PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 381 — № 409 (1972)

382. COMPLEMÉNTS AU TRAITÉ DE MITRINOVIĆ, II

SUR QUELQUES INÉGALITÉS INTÉGRALES*

Borislav Crstici et *Gheorghe Tudor*

1. Il est bien connue l'inégalité de FEJÉR-JACKSON [1]

(1) $$\varphi_n(x) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} > 0, \quad 0 < x < \pi.$$

En même temps avec l'inégalité (1) on a aussi

(2) $$\psi_n(x) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k} > 0, \quad 0 < x < \pi.$$

De même il est bien connue l'inégalité de W. A. YOUNG [1]

(3) $$\lambda_n(x) \overset{\text{df}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k} > 0, \quad 0 < x < \pi \quad (\lambda_0(x) = 1).$$

En même temps avec l'inégalité (3) on a aussi

(4) $$\mu_n(x) \overset{\text{df}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\cos kx}{k} > 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Lemme 1. *Soient* u_k $(k = 1, \ldots, n+1)$ *des nombres réels tels que*

(5) $$u_k \geqq u_{k+1} > 0 \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Alors nous avons l'inégalité

(6) $$\Phi_n(x) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\sin kx}{k} > 0, \quad 0 < x < \pi.$$

Pour démontrer cette afirmation, d'ailleurs connue, il suffit d'écrire

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) \varphi_k(x) + u_{n+1} \varphi_n(x).$$

* Présenté le 20 juin 1971 par P. M. VASIĆ.

Lemme 2. *Soient* u_k $(k=1,\dots,n+1)$ *des nombres réels tels que*

(7) $$u_{2k}<0,\ u_{2k-1}\geqq |u_{2k}|\geqq u_{2k+1}\left(k=1,\dots,\left[\frac{n+1}{2}\right]\right).$$

Alors nous avons l'inégalité (6).

Pour la démonstration nous écrivons

$$\Phi_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(u_k+u_{k+1})\,\psi_k(x)+(-1)^n u_{n+1}\,\psi_n(x).$$

Corollaire 1. *Soient* $u_k:]0,\ \pi[\to \mathbf{R}$ *des fonctions dont les valeurs pour* $\forall x$ *vérifient une des conditions* (5) *ou* (7). *Alors on a l'inégalité*

(8) $$F_n(x)\overset{\text{df}}{=}\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\frac{\sin kx}{k}>0,\ 0<x<\pi.$$

Lemme 3. *Soient* u_k $(k=0,1,\dots,n+1)$ *des nombres réels tels que*

(9) $$u_k\geqq u_{k+1}>0\ (k=0,1,\dots,n).$$

Alors on a l'inégalité

(10) $$\Psi_n(x)\overset{\text{df}}{=}u_0+\sum_{k=1}^{n}u_k\frac{\cos kx}{k}>0,\ 0<x<\pi.$$

Pour démontrer cette affirmation, qu'on peut d'ailleurs déduire facilement d'un résultat dû à L. VIETORIS [1], il suffit d'écrire

$$\Psi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+1})\,\lambda_k(x)+u_{n+1}\,\lambda_n(x).$$

Lemme 4. *Soient* u_k $(k=0,1,\dots,n+1)$ *des nombres réels tels que*

(11) $$u_{2k+1}<0,\ u_{2k}\geqq |u_{2k+1}|\geqq u_{2k+2}>0\left(k=0,\dots,\left[\frac{n+1}{2}\right]\right).$$

Alors nous avons l'inégalité (10).

Pour la démonstration nous écrivons

$$\Psi_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(u_k+u_{k+1})\,\mu_k(x)+(-1)^{n+1}u_{n+1}\,\mu_n(x).$$

Corollaire 2. *Soient* $u_k:]0,\ \pi[\to \mathbf{R}$ *des fonctions dont les valeurs pour* $\forall x$ *vérifient une des conditions* (9) *ou* (11). *Alors on a l'inégalité*

(12) $$G_n(x)\overset{\text{df}}{=}u_0(x)+\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\,\frac{\cos kx}{k}>0,\ 0<x<\pi.$$

2. Soit maintenant u une fonction définie sur $]0,\pi[$, telle que $|u(x)|\leqq 1$, $u(x)\neq 0$, $\forall x\in]0,\pi[$. Alors les fonctions $u_k(x)=u^{k-1}(x)$ vérifient les conditions du corollaire 1. De même les fonctions $u_k(x)=u^k(x)$ vérifient les conditions du corollaire 2. Nous avons donc les inégalites

(13) $$f_n(x)\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{k=1}^{n} u^{k-1}(x)\frac{\sin kx}{k}>0,\quad 0<x<\pi,$$

(14) $$g_n(x)\overset{\mathrm{df}}{=}1+\sum_{k=1}^{n} u^{k}(x)\frac{\cos kx}{k}>0,\quad 0<x<\pi.$$

Dans la suite nous supposons la fonction u dérivable. Nous avons

(15) $$\begin{aligned}[u(x)f_n(x)]' &= u'(x)\sum_{k=1}^{n} u^{k-1}(x)\sin kx+u(x)\sum_{k=1}^{n} u^{k-1}(x)\cos kx\\ &= u'(x)\,S_n(x,u)+u(x)\,C_n(x,u),\end{aligned}$$

(16) $$[g_n(x)]'=u'(x)\,C_n(x,u)-u(x)\,S_n(x,u),$$

avec

(17) $$S_n(x,u)=\frac{u^{n+1}(x)\sin nx-u^n(x)\sin(n+1)x+\sin x}{u^2(x)-2u(x)\cos x+1},$$

(18) $$C_n(x,u)=\frac{u^{n+1}(x)\cos nx-u^n(x)\cos(n+1)x+\cos x-u(x)}{u^2(x)-2u(x)\cos x+1}.$$

En intégrant dans (15) et (16) nous déduisons le

Théorème. *Soit u une fonction définie sur* $]0,\pi[$, *dérivable et telle que* $|u(x)|\leqq 1$, $u(x)\neq 0$, $\forall x\in]0,\pi[$. *Alors on a les inégalités intégrales*

(19) $$\frac{1}{u(x)}\int_0^x\left[u'(t)\,S_n\big(t,u(t)\big)+u(t)\,C_n\big(t,u(t)\big)\right]dt>0,$$

(20) $$\int_0^x\left[u'(t)\,C_n\big(t,u(t)\big)-u(t)\,S_n\big(t,u(t)\big)\right]dt+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{u^k(0)}{k}>0,$$

pour $0<x<\pi$.

3. Nous allons maintenant déduire du notre théorème quelques inégalités intégrales particulières, à notre avis intéressantes et avec les possibilités pour des applications.

I. En prenant $u(x)=2\cos x$, $\frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{\pi}{2}$, nous obtenons de (19)

(21) $$\int_0^x \cos^n t\cos nt\,dt>\frac{x}{2^n},\quad \frac{\pi}{3}\leqq x<\frac{\pi}{2}.$$

II. Pour $u(x)=2\cos x$, $\frac{\pi}{2}<x\leqq\frac{2\pi}{3}$, nous obtenons de (19)

(22) $$\int_0^x \cos^n t\cos nt\,dt<\frac{x}{2^n},\quad \frac{\pi}{2}<x\leqq\frac{2\pi}{3}.$$

III. En prenant $u(x)=2\cos x$, $\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{2\pi}{3}$, nous obtenons de (20) l'inégalité intégrale

$$\int_0^x \cos^n t \sin nt\, dt < \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-n-1}}{k}, \quad \frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{2\pi}{3}. \tag{23}$$

REMARQUE. Soit

$$I_{n,n}(x)=\int_0^x \cos^n t \sin nt\, dt.$$

On a la formule de récurence

$$I_{n,n}(x)=\frac{1-\cos^n x\cos nx}{2n}+\frac{1}{2}I_{n-1,\,n-1}(x)$$

d'où il résulte facilement

$$I_{n,n}(x)>0.$$

Nous avons donc

$$0<\int_0^x \cos^n t \sin nt\, dt < \frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k-n-1}}{k}, \quad \frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{2\pi}{3}. \tag{23'}$$

IV. A l'aide de la fonction $u(x)=\frac{1}{2\cos x}$, on obtient du notre théorème les inégalités intégrales suivantes:

$$\int^x \frac{\cos nt}{\cos^n t}\, dt \leqq 2^{n-1} x, \quad 0<x\leqq\frac{\pi}{3}, \tag{24}$$

$$\int^x \frac{\cos nt}{\cos^n t}\, dt \geqq 2^{n-1} x, \quad \frac{2\pi}{3}\leqq x<\pi, \tag{25}$$

$$\int^x \frac{\sin nt}{\cos^n t}\, dt > 2^{n-1}\ln\frac{\sec x}{e} - \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{n-k-1}}{k}, \quad 0<x<\pi. \tag{26}$$

*

Nous remercions D. S. MITRINOVIĆ pour les conseils donnés.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. S. MITRIROVIĆ (In cooperation with P. M. VASIĆ): *Analytic inequalities*. Berlin—Heidelberg—New York 1970.

Institut Politechnique „Traian Vuia"
Départment de mathématique,
Timişoara, Roumanie