

381. SUR UNE INÉGALITÉ ENTRE DES VALEURS MOYENNES*

Tiberiu Popoviciu

1. Si on considère le développement

$$(1) \quad \frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots(1-a_nx)} = \sum_{v=0}^{+\infty} \binom{v+n-1}{n-1} q_v x^v$$

et si les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont non-négatifs, nous avons les inégalités

$$(2) \quad q_v^2 \leq q_{v-1} q_{v+1} \quad (v=1, 2, \dots; q_0=1).$$

Les $\sqrt[q]{q_v}, v=1, 2, \dots$ sont alors des valeurs moyennes des nombres a_1, a_2, \dots, a_n qui vérifient les inégalités

$$(3) \quad q_1 \leq \sqrt[q]{q_2} \leq \dots \leq \sqrt[q]{q_v} \leq \dots$$

qu'on déduit facilement de (2).

D'ailleurs si $n > 1$ et les nombres (non-négatifs) a_1, a_2, \dots, a_n ne sont pas tous égaux, partout dans (2) et (3) c'est l'inégalité stricte (avec le signe $<$) qui a lieu.

Une démonstration de ces propriétés se trouve dans le livre de G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA [2] (dans la suite nous désignerons ces trois auteurs par HLP). Cette démonstration revient à exprimer les coefficients du développement (1) calculés par la formule

$$(4) \quad \binom{v+n-1}{n-1} q_v = [a_1, a_2, \dots, a_n; x^{v+n-1}]$$

le second membre étant la différence divisée d'ordre $n-1$ sur les noeuds a_1, a_2, \dots, a_n (distinct ou non) de la fonction $x^{v+n-1}, v=0, 1, \dots$. On fait ensuite usage d'une expression bien connue de la différence divisée par une intégrale multiple due à A. GENOCCHI [1].

Dans le livre cité de HLP [2] (p. 164) on souligne d'ailleurs la propriété plus générale que si $n > 1$ et si les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont réels (pas nécessairement du même signe) et non pas tous égaux, la forme quadratique $\sum q_{\mu+\nu} y_\mu y_\nu$ est positive et si les nombres a_1, a_2, \dots, a_n sont non-négatifs, non

* Présenté le 1 septembre 1972 par D. S. MITRINOVIĆ.

pas tous égaux, la forme quadratique $\sum q_{\mu+\nu+1} y_{\mu} y_{\nu}$ est positive. De la théorie des formes quadratiques définies il résulte alors que l'inégalité (2) reste vraie aussi (avec la restriction concernant le cas de l'égalité) lorsque ν est impair et a_1, a_2, \dots, a_n sont réels quelconques.

Pour la démonstration des inégalités (2) on peut employer aussi d'autres représentations intégrales des différences divisées. À la fin de ce travail nous reviendrons sur cette question.

2. À titre d'application de certains résultats plus généraux, j'ai donné une autre démonstration des inégalités (2) et (3) [3]. À ce moment je ne connaissais pas le livre cité [2] de HLP*).

Ma démonstration utilise elle aussi la formule (4), mais diffère sensiblement de celle donnée par HLP. Elle est basée sur la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur. Mes recherches sur les fonctionnelles linéaires, que j'ai appelé *simples* permettent de généraliser considérablement mes résultats du travail cité [3]. Avant de donner cette généralisation, je rappellerai les principales propriétés, qui vont être utilisées ici, des fonctions convexes d'ordre supérieur et des fonctionnelles linéaires de la forme simple. Pour plus de détails le lecteur est prié de consulter mes travaux antérieurs et principalement le travail [4] de la bibliographie. On peut consulter aussi le travail [5].

3. Soit I un intervalle (de longueur non nulle) de l'axe réel \mathbf{R} et m un nombre entier ≥ -1 . La fonction $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *non-concave d'ordre m* (sur I) si l'inégalité

$$(5) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f] \geq 0$$

est vérifiée pour tout groupe de $m+2$ points distincts x_{ν} , $\nu=1, 2, \dots, m+2$ de I . La fonction f est dite *convexe d'ordre m* si dans (5) c'est l'inégalité stricte (avec le signe $>$) qui est toujours vérifiée. Dans le premier membre de (5) figure la *différence divisée* (d'ordre $m+1$) de la fonction f sur les points (ou noeuds) x_{ν} , $\nu=1, 2, \dots, m+2$.

Toute fonction convexe d'ordre m est une fonction non-concave d'ordre m .

On définit les différences divisées sur des noeuds non pas nécessairement distincts, comme d'habitude, à l'aide des dérivées successives de la fonction. Si alors la fonction f est non-concave d'ordre m l'inégalité (5) reste vraie quels que soient les points x_{ν} , $\nu=1, 2, \dots, m+2$ distincts ou non. Si la fonction f est *convexe* d'ordre m et si $m \geq 0$, l'inégalité stricte (avec le signe >0) reste vraie à condition que les points x_{ν} ne soient pas tous confondus. On suppose, bien entendu, que le premier membre de (5) existe, donc que cette différence divisée soit définie de la manière que nous avons indiquée (ce qui implique l'existence de certaines dérivées de f). Pour $m = -1$ la propriété est triviale.

On sait qu'une fonction non-concave d'ordre m est continue sur l'intérieur de I si $m > 0$ et a une dérivée continue d'ordre $m-1$ sur l'intérieur de I si $m > 1$.

Si la dérivée $f^{(m+1)}$ d'ordre $m+1$ existe ($f^{(0)} = f$), la condition $\forall f^{(m+1)}(x) \geq 0$ est nécessaire et suffisante pour la nonconcavité d'ordre m et la condition

*) Mon travail a été reçu par la rédaction de la revue où il a été publié le 31 janvier 1934. La préface du livre [2] de HLP est daté juillet 1934.

$\forall f^{(m+1)}(x) > 0$ est suffisante pour la convexité d'ordre m de la fonction f .

Lorsque $m \geq 0$ la dérivée $f^{(m+1)}$ peut s'annuler sur certains points de I pour une fonction convexe d'ordre m . Mais cette dérivée doit alors être différente de zéro sur un ensemble partout dense dans I . Si $m \geq 0$ les conditions $f^{(m+1)}(x) \geq 0$ sur I et $f^{(m+1)}(x) > 0$ sur un ensemble partout dense dans I sont nécessaires et suffisantes pour la convexité d'ordre m de f sur I . Cette propriété découle du fait que si pour une fonction f non-concave d'ordre m nous avons $[x_1, x_2, \dots, x_{m+2}; f] = 0$, cette fonction se réduit à un polynôme de degré m sur le plus petit intervalle fermé contenant les points x_1, x_2, \dots, x_{m+2} et a donc une dérivée $(m+1)^{\text{ième}}$ nulle sur l'intérieur de ce dernier intervalle (si sa longueur n'est pas nulle). Une conséquence de cette propriété sera appliquée sous la forme du

Lemme 1. *Si $m \geq 0$ et la dérivée d'ordre $m+1$ du polynôme P n'est pas identiquement nulle et est non-négative sur I , ce polynôme est une fonction convexe d'ordre m sur I .*

En effet $P^{(m+1)}$ ne peut alors s'annuler qu'au plus sur un nombre fini de points, donc est différent de zéro sur un ensemble partout dense dans I .

4. Soit maintenant $R[f]$ une fonctionnelle linéaire (additive et homogène) définie sur un ensemble linéaire S de fonctions f réelles, continues et définies sur l'intervalle I . L'ensemble S peut être formé par toutes les fonctions continues définies sur I , mais aussi par une partie seulement de ces fonctions. Nous allons supposer que S contient toujours tous les polynômes.

Si les égalités

$$(6) \quad R[1] = R[x] = \dots = R[x^m] = 0$$

ainsi que l'inégalité

$$(7) \quad R[x^{m+1}] \neq 0$$

sont vérifiées pour un certain entier $m \geq -1$, on dit que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est de *degré d'exactitude m* (ou que m est son degré d'exactitude). Ce nombre m , s'il existe, est bien déterminé (est unique). Lorsque $m = -1$ les relations (6), (7) doivent être remplacées par l'unique relation $R[1] \neq 0$.

Enfin nous rappellerons la notion de fonctionnelle de la forme simple. La fonctionnelle linéaire $R[f]$ de degré d'exactitude m est dite *de la forme simple* si elle jouit de la propriété que nous avons $R[f] \neq 0$ pour toute fonction f convexe d'ordre m (sur I). Nous avons dans ce cas $R[f] R[x^{m+1}] > 0$ pour toute fonction f convexe d'ordre m . Dans la suite nous pouvons considérer seulement des fonctionnelles de degré d'exactitude m et de la forme simple pour lesquelles $R[x^{m+1}] > 0$. Une telle fonctionnelle linéaire vérifie l'inégalité $R[f] > 0$ pour toute fonction f convexe d'ordre m . Dans le cas contraire, la fonctionnelle linéaire $-R[f]$, qui est aussi de degré d'exactitude m et de la forme simple, vérifie la propriété.

Une fonctionnelle linéaire $R[f]$ de la forme simple vérifie une importante formule de la moyenne (voir [4]) que nous n'utiliserons pas dans ce travail. D'ailleurs l'existence de cette formule pour $R[f]$ de degré d'exactitude m est précisément équivalente à la propriété que $R[f] \neq 0$ pour toute fonction f convexe d'ordre m .

5. Soit $R[f]$ une fonctionnelle linéaire de la forme précédente. Les nombres

$$(8) \quad c_\nu = R[x^\nu], \quad \nu = 0, 1, \dots$$

sont les *moments* de cette fonctionnelle.

Lorsque $R[f]$ est de degré d'exactitude m , les $m+1$, premiers moments sont nuls (si $m \geq 0$). Si nous supposons que $R[f]$ soit de degré d'exactitude m et de la forme simple, il existe entre les moments c_ν , $\nu = m+1, m+2, \dots$, certaines inégalités que nous allons mettre en évidence. Ces inégalités se déduisent du

Théorème 1. Soit $m \geq 0$ et $R[f]$ une fonctionnelle linéaire définie sur S , de degré d'exactitude m de la forme simple et $R[x^{m+1}] > 0$. Posons

$$(9) \quad \binom{\nu+m+1}{m+1} q_\nu = c_{\nu+m+1} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

et supposons que le polynôme $\sum_{\nu=0}^k a_\nu x^\nu$ soit non-négatif et non pas identiquement nul sur l'intervalle.

Il résulte alors que nous avons l'inégalité

$$(10) \quad \sum_{\nu=0}^k a_\nu q_\nu = a_0 q_0 + a_1 q_1 + \dots + a_k q_k > 0.$$

En effet, le polynôme

$$P = \sum_{\nu=0}^k \frac{a_\nu x^{\nu+m+1}}{(v+1)(v+2)\dots(v+m+1)} = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\nu=0}^k \frac{a_\nu x^{\nu+m+1}}{\binom{\nu+m+1}{m+1}}$$

est convexe d'ordre m , par suite du lemme 1. Compte tenant de (9) il en résulte que

$$R[P] = \frac{1}{(m+1)!} \sum_{\nu=0}^k a_\nu q_\nu > 0,$$

ce qui équivaut à l'inégalité (10).

Corollaire 1. Si $R[f]$ est une fonctionnelle linéaire qui vérifie les hypothèses du théorème 1, la forme quadratique en y_0, y_1, \dots, y_r ,

$$(11) \quad \sum_{\mu, \nu=0}^r q_{\mu+\nu+s} y_\mu y_\nu$$

est définie positive, lorsque:

- 1° s est un entier pair ≥ 0 et r un entier ≥ 0 , ou
- 2° I est un intervalle positif et s, r sont des entiers ≥ 0 .

Nous dirons que l'intervalle I est positif s'il ne contient aucun point non-positif, donc si $x \in I \Rightarrow x > 0$.

Pour la démonstration il suffit de remarquer que le polynome $x^s \left(\sum_{v=0}^r y_v x^v \right)^2$ est non-négatif sur I .

La propriété est équivalente aux inégalités

$$(12) \quad \begin{vmatrix} q_s & q_{s+1} & \cdots & q_{s+r} \\ q_{s+1} & q_{s+2} & & q_{s+r+1} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ q_{s+r} & q_{s+r+1} & & q_{s+2r} \end{vmatrix} > 0 \quad (s=0, 1, \dots)$$

et $s=0, 2, 4, \dots$, respectivement $s=0, 1, 2, \dots$

En particulier, nous avons

$$(13) \quad q_{s+1}^2 < q_s q_{s+2}$$

pour tous les entiers s vérifiant les restrictions signalées.

6. Le corollaire 1 s'obtient en particulierisant le polynome $\sum_{v=0}^k a_v x^v$ du théorème 1. On peut obtenir diverses inégalités du même type en particulierisant autrement ce polynome.

Si l'intervalle I est borné inférieurement et si $a \leq \inf I$, le polynome

$$(14) \quad (x-a)^s \left(\sum_{v=0}^r y_v x^v \right)^2$$

est non-négatif sur I et nous déduisons que la forme quadratique en y_0, y_1, \dots, y_r $(q-a)^{(s)} \left(\sum_{v=0}^r q y_v \right)^{(2)}$ est positive. Ici les exposants $(s), (2)$ désignent des puissances symboliques habituelles. Ceci revient à ordonner le polynome (14) d'après les puissances de $x=q$ et puis à remplacer q^v par q_v . Le nombre s est un entier non-négatif quelconque. De la même propriété jouit la forme quadratique $(q-b)^{(s)} \left(\sum_{v=0}^r q y_v \right)^{(2)}$ si $\sup I \leq b < +\infty$. Ces propriétés sont équivalentes à la positivité de certains déterminants de HANKEL donc à des inégalités analogues à (12). Il est inutile d'insister ici sur d'autres cas particuliers.

7. En particulierisant la fonctionnelle linéaire $R[f]$ on peut obtenir diverses inégalités particulières plus ou moins intéressantes.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n, n > 1$ points non tous confondus de l'intervalle I . Alors

$$(15) \quad R[f] = [a_1, a_2, \dots, a_n; f]$$

est une fonctionnelle linéaire de degré d'exactitude $n-2$, de la forme simple (ipso facto, d'après la définition même des fonctions convexes d'ordre supé-

rieur) et qui est bien définie sur tout polynome. On peut appliquer la théorie précédente et nous retrouvons facilement les résultats de notre travail antérieur [3] et, en particulier, ceux qui ont été exposés au no. 1 du présent travail relativement aux coefficients du développement (1).

8. Supposons que $I = [a, b]$ soit un intervalle borné et fermé et considérons la fonctionnelle linéaire

$$(16) \quad R[f] = \int_a^b \varphi f^{(m+1)} dx \quad (m \geq -1),$$

où φ est une fonction continue non-négative et non pas identiquement nulle sur $[a, b]$. Vu que les valeurs de $R[f]$ sur les polynomes nous intéressent seules en ce moment, nous pouvons supposer que S est formé par toutes les fonctions f ayant une dérivée continue d'ordre $m+1$ ($f^{(0)} = f$) sur $[a, b]$. Dans ce cas (16) est bien une fonctionnelle linéaire de degré d'exactitude m de la forme simple et nous avons aussi $R[x^{m+1}] > 0$ (voir [6]). Compte tenant de

(8) et (9) on peut remarquer que les $\frac{q_\nu}{(m+1)!}$ sont précisément les moments au sens classique de la fonction de distribution $\int \varphi dx$.

Remarquons que (15) est aussi de la forme (16), l'ensemble S étant défini comme plus haut. Si, en effet, $n > 1$ et $-\infty < a \leq \min(a_\nu) < \max(a_\nu) \leq b < +\infty$ on a

$$(17) \quad [a_1, a_2, \dots, a_n; f] = \int_a^b \varphi f^{(n-1)} dx$$

où φ est une fonction continue non-négative sur $[a, b]$ et indépendante de f (une soi-dite fonction „spline“). Cette formule est bien connue (voir, par. ex., [5]) et peut être utilisée au lieu de la représentation de A. GENOCCHI [1], pour démontrer l'inégalité (2).

On peut évidemment considérer, au lieu de (16), le cas d'une fonctionnelle linéaire plus générale de la forme

$$(18) \quad \int_a^b f^{(m+1)} dV,$$

où a, b ($a < b$) sont les extrémités (finies ou non) de l'intervalle (fermé) I et V est une fonction à variation bornée convenablement choisie.

On peut trouver des exemples de fonctionnelles linéaires de la forme simple, qui sont en général du type (16), dans la théorie des formules de quadrature approximative. Ainsi le reste des formules classiques de CÔTES et de GAUSS et de bien d'autres sont de telles fonctionnelles.

Si $R[f]$ a une représentation de la forme (18) ce qui précède reviennent, en général, à des propriétés bien connues de la théorie classique des moments (DE STIELTJES, HAMBURGER, HAUSDORFF, etc.). Mais nos résultats sont indépendants de toute représentation intégrale de $R[f]$.

9. On peut, sous certaines conditions, obtenir des inégalités entre des moments généralisés.

Supposons toujours que $R[f]$ est une fonctionnelle linéaire de degré d'exactitude $m \geq 0$ de la forme simple et que son ensemble de définition S contient les fonctions φ_ν , $\nu=0, 1, \dots, k$, continues et ayant des dérivées $\varphi_\nu^{(m+1)}$ d'ordre $m+1$ sur I . Si $\sum_{\nu=0}^k a_\nu \varphi_\nu^{(m+1)}(x)$ est non-négatif et ne s'annule pas sur un ensemble dense dans I , la fonction $\sum_{\nu=0}^k a_\nu \varphi_\nu(x)$ est convexe d'ordre m et nous avons donc l'inégalité $\sum_{\nu=0}^k a_\nu R[\varphi_\nu] > 0$.

Nous laissons au lecteur le soin d'étendre le corollaire 1 à ce cas.

10. Comme application supposons que I est un intervalle positif (donc tel que $x \in I \Rightarrow x > 0$) et que S contient toutes les *fonctions puissances* x^σ , quel que soit σ réel. Tous les moments (8) sont bien définis pour σ réel quelconque, mais les relations (9) ne déterminent sans ambiguïté q_ν que si ν diffère des entiers $-1, -2, \dots, -m-1$. En tenant compte de cette remarque on peut voir facilement que les inégalités (12) sont vraies à condition que s soit réel mais différent de $-1, -2, \dots, -m-1-2r$. En particulier l'inégalité (13) est vraie si s diffère de $-1, -2, \dots, -m-3$.

En particulier la fonctionnelle linéaire (15) est de la forme précédente si a_1, a_2, \dots, a_n sont des nombres positifs.

Par exemple si $n=3$ et a_1, a_2, a_3 sont positifs et non pas tous égaux, nous avons

$$(19) \quad q_{-1/2}^2 < q_{-3/2} q_{1/2}$$

Cette inégalité revient d'ailleurs facilement à une inégalité „élémentaire“. En effet nous avons

$$q_{-3/2} = \frac{8}{\prod(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})}, \quad q_{-1/2} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\sum \sqrt{a_1 a_2}}{\prod(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})},$$

$$q_{1/2} = \frac{8}{15} \cdot \frac{\sum a_1 a_2 + 2 \sum a_1 \sqrt{a_2 a_3} + \sum a_1 \sqrt{a_1} (\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3})}{\prod(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})}$$

où la sommation Σ et la multiplication Π sont étendues aux permutations circulaires des indices 1, 2, 3.

Si nous posons $x_1 = \sqrt{a_1}$, $x_2 = \sqrt{a_2}$, $x_3 = \sqrt{a_3}$, l'inégalité (19) revient à l'inégalité (entre valeurs moyennes)

$$(20) \quad \frac{\sum x_1 x_2}{3} < \sqrt{\frac{\sum x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)}{6}}$$

qui a lieu si les nombres non-négatifs x_1, x_2, x_3 ne sont pas tous égaux.

La démonstration directe de l'inégalité (20) résulte des inégalités

$$\frac{\sum x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)}{6} = \frac{1}{3} \sum x_1 x_2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > \frac{1}{3} \sum x_1^2 x_2^2 > \left(\frac{1}{3} \sum x_1 x_2\right)^2$$

D'ailleurs $q_{-3/2}$, $q_{-1/2}$, $q_{-1/2}$ existent et l'inégalité (19) a lieu si a_1 , a_2 , a_3 sont non-négatifs, non-pas tous égaux et un au plus égal à 0. Les résultats précédents sont d'ailleurs valables pour la différence divisée (15) en général si $n > 1$ et les a_1, a_2, \dots, a_n sont non-négatifs, non pas tous égaux et un au plus égal à 0. Si cette dernière condition n'est pas satisfaite la dérivée d'ordre $n-1$ de la fonction x^σ pourrait intervenir sur le point 0 dans le raisonnement et cette dérivée peut ne pas exister.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. GENOCCHI: *Intorno alle funzioni interpolari*. Atti Torino, **13** (1878), 716—730.
2. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA: *Inequalities*. Cambridge, 1934.
3. T. POPOVICIU: *Sur un théorème de Laguerre*. Bulletin de la Soc. Sc. de Cluj (Roumanie), **8** (1934), 1—4.
4. T. POPOVICIU: *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse*. Mathematica **1** (24) (1959), 95—142.
5. T. POPOVICIU: *Remarques sur le reste de certains formules d'approximation d'un différence divisée par des dérivées*. Buletinul Institutului Politehnic din Iași **8** (17), Fasc. 3—4 (1967), 103—109.
6. T. POPOVICIU: *Sur la forme du reste de certaines formules de quadrature*. Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, (1969), 365—370.

Institutul de calcul
CLUJ
Romania