F(x, y) = \left(1-\chi_E(x, y)\right) \frac{(\varepsilon(x, y)+1)^{1/3}(\varepsilon(y, x)+1)^{2/3}}{(3-\varepsilon(x, y))^{2/3}(3-\varepsilon(y, x))^{1/3}} H(x)^2 H(y),$$

où H est une fonction arbitraire n'ayant pas de zéros réels, E représente un ensemble arbitraire des points du plan Oxy qui est symétrique par rapport à la droite $y=x$ et dont la propriété est $(a, a)\in E \Rightarrow (a, b)\in E \wedge (b, a)\in E$ pour tout $b\in \mathbf{R}$.

Remarque. Cette solution de l'équation (2.1) est plus générale que celle donnée dans [1].

Dans ce qui suit nous allons résoudre les équations fonctionnelles suivantes:

(2.4) $3f(x, y, z)^2 = f(x, x, y)f(y, z, z)+f(y, y, z)f(z, x, x)+f(z, z, x)f(x, y, y),$

(2.5) $3f(x, y, z)^2 = f(x, x, y)f(z, y, z)+f(y, y, z)f(x, z, x)+f(z, z, x)f(y, x, y),$

(2.6) $3f(x, y, z)^2 = f(x, x, y)f(z, z, y)+f(y, y, z)f(x, x, z)+f(z, z, x)f(y, y, x),$

(2.7) $3f(x, y, z)^2 = f(x, y, x)f(y, z, z)+f(y, z, y)f(z, x, x)+f(z, x, z)f(y, x, y),$

(2.8) $3f(x, y, z)^2 = f(x, y, x)f(z, y, z)+f(y, z, y)f(x, z, x)+f(z, x, z)f(y, x, y),$

(2.9) $3f(x, y, z)^2 = f(x, y, x)f(z, z, y)+f(y, z, y)f(x, x, z)+f(z, x, z)f(y, y, x),$

(2.10) $3f(x, y, z)^2 = f(y, x, x)f(y, z, z)+f(z, z, z)f(z, x, x)+f(x, z, z)f(x, y, y),$

(2.11) $3f(x, y, z)^2 = f(y, x, x)f(z, y, z)+f(z, y, y)f(x, z, x)+f(x, z, z)f(y, x, y),$

(2.12) $3f(x, y, z)^2 = f(y, x, x)f(z, z, y)+f(z, y, y)f(x, x, z)+f(x, z, z)f(y, y, x).$

Tous les seconds membres de ces équations sont invariants par rapport à la permutation cyclique $(x, y, z)\to(z, x, y)$ et nous avons

$$f(x, y, z)^2 = f(z, x, y)^2 \tag{2.13}$$

Si nous posons $x=y=u$, $z=v$, la relation $f(u, u, v)^2 = f(v, u, u)^2$ résulte de (2.13), c'est-à-dire

$$f(v, u, u) = \varepsilon(u, v) f(u, u, v) \tag{2.14}$$

où $\varepsilon : \mathbf{R}^2 \to \{-1, 1\}$.

Pour $x=z=u$, $y=v$ de (2.13) nous obtenons $f(u, v, u)^2 = f(u, u, v)^2$, c'est-à-dire

$$f(u, v, u) = \varepsilon(u, v) f(u, u, v) \tag{2.15}$$

où $\varepsilon : \mathbf{R}^2 \to \{-1, 1\}$.

Pour $x=u$, $y=z=v$ de (2.13) nous avons $f(u, v, v)^2 = f(v, u, v)^2$, c'est-à-dire

$$f(u, v, v) = \varepsilon(u, v) f(v, u, v) \tag{2.16}$$

où $\varepsilon : R^2 \to \{-1, 1\}$.

D'après (2.14), (2.15) et (2.16) de (2.4) — (2.12) on obtient l'équation (2.1)

Théorème 5. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2.4) *est:*

$$(2.17)\qquad 3f(x, y, z)^2 = F(x, y)\, F(z, y)\, \varepsilon(z, y) + F(y, z)\, F(x, z)\, \varepsilon(x, z) + F(z, x)\, F(y, x)\, \varepsilon(y, x),$$

$$(2.18)\qquad F(x, y) = \{1 - \chi_E(x, y)\} \frac{(\varepsilon(x, y)+1)^{1/3} (\varepsilon(y, x)+1)^{2/3}}{(3-\varepsilon(x, y))^{2/3} (3-\varepsilon(y, x))^{1/3}} H(x)^2 H(y),$$

$$(2.19)\qquad \operatorname{sgn}\big(f(u, u, v) f(u, w, w)\big) = \varepsilon(v, w),$$

où H *est une fonction arbitraire,* E *un ensemble arbitraire des points* (x, y) *symétrique par rapport à la droite* $y = x$, *de sorte que* $(a, a) \in E \Rightarrow (a, b) \in E \wedge (b, a) \in E$ *pour tout* $b \in \mathbf{R}$.

Démonstration. Si nous posons $f(x, x, y) = F(x, y)$, la condition (2.17) résulte de (2.4) et (2.13). Si nous posons $x = y = u$, $z = v$ dans (2.17), nous obtenons l'équation (2.1) de (2.17). Appliquant le théorème 1 nous obtenons que F a la forme (2.18). La condition (2.19) est une conséquence immédiate de la condition (2.14) et du théorème 1. En conséquence, les conditions (2.17), (2.18), (2.19) sont nécessaires.

En posant $x = y = u$, $z = v$ dans (2.17), nous avons, d'après (2.18),

$$f(u, u, v)^2 = F(u, v)^2,$$

c'est-à-dire

$$(2.20)\qquad f(u, u, v) = \pm F(u, v).$$

De (2.17) pour $x = v$, $y = z = w$, nous obtenons $f(v, w, w)^2 = F(v, w)$, où la formule (2.18) est appliquée. Donc,

$$(2.21)\qquad f(v, w, w) = \pm F(v, w).$$

En partant de (2.20) et (2.21), nous avons

$$(2.22)\qquad f(u, u, v) f(v, w, w) = \pm F(u, v)\, F(v, w).$$

D'après (2.18) nous avons

$$(2.23)\qquad F(u, v)\, F(v, w) \geqq 0.$$

Selon (2.19) nous obtenons

$$(2.24)\qquad \operatorname{sgn} f(u, u, v) f(v, w, w) = \varepsilon(v, w)$$

et, d'après (2.23) et (2.24), la condition (2.22) devient

$$(2.25)\qquad f(u, u, v) f(v, w, w) = \varepsilon(v, w).$$

Par conséquent, l'équation (2.4) est une conséquence de (2.17) et (2.25).

Remarque. Dans l'article **[1]** on considère l'équation fonctionnelle (2.4). Cependant, au lieu de la condition (2.19), la condition $f(x, x, y)\, f(y, z, z) \geqq 0$ est imposée dans **[1]** et ainsi une classe de solutions a été omise. La supposition que E soit un ensemble disjoint avec la droite $y = x$ diminue aussi la généralité de la solution obtenue dans **[1]**.

Considérons maintenant les conditions suivantes:

(2.5*) $$\operatorname{sgn} f(u, u, v) f(w, v, w)=\varepsilon(v, w),$$

(2.7*) $$\operatorname{sgn} f(u, v, u) f(v, w, w)=\varepsilon(v, w),$$

(2.9*) $$\operatorname{sgn} f(u, v, u) f(w, w, v)=\varepsilon(v, w),$$

(2.11*) $$\operatorname{sgn} f(v, u, u) f(w, v, w)=\varepsilon(v, w),$$

(2.12*) $$\operatorname{sgn} f(v, u, u) f(w, w, v)=\varepsilon(u, w).$$

Par analogie avec la démonstration du théorème 5, les théorèmes suivants peuvent être prouvés.

Théorème 6. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2.i) ($i=5, 7, 9, 11, 12$) *est donnée par* (2.17), (2.18) *et* (2.i*) ($i=5, 7, 9, 11, 12$), *où H est une fonction arbitraire, n'ayant pas de zéros réels, E un ensemble arbitraire des points (x, y) symétrique par rapport à la droite $y=x$, tel que $(a, a)\in E \Rightarrow (a, b)\in E \wedge (b, a)\in E$ pour tout $b\in \mathbf{R}$.*

Théorème 7. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2.i) ($i=3, 5, 7$) *est*

$$3 f(x, y, z)^2=F(x, y) F(z, y)+F(y, z) F(x, z)+F(z, x) F(y, x),$$

$$F(x, y)=\left(1-\chi_E(x, y)\right) H(x)^2 H(y),$$

où H est une fonction arbitraire, n'ayant pas de zéros réels, E un ensemble arbitraire des points (x, y) symétrique par rapport à la droite $y=x$ tel que $(a, a)\in E \Rightarrow (a, b)\in E \wedge (b, a)\in E$ pour tout $b\in \mathbf{R}$.

Il y a encore sept équations de la forme (1.1) pour $n=3$, qui seront résolues dans ce qui suit:

(2.26) $$3 f(x, y, z)^2=f(x, y, z) f(y, z, x)+f(y, z, x) f(z, x, y)+f(z, x, y) f(x, y, z),$$

(2.27) $$3 f(x, y, z)^2=f(x, y, z) f(x, z, y)+f(y, z, x) f(y, x, z)+f(z, x, y) f(z, y, x),$$

(2.28) $$3 f(x, y, z)^2=f(x, y, z) f(y, x, z)+f(y, z, x) f(z, y, x)+f(z, x, y) f(x, z, y),$$

(2.29) $$3 f(x, y, z)^2=f(x, y, z) f(z, y, x)+f(y, z, x) f(x, z, y)+f(z, x, y) f(y, x, z),$$

(2.30) $$3 f(x, y, z)^2=f(x, z, y) f(y, x, z)+f(y, x, z) f(z, y, x)+f(z, y, x) f(x, z, y),$$

(2.31) $$3 f(x, y, z)^2=f(x, y, z)^2+f(y, z, x)^2+f(z, x, y)^2.$$

(2.32) $$3 f(x, y, z)^2=f(x, z, y)^2+f(y, x, z)^2+f(z, y, x)^2.$$

Les seconds membres des équations (2.26)—(2.32) sont invariants par rapport à la permutation $(x, y, z)\rightarrow(y, z, x)$ et nous avons

$$f(x, y, z)^2=f(y, z, x)^2,$$

d'où nous obtenons

(2.33) $$f(y, z, x)=\varepsilon(y, z, x) f(x, y, z),$$

où $\varepsilon: \mathbf{R}^3 \rightarrow\{-1, 1\}$.

Théorème 8. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2.26) *est*

$$f(x, y, z) = F(x, y, z) + F(y, z, x) + F(z, x, y), \tag{2.34}$$

où $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *est une fonction arbitraire.*

Démonstration. D'après (2.33) l'équation fonctionnelle (2.26) devient

$$f(x, y, z)^2 \big(3 - \varepsilon(y, z, x) - \varepsilon(y, z, x)^2 \varepsilon(z, x, y) - \varepsilon(z, x, y)\,\varepsilon(y, z, x)\big) = 0. \tag{2.35}$$

Supposons que $\varepsilon(y, z, x) = -1$. Alors de (2.35) on trouve $f(x, y, z) = 0$. Si l'on a $\varepsilon(y, z, x) = 1$, de (2.35) il vient $f(x, y, z) = 0$, ou $\varepsilon(z, x, y) = 1$. Dans le cas où $\varepsilon(y, z, x) = \varepsilon(z, x, y) = 1$, d'après (2.33) nous obtenons

$$f(y, z, x) = f(x, y, z), \quad f(z, x, y) = f(x, y, z), \quad f(x, y, z) = f(x, y, z). \tag{2.36}$$

En additionnant les membres correspondants on trouve (2.34) avec

$$F(x, y, z) = \frac{1}{3} f(x, y, z).$$

(2.34) est une solution de (2.26).

Donc, le théorème 8 est démontré.

On peut démontrer le théorème suivant en suivant le procédé indiqué dans la démonstration du théorème 8:

Théorème 9. *La solution générale de chacune des équations fonctionnelles* (2.30) $-$(2.31) *est donnée par* (2.34).

Pour l'équation fonctionnelle (2.27) nous allons démontrer:

Théorème 10. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2.27) *est*

$$f(x, y, z) = \varepsilon(x, y, z) \big(F(x, y, z) + F(x, z, y) + F(y, z, x) + F(y, x, z) + F(z, x, y) + F(z, y, x)\big)^{1/2}, \tag{2.37}$$

où $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ *est une fonction arbitraire non negative et* $\varepsilon: \mathbf{R}^3 \to \{-1, 1\}$ *une fonction arbitraire telle que*

$$\varepsilon(x, y, z)\,\varepsilon(x, z, y) + \varepsilon(y, z, x)\,\varepsilon(y, x, z) + \varepsilon(z, x, y)\,\varepsilon(z, y, x) = 3. \tag{2.38}$$

Démonstration. À partir de (2.27) il vient

$$f(x, y, z)^2 = f(x, z, y)^2, \quad f(y, z, x)^2 = f(y, x, z)^2, \quad f(z, x, y)^2 = f(z, y, x)^2. \tag{2.39}$$

En partant de (2.27) nous avons aussi

$$f(x, y, z)^2 = f(y, z, x)^2, \quad f(x, y, z)^2 = f(z, x, y)^2, \quad f(x, y, z)^2 = f(x, y, z)^2. \tag{2.40}$$

De (2.39) et (2.40) il s'ensuit

$$f(x, y, z)^2 = \frac{1}{2}\left(f(y, z, x)^2 + f(y, x, z)^2\right),$$

(2.41)
$$f(x, y, z)^2 = \frac{1}{2}\left(f(z, x, y)^2 + f(z, y, x)^2\right),$$

$$f(x, y, z)^2 = \frac{1}{2}\left(f(x, y, z)^2 + f(x, z, y)^2\right).$$

En additionnant les membres correspondants de (2.41) on trouve (2.37) avec

$$F(x, y, z) = \frac{1}{6} f(x, y, z)^2.$$

On voit sans difficulté que (2.37) est vraiment une solution de l'équation (2.27) dans le cas où la condition (2.38) est remplie.

Pour les équations (2.28)—(2.29) et (2.32) on peut obtenir des résultats qui sont analogues à ceux du théorème 10.

3. Le cas: *n* arbitraire

La résolution de l'équation (0.1) devient très compliquée pour $n = 4, 5, \ldots$ Cependant, il n'est pas difficile de vérifier que l'équation (0.1) admet une solution particulière donnée par

(3.1)
$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} g(x_i),$$

où $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ représente une fonction quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. S. Mitrinović, D Ž. Đoković: *Sur une équation fonctionnelle.* C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 2388—2391.