PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 354 — № 356 (1971)

356. EQUATIONS FONCTIONNELLES CONTENANT PLUSIEURS FONCTIONS INCONNUES

Ionel I. Stamate

INTRODUCTION

1. Les équations fonctionnelles constituent une partie importante de l'analyse mathématique, mais elles ne figurent pas dans les traités d'analyse comme un chapitre à part, à cause des difficultés de classification et à cause du défaut de méthodes générales pour déterminer les solutions.

Les premières équations fonctionnelles sont rencontrées dans les oeuvres de quelques analystes du 18 siècle: J. D'ALEMBERT, L. EULER, P. S. LAPLACE, J. L. LAGRANGE, A. M. LEGENDRE, G. MONGE, etc; leurs recherches concernaient surtout les équations aux différences finies, liées dans la plupart des cas aux problèmes d'interpolation. Les bases et les études fondamentaux sur les équations fonctionnelles ont été effectuées durant le XIX^e siècle, surtout par le mathématicien français A. L. CAUCHY, le norvégien N. H. ABEL et par l'anglais C. H. BABBAGE. Il faut rappeler aussi les recherches importantes de K. WEIERSTRASS, S. D. POISSON, G. DARBOUX, E. SCHRÖDER, P. APPEL, G. KOENIGS, L. LEAU, C. BOURLET, etc.

Le début du XX^e — siècle est dominé par les travaux de G. HAMEL, H. W. PEXIDER, R. SCHIMMACK, M. FRÉCHET, H. POINCARÉ, E. PICARD, W. H. WILSON, A. R. SCHWEITZER, P. MONTEL, etc.

Durant les 30 dernières années, le nombre des travaux et des mathématiciens spécialistes en équations fonctionnelles s'est accrû d'une manière considérable. A présent, dans quelques pays, il y a de vrais centres de recherche en équations fonctionnelles, dirigés par des mathématiciens bien connus. Il y en a par exemple en Yougoslavie, en Pologne, en Hongrie et on voit un commencement de formations en Roumanie et au Canada. Bien sûr, on a publié et on continue de publier des oeuvres importantes dans ce domaine, aussi dans d'autres pays, mais faute d'espace, nous ne pouvons pas nous permettre de faire une analyse plus détaillée.

Il y a quatre traités sur les équations fonctionnelles: 1° É. PICARD: *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*. Paris, 1928; 2° M. GHERMĂNESCU: *Ecuaţii funcţionale*, Bucureşti, 1960; 3° J. ACZÉL: *Vorlesungen über funktionalgleichungen und ihre anwendungen*. Basel, 1961, ou *Lectures on functional equations* *and their applications*. New York, 1966; 4° M. KUCZMA: *Functional equations in a single variable*. Warszawa, 1968; 5° Il faut rappeler aussi la très appréciée monographie de M. KUCZMA: *A survey of the theory of functional equations*. Beograd, 1964.

2. L'approfondissement qualitatif de la théorie des fonctions a eu des conséquences importantes pour l'étude des équations fonctionnelles. D'un côté, on avait étudié les équations fonctionnelles connues sous de nouveaux aspects, ainsi par exemple, les fonctions composantes supposées d'être, non seulement dérivables ou continues, mais aussi mesurables, bornées, admettant une majorante, etc., par conséquent, à la détermination des solutions, se sont imposées aux fonctions des conditions de plus en plus faibles, parfois très générales.

D'autre part de nouvelles équations venaient d'être introduites. On a essayé une caractérisation fonctionnelle des différentes fonctions élémentaires autres que celles introduites par A. L. CAUCHY et D'ALEMBERT. Ainsi a été effectuée, en formes variées, la caractérisation fonctionnelle: des polynômes, des fonctions trigonométriques, hyperboliques, de certaines fonctions spéciales, de l'équation de l'associativité, de l'autodistribution, de la bisymétrie, de la transitivité, des équations liées à l'homogénéité, des équations cycliques, itératives, des équations liées à la théorie des moyennes, de la théorie de l'information, des équations fonctionnelles matricielles, des équations fonctionnelles définies par des structures algébriques, enfin des équations caractérisant certaines courbes et surfaces. Nous devons mentionner qu'a présent des études intéressantes sont effectuées sur l'existence des solutions de certains types d'équations, etc.

Les études mentionnées se rapportent à des fonctions réelles d'une ou plusieurs variables, les équations comprenant une ou plusieurs fonctions inconnues. Des études intéressantes ont été réalisées aussi sur les équations fonctionnelles comprenant des fonctions complexes.

3. La théorie des équations fonctionnelles, à son tour, a impulsionné le développement de plusieurs branches des mathématiques, nous pensons en premier lieu à la théorie des objets géometriques, branche des mathématiques aujourd'hui en plein développement dans laquelle les équations fonctionnelles jouent un rôle important. Dans la géométrie projective on rencontre des équations fonctionnelles, par exemple, à l'étude de la correspondance projective entre les éléments des variétés de première espèce (unidimensionelles), ainsi que dans des problèmes de géométrie non-euclidienne ou dans la théorie des groupes continus finis. Dans la mécanique, de même que dans la physique, on rencontre des équations fonctionnelles, par exemple, dans le problème de la composition de plusieurs forces concurrentes, faisant un nombre minimal d'hypothèses, etc.

4. Dans le présent travail, que nous proposons pour thèse de doctorat, nous nous occupons d'équations fonctionnelles comprenant plusieurs fonctions inconnues, à une ou plusieurs variables.

Partout nous considérons seulement les fonctions réelles et les variables réelles. En général les fonctions sont supposées continues ou mesurables. La méthode appliquée est celle de l'analyse classique, malgré que certains problèmes se prêtent à une présentation différente.

Le travail comprend les chapitres suivants:

*

* *

Il est de mon devoir de remercier Mr. le Professeur Dr. D. S. MITRINOVIĆ pour l'appui accordé à la rédaction de cette thèse, pour ses encouragements et enfin pour avoir accepté ce travail comme thèse de doctorat.

1. EQUATIONS FONCTIONNELLES LINEAIRES COMPRENANT PLUSIEURS FONCTIONS INCONNUES A UNE SEULE VARIABLE

1.1. L'èquation fonctionnelle de CAUCHY

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

a fait l'objet de nombreuses recherches et a été généralisée de diverses manières et dans divers sens.

Une extension a été faite par J. V. PEXIDER **[17]** le premier qui avait observé que l'équation à trois fonctions inconnues

$$f(x+y)=g(x)+h(y) \tag{1.1}$$

contient des informations suffisantes pour pouvoir déterminer l'ensemble de ses solutions.

Dans ce qui suit, nous allons étudier des généralisations de l'équation fonctionnelle (1.1), ainsi que d'autres équations fonctionnelles linéaires comprenant plusieurs fonctions inconnues.

1.2. *La solution générale mesurable ou continue de l'équation fonctionnelle*

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n) \tag{1.2}$$

est donnée par

$$f(x)=cx+a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad f_1(x)=cx+a_1,\ \ldots,\ f_n(x)=cx+a_n$$

où $a_1, \ldots, a_n$ *sont des constantes réelles arbitraires.*

En effet, en faisant dans (1.2), successivement $n-1$ variables égales à zéro, nous obtenons

$$f(x_1)=f_1(x_1)+a_2+\cdots+a_n,\ \ldots,\ f(x_n)=f_n(x_n)+a_1+\cdots+a_{n-1}$$

où $a_i = f_i(0)$. Avec celles-ci, l'équation (1.2) devient

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)-(n-1)(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

équation qui est de forme

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+C \qquad (n>1)$$

qui a comme solution générale mesurable ou continue

$$f(x)=cx-\frac{C}{n-1}$$

où C est un constante arbitraire.

On démontre facilement les suivantes:

1° L'équation fonctionnelle

$$(1.2_1) \qquad f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f_1(x_2)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)+C, \qquad n>1$$

a comme solution générale

$$f(x)=cx+a_1+\cdots+a_n-\frac{C}{n-1}, \quad f_i(x)=cx+a_i-\frac{C}{n-1}, \qquad (i=1,\ldots,n).$$

2° L'équation fonctionnelle

$$(1.2_2) \qquad f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f_1(k\,x_1)+f_2(k\,x_2)+\cdots+f_n(k\,x_n), \qquad (k\neq 0)$$

a solution générale

$$f(x)=cx+a_1+\cdots+a_n, \quad f_i(x)=\frac{c}{k}x+a_i \qquad (i=1,\ldots,n)$$

dans lesquelles c et $a_1,\ldots,a_n$ sont constantes arbitraires.

1.3. *L'équation fonctionnelle*

$$(1.3) \qquad f(x_1x_2\cdots x_n)=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)$$

où les fonctions sont mesurables (continues), et $x_1,\ldots,x_n>0$, a comme solution générale

$$f(x)=c\ln x+a_1+\cdots+a_n, \quad f_i(x)=c\ln x+a_i \qquad (i=1,\ldots,n)$$

c et $a_1,\ldots,a_n$ constantes arbitraires.

Les variables étant positives, on peut mettre $x=e^{\ln x}$ et alors l'équation devient

$$f(e^{\ln x_1+\cdots+\ln x_n})=f_1(e^{\ln x_1})+\cdots+f_n(e^{\ln x_n}).$$

Si nous notons

$$\ln x_i=u_i, \quad f(e^{u_1+\cdots+u_n})=g(u_1+\cdots+u_n), \quad f_i(e^{u_i})=g_i(u_i)$$

nous arrivons à

$$g(u_1+u_2+\cdots+u_n)=g_1(u_1)+g_2(u_2)+\cdots+g_n(u_n)$$

d'où nous obtenons immédiatement les solutions données.

1.4. *L'équation fonctionnelle*

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{k}\right)=\sum_{i=1}^{r} f_i(x_{i_1}+\cdots+x_{i_m}) \tag{1.4}$$

où la somme de la deuxième partie se réfère à toutes les combinaisons simples des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prises m à m, tandis que le symbole $\binom{n}{m}=C_n^m=r$ indique le nombre des combinaisons simples de n éléments pris m à m, avec $n>m$, a comme ensemble des solutions

$$f(x)=k\frac{m}{n}\binom{n}{m}cx+a_1+\cdots+a_r,\quad f_i(x)=cx+a_i \qquad (i=1,\ldots,r)$$

c et $a_1, \ldots, a_r$ sont $r+1$ constantes arbitraires.

En posant $X_i=x_{i_l}+\cdots+x_{i_m}$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{r} X_i=\binom{n-1}{m-1}\sum_{i=1}^{n} x_i=\frac{m}{n}\binom{n}{m}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Il en résulte que

$$f\left(\frac{X_1+\cdots+X_r}{\frac{m}{r}kr}\right)=f_1(X_1)+\cdots+f_r(X_r)$$

équation fonctionnelle qui est facilement rapportée à la forme (1.2_2).

1.5. *L'équation fonctionnelle*

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{k}\right)=\sum f_{m_1}(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{m_1}})+\cdots+\sum f_{m_p}(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{m_p}}) \tag{1.5}$$

$k\neq 0$, où les sommes de la deuxième partie se réfèrent à toutes les combinaisons des n variables $x_1, \ldots, x_n$ prises respectivement à $m_1, \ldots, m_p<n$, a comme ensemble des solutions les fonctions

$$f(x)=\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{p} m_i\binom{n}{m_i}cx+a_1+\cdots+a_\lambda,\ f_1(x)=cx+a_1,\ \ldots,\ f_\lambda(x)=cx+a$$

c, $a_1, \ldots, a_\lambda$ étant constantes arbitraires.

Pour la démonstration nous notons

$$x_{i_1}+\cdots+x_{i_{m_j}}=X_i^{m_j} \qquad (j=1,\ldots,p)$$

et alors nous avons

$$\sum_{i=1}^{r_1} X_i^{m_1}+\cdots+\sum_{i=1}^{r_p} X_i^{m_p}=\sum_{i=1}^{n} x_i\left[\frac{m_1}{n}\binom{n}{m_1}+\cdots+\frac{m_p}{n}\binom{n}{m_p}\right],\qquad r_j=\binom{n}{m_j}$$

et l'équation devient

$$f\left(\frac{\sum X_i^{m_1}+\cdots+\sum X_i^{m_p}}{\frac{k}{n}\sum_{i=1}^{p} m_i\binom{n}{m_i}}\right)=\sum_{i=1}^{r_1} f_{m_1}(X_i^{m_1})+\cdots+\sum_{i=1}^{r_p} f_{m_p}(X_i^{m_p})$$

dans laquelle en substituant $\sum_{i=1}^{n} X_i^{m_\alpha}=Y_\alpha$ on arrive à l'équation de la forme étudiée plus haut [8].

1.6. L'équation fonctionnelle de JENSEN

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

écrite à $n+1$ fonction est

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=\frac{f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)}{n} \tag{1.6}$$

La solution générale mesurable ou continue de l'équation (1.6) *est donnée par*

$$f(x)=cx+\frac{a_1+\cdots+a_n}{n},\quad f_1(x)=cx+a_1,\ \ldots,\ f_n(x)=cx+a_n$$

dans lesquelles c et $a_1, \ldots, a_n$ sont $n+1$ constantes arbitraires.

En effet, en mettant dans (1.6)

$$f\left(\frac{t}{n}\right)=F(t),\quad F_1(t)=\frac{f_1(t)}{n},\ldots,\ F_n(t)=\frac{f_n(t)}{n}$$

l'équation est ramenée à la forme (1.2).

1.7. Z. WARASZKIEWICZ [31] a affirmé que l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \tag{1.7}$$

où λ est une constante $0\leqq\lambda\leqq 1$, n'admet, excepté le cas $\lambda=\frac{1}{2}$, aucune solution dérivable.

Nous allons montrer que *l'ensemble des solutions continues, etc, de l'équation* (1.7) *est constitué par des fonctions linéaires, c'est-à-dire $f(x)=ax+b$, dans lesquelles a et b sont des constantes arbitraires et alors on déduit $\lambda=\frac{1}{2}$.*

Par conséquent nous substituons en (1.7) d'abord $x=u+v$, $y=u-v$ et ensuite $x=u-v$, $y=u+v$.

Nous déduisons

$$f(u)=\lambda f(u+v)+(1-\lambda)f(u-v),\quad f(u)=\lambda f(u-v)+(1-\lambda)f(u+v)$$

En additionnant les membres un à un nous obtenons

$$f(u+v)-2f(u)+f(u+v)=0.$$

La dernière équation est la différence du deuxième ordre de la fonction $f(x)$ égalée à zero, laquelle en écartant la solution $f(x)\equiv 0$, a, on le sait, la solution générale $f(x)=ax+b \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$.

Nous allons donner encore une solution à l'équation (1.7), une solution très simple et valable en des conditions extrêmement larges imposées sur la régularité de la fonction $f(x)$.

Si en (1.7) nous opérons les transformations $x=u+v$, $y=u-v$ l'équation peut être écrite

$$(1.7_1) \qquad \lambda f(u+v)-f(u)+(1-\lambda)f(u-v)=0$$

Cette équation est un cas particulier de l'équation

$$(1.7_2) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i f(x+\alpha_i h)=0$$

pour laquelle équation T. Popoviciu [20] et [21] a montré que: si le nombre naturel k est de la sorte que

$$(1.7_3) \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i=\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha_i=\cdots=\sum_{i=0}^{n} a_i\alpha_i^{k-1}=0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i\alpha_i^{k}\neq 0,$$

et si $f(x)$ est une fonction bornée (continue, mesurable, etc), qui satisfait l'équation (1.7_2) alors $f(x)$ est un polynôme du degré $k-1$.

On déduit

$$\sum a_i=0, \quad \sum a_i\alpha_i=2\lambda-1, \quad \sum a_i\alpha_i^2=1$$

si $\lambda\neq\frac{1}{2}$ alors $\sum a_i\alpha_i\neq 0$, l'équation (1.7_1) est satisfaite par $f(x)=\text{const}$, si $\lambda=\frac{1}{2}$ alors $f(x)=ax+b$.

J. Aczél dans la récension faite dans *Mathematical Reviews* **32** (1966), 427 donne une nouvelle solution à l'équation (1.7) et notamment, si on opère les transformations

$$f\left(\frac{z}{2}\right)=F(z), \quad \lambda f(x)=G(x), \quad (1-\lambda)f(y)=H(y)$$

on arrive à l'équation (1.1).

Considérant les solutions de cette équation et revenant à la fonction initiale $f(x)$ on déduit que $\lambda=\frac{1}{2}$.

S. Marcus [13] et [14] s'occupant de fonctions internes, notamment de fonctions réelles $f(x)$ définies sur (a, b) et qui pour $a<x<y<b$ satisfont aux inégalités

$$\min(f(x), f(y))\leq f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leq \max(f(x), f(y))$$

démontre qu'il y a plusieurs équations fonctionnelles qui ont comme solutions des fonctions strictement internes. Dans un chapitre spécial dans laquel il fait des applications, il se réfère à l'équation fonctionnelle (1.7), pour laquelle il conclut un résultat valable en des conditions extrêmement larges, en ce qui concerce la régularité de la fonction et notamment si $\lambda \neq \frac{1}{2}$, aucune solution non-constante approximativement continue dans un point n'existe pour l'équation (1.7). Ce résultat est valable aussi pour l'équation

$$f(px+qy)=pf(x)+qf(y), \quad p>0, \quad q>0, \quad p+q=1.$$

Ensuite S. MARCUS montre que l'équation (1.7) n'a pas de solution non-constante si $\lambda \neq \frac{1}{2}$.

1.8. A la conférence d'équations fonctionnelles tenue à Zakopane en 1967, une étude a été exposée sur l'équation fonctionnelle

$$f(x+y-xy)=f(x)+f(y)-f(xy) \tag{1.8}$$

suivie de quelques autres études parues ultérieurement. Cette équation a comme solution générale $f(x)=ax+b$.

La détermination de la solution de l'équation

$$f(x+y-xy)=g(x)+h(y)-k(xy)$$

est réduite à (1.8), car on déduit qu'entre les fonctions existent les relations

$$g(x)=f(x)-h(0)+k(0), \quad h(x)=f(x)-g(0)+k(0),$$
$$k(x)=f(x)-g(0)-h(0)+2k(0).$$

1.9. H. P. THIELMAN [29] étudie l'équation fonctionnelle

$$f(x+y+nxy)=f_1(x)+f_2(y) \qquad (n>0) \tag{1.9}$$

pour laquelle il a démontré que la solution générale continue est

$$f(x)=k\ln(1+nx)+f_1(0)+f_2(0), \qquad x>-\frac{1}{n}$$
$$f_1(x)=k\ln(1+nx)+f_1(0), \quad f_2(x)=k\ln(1+nx)+f_2(0)$$

où k est une constante réelle arbitraire.

Solutions banales sont $f(x)=0$, $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$.

Nous allons considérer maitenant une équation qui généralise (1.9)

$$f(ax+by+nxy+c)=f_1(x)+f_2(y), \qquad (n>0, \ ab\neq 0), \tag{1.9$_1$}$$

L'équation fonctionnelle (1.9$_1$) *a pour solution générale continue, les fonctions*

$$f(x)=k\ln\left[1+\frac{n}{ab}(x-c)\right]+c_1+c_2,$$

$$f_1(x)=k\ln\left(1+\frac{n}{b}x\right)+c_1, \quad f_2(x)=k\ln\left(1+\frac{n}{a}x\right)+c_2$$

où c_1, c_2 *et* k *sont trois constantes réelles arbitraires.*

Pour la démonstration on fait dans l'équation d'abord $x=0$ puis $y=0$. On élimine $f_1(x)$ et $f_2(y)$ et on obtient

$$f(ax+by+nxy+c)=f(ax+c)+f(by+c)-f_1(0)-f_2(0)$$

et avec les transformations

$$f(t+c)=F(t), \quad x=\frac{u}{a}, \quad y=\frac{v}{b} \qquad (ab\neq 0)$$

on obtient

$$F\left(u+v+\frac{n}{ab}uv\right)=F(u)+F(v)-f_1(0)-f_2(0)$$

équation étudiée par H. P. THIELMAN, les solutions données par nous, résultant immédiatement.

Une généralisation de l'équation de H. P. THIELMAN (1.9) pour plus de trois fonctions est

$$(1.9_2) \qquad f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i+n\sum_{i,j=1}^{p} x_i x_j+n^2\sum_{i,j,k=1}^{p} x_i x_j x_k+\cdots+n^p x_1 x_2\ldots x_p\right)$$
$$=f_1(x_1)+\cdots+f_p(x_p)$$

où les sommes se rapportent aux combinaisons simples des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$ prises 1 par 1, 2 par 2, ..., alors que les fonctions f_i sont supposées réelles et continues.

La solution générale continue de l'équation (1.9_2) *est*

$$f(x)=k\ln(1+nx)+c_1+\cdots+c_p, \quad f_i(x)=k\ln(1+nx)+c_i \qquad (i=1,\ldots,p),$$

où $x>-\frac{1}{n}$ *et* $c_1, c_2, \ldots, c_p$ *et* k *sont* $p+1$ *constantes arbitraires.*

Les solutions banales sont évidentes.

La démonstration est la même que pour le cas précédent, on fait $p-2$ variables égales à zéro, etc.

1.10. D. POMPEIU [18] partant de la formule des accroissements finis a introduit l'équation fonctionnelle

$$(1.10) \qquad \frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Nous avons considéré l'équation à trois fonctions inconnues

$$(1.10_1) \qquad \frac{f(x)-g(y)}{x-y}=h\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Si ici nous substituons $x=u+v$, $y=u-v$, nous avons

$$(1.10_2) \qquad f(u+v)-g(u-v)=2vh(2u).$$

En remplaçant v par $2v$ nous déduisons

$$f(u+2v)-g(u-2v)=4vh(2u).$$

En multipliant (1.10_2) par -2 et en additionnant la dernière équation nous obtenons

$$f(u+2v)-2f(u+v)+2g(u-v)-g(u-2v)=0.$$

En faisant $v=0$ on déduit $f(u)=g(u)$ par conséquent la fonction $f(x)$ satisfait à l'équation

$$f(u+2v)-2f(u+v)+2f(u-v)-f(u-2v)=0$$

qui est de la forme (1.7_2). Ici nous avons

$$\sum_{i=0}^{3} a_i=0, \quad \sum_{i=0}^{3} a_i\alpha_i=0, \quad \sum_{i=0}^{3} a_i\alpha_i^2=0, \quad \sum_{i=0}^{3} a_i\alpha_i^3\neq 0$$

comme $\sum_{i=0}^{3} a_i\alpha_i^3\neq 0$ il résulte que $f(x)$ est un polynôme général du deuxième degré, notamment $f(x)=ax^2+bx+c$ et alors $g(x)=f(x)$ et $h(x)=2ax+b$ où a, b, c sont des constantes arbitraires.

1.11. D. Pompeiu [19] partant d'un mémoire de C. Bourlet relatif aux fonctions indéfiniment symétriques a été conduit à l'équation fonctionnelle

$$f(x)+f(y)+xf(y)+yf(x)=f(x+y+xy), \qquad (x\neq -1). \tag{1.11}$$

Dans le travail [11] nous avons intégré

$$f(x)+g(y)+xu(y)+yv(x)=h(x+y+xy) \tag{1.11$_1$}$$

équation qui contient cinq fonctions inconnues.

L'ensemble des solutions continues de l'équation (1.11_1) est

$$\begin{aligned}
f(x)&=f_0+(v_0-u_1-v_1)x+\beta(x+1)\ln|x+1|,\\
g(x)&=g_0+(u_0-u_1-v_1)x+\beta(x+1)\ln|x+1|,\\
u(x)&=u_0+(u_0-u_1)x+\beta(x+1)\ln|x+1|,\\
v(x)&=v_0+(v_0-v_1)x+\beta(x+1)\ln|x+1|,\\
h(x)&=h_0+(u_0+v_0-u_1-v_1)x+\beta(x+1)\ln|x+1|,
\end{aligned}$$

où $f_0=f(0)$, $g_0=g(0)$, $u_0=u(0)$, $v_0=v(0)$, $h_0=h(0)$, $u_1=u(-1)$, $v_1=v(-1)$ et β une constante réelle arbitraire.

Dans le même travail nous avons étudié l'équation fonctionnelle à $2n+1$ fonctions inconnues

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)+\sum_{i=1}^{n}(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n)\,g_i(x_i) \tag{1.11$_2$}$$

$$=h\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i+\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} x_ix_j+\cdots+x_1x_2\ldots x_n\Big), \quad (x_0=0)$$

qui a comme sulution

$$f_i(x)=\frac{4-n}{2}f-[2g'+(n-3)g]x+\beta(x+1)\ln|x+1|,$$
$$g_i(x)=(n-1)g+(g-g')x+\beta(x+1)\ln|x+1|,$$
$$h(x)=nf+2(g-g')x+\beta(x+1)\ln|x+1|,$$

où $i=1,\ldots,n$ tandis que f, g, g' et β sont des constantes arbitraires.

A la même occasion nous avons considéré l'équation

$$(1.11_3)\quad (a_1x+b_1y+1)F(x)+(a_2x+b_2y+1)G(x)+(a_3x+b_3y+1)U(x)$$
$$+(a_4x+b_4y+1)V(x)=h(x+y+xy).$$

L'ensemble des solutions $F(x)$, $G(x)$, $U(x)$ et $V(x)$ de cette équation est déduit du système

$$(a_1x+1)F(x)+(a_3x+1)U(x)=F_0+U_0+(b_1F_0+b_3u_0-a_2G'-a_4V'$$
$$-b_1F'-b_3U')x+\beta(x+1)\ln|x+1|,$$
$$(b_2x+1)G(x)+(b_4x+1)V(x)=G_0+V_0+(a_2G_0+a_4V_0-a_2G'-a_4V'$$
$$-b_1F'-b_3U')x+\beta(x+1)\ln|x+1|,$$
$$a_2G(x)+a_4V(x)=a_2G_0+a_4V_0+(a_2G_0+a_4V_0-a_2G'-a_4V')x$$
$$+\beta(x+1)\ln|x+1|,$$
$$b_1F(x)+b_3U(x)=b_1F_0+b_3U+(b_1F+b_3U_0-b_1F'-b_3U')x$$
$$+G(x+1)\ln|x+1|,$$

la fonction $h(x)$ résulte de celles-ci.

1.12. On démontre facilement que les équations fonctionnelles

1° $f(x+y)=g(x)+h(y)+m(1-m^x)(1-m^y)\quad (m>0)$

a la solution générale

$$f(x)=cx-m(1-m^x)+a+b,\quad g(x)=cx-m(1-m^x)+a$$
$$h(x)=cx-m(1-m^x)+b;$$

2° $f(x+y)=e^xg(y)+e^yh(y)$

a la solution

$$f(x)=(ax+b+c)e^x,\ g(x)=(ax+b)e^x,\ h(x)=(ax+c)e^x;$$

3° $xf(y)+yg(x)=h(xy)$

a la solution

$$f(x)=c\ln|ax|,\ g(x)=c\ln|bx|,\ h(x)=c\ln|abx|;$$

4° $f(\sqrt{x^2+y^2})=g(x)+h(y), \quad x\geqq 0 \quad y\geqq 0$

a la solution

$$f(x)=cx^2+a+b, \quad g(x)=cx^2+a, \quad h(x)=cx^2+b;$$

5° $f(\sqrt{x^2+y^2+1})=g(x)+h(y)$

a la solution

$$f(x)=c(x^2-1)+a+b, \quad g(x)=cx^2+a, \quad h(x)=cx^2+b;$$

6° $f(x+y)-g(x-y)=2h(y)$

a la solution

$$f(x)=ax+b+2c, \quad g(x)=ax+b, \quad h(x)=ax+c;$$

7° $f(x+y)+g(x-y)=2h(x)$

a la solution

$$f(x)=ax+b+2c, \quad g(x)=ax+b, \quad h(x)=ax+b+c.$$

Dans ces formules a, b, c sont des constantes réelles arbitraires.

2. EQUATIONS FONCTIONNELLES COMPRENANT PLUSIEURS FONCTIONS INCONNUES, A UNE VARIABLE, NON-LINEAIRES

2.1. Nous allons commencer en rappelant que l'équation

(2.1) $$f(x+y)=\lambda f(x)f(y)$$

où λ est une constante réelle différente de zéro, en de conditions de continuité (mesurabilité), admet comme solution générale $f(x)=\frac{1}{\lambda}e^{ax}$, tandis que l'équation

(2.1$_1$) $$f(x+y)=\lambda g(x)h(y)$$

les solutions

$$f(x)=\lambda e^{ax+b+c}, \quad g(x)=e^{ax+b}, \quad h(x)=e^{ax+c}$$

ainsi que les solutions triviales $f(x)=g(x)=0$, et $h(x)$ une fonction arbitraire; $f(x)=h(x)=0$, la fonction $g(x)$ arbitraire; si $\lambda=0$ alors $f(x)=0$, et $g(x)$ ainsi que $h(x)$ des fonctions arbitraires.

L'équation

$$f(x+y)=\lambda g(x)h(y)+\nu$$

par la transformation $f(x)-\nu=\lambda\varphi(x)$ est réduite à l'équation de la forme (2 1$_1$).

Dans ce qui suit, nous allons considérer des généralisations des équations fonctionnelles d'en plus haut.

2.2. *L'équation fonctionnelle*

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n) \tag{2.2}$$

a comme solution générale continue (mesurable)

$$f(x)=e^{ax+c_1+\cdots+c_n},\quad f_i(x)=e^{ax+c_i}\qquad (i=1,\ldots,n).$$

Une première observation s'impose, notamment si l'une des fonctions du 2e membre est annulé, à l'origine, alors $f(x)\equiv 0$, un cas qui conduit aux solutions triviales et notamment quand certaines de fonctions composantes de l'équation sont identiquement nulles, un cas que nous évitons en ce qui suit.

Si à équation (2.2) nous faisons successivement des $n-2$ variables égales à zéro, on déduit

$$f(x_i+x_j)=\alpha_1\cdots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\cdots\alpha_n f_i(x_i)f_j(x_j)$$

où nous avons noté $\alpha_k=f_k(0)$. Cette équation est de la forme (2.1_1).

On démontre facilement que:

1° L'équation

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\lambda f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \tag{2.2_1}$$

où $\lambda\neq 0\in R$, a comme solution générale

$$f(x)=\lambda e^{ax+c_1+\cdots+c_n},\quad f_i(x)=e^{ax+c_i}\qquad (i=1,\ldots,n).$$

2° L'équation

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f_1(kx_1)f_2(kx_2)\cdots f_n(kx_n)\qquad (k\neq 0) \tag{2.2_2}$$

a comme solution générale

$$f(x)=e^{ax+c_1+\cdots+c_n},\quad f_i(x)=e^{\frac{a}{k}x+c_i}\qquad (i=1,\ldots,n).$$

2.3. *L'équation fonctionnelle*

$$f(x_1x_2\cdots x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$$

$x_1,\ldots,x_n>0$, *a comme solution générale*

$$f(x)=c_1\cdots c_n x^a,\quad f_i(x)=c_ix^a\qquad (i=1,\ldots,n).$$

Les variables étant positives, on peut mettre $x=e^{\ln x}$, (§ 1.3).

2.4. *La solution générale de l'équation fonctionnelle*

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{k}\right)=\prod_{i=1}^{r}f_i(x_{i_1}+\cdots+x_{im}),\quad r=\binom{n}{m}, \tag{2.4}$$

k étant un nombre donné le symbole Π *indique le produit à r, des fonctions dépendant chacune d'une des sommes des combinaisons simples de n variables* $x_1, x_2,\ldots, x_n$ *prises à m, est donné par*

$$f(x)=e^{ax+c_1+\cdots+c_r},\quad f_i(x)=e^{\frac{\frac{a}{m}}{\frac{m}{n}\cdot rk}x+c_i}\qquad (i=1,\ldots,r).$$

La démonstration est la même que pour le cas 1.4.

2.5. *L'équation fonctionnelle*

$$(2.5)\qquad f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{k}\right)=\prod_{i=1}^{r_1} f_{m_1}(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{m_1}})\cdots\prod_{i=1}^{r_p} f_{m_p}(x_{i_1}+\cdots+x_{i_{m_p}})$$

k étant une constante, $r_s=\binom{s}{m_s}$ et Π indique un produit de fonctions qui dépendent de la somme des r_s variables étendues aux combinaisons des n variables prises à $r_s \leqq n$, où $s=1, \ldots, p$, a comme solution générale

$$f(x)=e^{\frac{k}{n}\sum\limits_{i=1}^{p} m_i \binom{n}{m_i} ax+c_1+\cdots+c_\lambda}, \qquad f_i(x)=e^{ax+c_i}, \qquad (i=1, \ldots, \lambda),$$

où $\lambda=r_1+\cdots+r_p$.

La démonstration est la même que pour le cas 1.5.

2.6. Prof. D. S. Mitrinović [15] a introduit l'équation fonctionnelle

$$(2.6)\qquad f(x)+g(y)=h(x)k(y)$$

qui a la solution générale continue (mesurable)

$$f(x)=a, \quad g(x)=bk(x)-a, \quad h(x)=b, \quad k(x) \text{ arbitraire;}$$

$$f(x)=dh(x)-c, \quad g(x)=c, \quad h(x) \text{ arbitraire}, \quad k(x)=d.$$

Nous avons considéré l'équation

$$(2.6_1)\qquad f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)=g_1(x_1)g_2(x_2)\cdots g_n(x_n)$$

les fonctions étant continues.

Dans l'hypothèse qu'aucune des fonctions de la partie droite s'annule dans l'origine, faisant des $n-2$ des variables égales à zéro (si une fonction est annulée à l'origine, alors nous particularisons la variable à une valeur $x_0 \neq 0$), on déduit l'équations de forme

$$f_i(x_i)+f_j(x_j)+C=kg_i(x_i)g_j(x_j)$$

une équation facilement rapportée à la forme (2.6), les solutions résultant des celles données plus haut [5], [6].

2.7. *L'équation fonctionnelle*

$$(2.7)\qquad f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=a^{x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n} f_1(x_1)f_2(x_2)\cdots f_n(x_n)$$

où $a>0$, et $x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n$ est la somme des combinaisons simples des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prises deux à deux, a comme solution générale continue (mesurable)

$$f(x)=a^{\frac{x^2}{2}+cx+c_1+\cdots+c_n}, \qquad f_i(x)=a^{\frac{x^2}{2}+cx+c_i} \qquad (i=2, \ldots, n),$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant des constantes arbitraires.

En effet si on procède aux substitutions

$$f(x)=a^{\frac{x^2}{2}}g(x) \quad \text{et} \quad f_i(x)=a^{\frac{x^2}{2}}g_i(x)$$

l'équation donnée est ramenée à la forme (2.2).

Nous allons montrer les suivants.

L'équation fonctionnelle

$$(2.7_1) \qquad f(ax+by+c)=\alpha^{xy}g(x)h(y) \qquad (\alpha>0)$$

a comme solution générale

$$f(x)=c_1c_2\alpha^{\frac{(x-c)^2}{2ab}}e^{k(x-c)}$$

$$g(x)=c_1\alpha^{\frac{ax^2}{2b}}e^{akx}, \quad h(x)=c_2\alpha^{\frac{bx^2}{2a}}e^{bkx}; \quad c_1,\ c_2,\ k \text{ const.}$$

Les solutions triviales sont: $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(x)=0$; $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(x)$ arbitraire; $f(x)=0$, $g(x)$ arbitraire $h(x)=0$ solutions que nous excluons dans la démonstration qui suite.

En faisant en (2.7_1) successivement $y=0$ et $x=0$, et éliminant $g(x)$ et $h(y)$ on déduit

$$(2.7_2) \qquad f(ax+by+c)=ce^{xy}f(ax+c)f(by+c)$$

où nous avons noté $c_1=g(0)$, $c_2=h(0)$, $(c_1c_2)^{-1}=c$.

En amplifiant (2.7_2) avec c et notant $cf(t+c)=F(t)$, $ax=u$, $by=v$, $\alpha^{\frac{1}{ab}}=\beta$ on obtient

$$F(u+v)=\beta^{uv}F(u)F(v).$$

En procédant dans cette équation à la substitution

$$F(t)=\beta^{\frac{t^2}{2}}\Phi(t)$$

nous parvenons à $\Phi(u+v)=\Phi(u)\Phi(v)$. Considérant les solutions de ces équations, en procédant à l'inverse nous parvenons à celles de l'équation donnée.

2.8. *L'équation fonctionnelle*

$$(2.8) \qquad f(ax+by+nxy+c)=f_1(x)f_2(y) \qquad (n>0,\ ab\neq 0)$$

a pour solution générale continue

$$f(x)=c_1c_2\left[1+\frac{n}{ab}(x-c)^k\right],\ f_1(x)=c_1\left(1+\frac{n}{b}x\right)^k,\ f_2(x)=c_2\left(1+\frac{n}{a}x\right)^k$$

où c_1, c_2 et k sont trois constantes réelles arbitraires, ainsi que les solutions banales: $f(x)=0$, $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$; $f(x)=0$, $f_1(x)=0$, $f_2(x)$ arbitraire, $f(x)=0$, $f_1(x)$ arbitraire, $f_2(x)=0$.

La démonstration est la même que pour le cas (1.9).

Une généralisation de l'équation (2.8) pour plus de trois fonctions est

$$(2.8_1)\qquad f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i + n\sum_{i,j=1}^{p} x_i x_j + n^2 \sum_{i,j,k=1}^{p} x_i x_j x_k + \cdots + n^p x_1 x_2 \ldots x_p\right) = f_1(x_1)\cdots f_p(x_p)$$

où les sommes se rapportent aux combinaisons simples des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_p$ prises par 1, par 2, ..., alors que les fonctions f_i sont supposées réelles et continues. La solution générale, réelle et continue de l'équation (2.8_1) est

$$f(x) = c_1 c_2 \cdots c_p (1+nx)^k,\ f_i(x) = c_i(1+nx)^k, \qquad (i=1, \ldots, p,\ n>0)$$

où $x > -\dfrac{1}{n}$, et $c_1, c_2, \ldots, c_p$ et k sont $p+1$ constantes arbitraires.

Les solutions banales sont évidentes, quand une ou plusieurs fonctions du deuxième membre sont nulles.

2.9. N. I. Lobacevski **[12]** a introduit l'équation fonctionnelle

$$(2.9)\qquad f(x+y)f(x-y) = [f(x)]^2.$$

La solution générale de cette équation est $f(x) = a\cdot\alpha^x$, $\alpha > 0$, ainsi que les solutions triviales $f(x)=0$ et $f(x)=c$.

Nous avons introduit l'équation suivante

$$(2.9_1)\qquad f(x+y)\,g(x+y) = h^2(x)$$

avec f, g, h fonctions continues, qui a la solution généıale

1° $f(x)=0$, $\quad g(x)=0$, $\quad h(x)=0$;

2° $f(x)=0$, $\quad g(x)$ arbitraire, $\quad h(x)=0$;

3° $f(x)$ arbitraire, $\quad g(x)=0$, $\quad h(x)=0$;

4° $f(x)=a\cdot c^x$, $\quad g(x)=a\lambda^2 c^x$, $\quad h(x)=\varepsilon a\lambda c^x$

où $c>0$ et $\varepsilon^2=1$.

Les solutions 1°, 2° et 3° sont évidentes. Pour déterminer la solution non-triviale 4°, nous faisons $y=0$ alors

$$f(x)\,g(x) = h^2(x) \quad \text{donc} \quad f(x+y)\,g(x-y) = f(x)\,g(x).$$

En échangeant y en $-y$ nous déduisons

$$f(x-y)\,g(x+y) = f(x)\,g(x) \Rightarrow f(x-y)\,g(x+y) = f(x+y)\,g(x-y).$$

En notant $x-y=u$, $x+y=v$ nous avons $f(u)\,g(v) = f(v)\,g(u)$. Supposant que $g(x)\not\equiv 0$, il existe donc une valeur a ainsi que $g(a)\neq 0$. En mettant $v=0$, on déduit

$$f(u) = \frac{f(a)}{g(a)}\,g(u) \Rightarrow f(x) = kg(x)$$

k étant une constante. Il en résulte

$$h^2(x)=kf^2(x) \Rightarrow k>0, \qquad k=\lambda^2$$

avec celles-ci on arrive à l'équation de N. I. LOBACEVSKI.

Avec H. ROSCĂU [23] nous avons étudié l'équation

$$F(x+y)\,G(x-y)=H^2(x) \tag{2.9$_2$}$$

dans laquelle, F, G, H constituent les matrices cycliques suivantes

$$F(x)=\begin{Vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_3(x) & f_1(x) & f_2(x) \\ f_2(x) & f_3(x) & f_1(x) \end{Vmatrix}, \quad G=\begin{Vmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ g_3 & g_1 & g_2 \\ g_2 & g_3 & g_1 \end{Vmatrix}, \quad H=\begin{Vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_3 & h_1 & h_2 \\ h_2 & h_3 & h_1 \end{Vmatrix}, \tag{2.9$_3$}$$

Les éléments de ces matrices f_i, g_i, h_i, $i=1, 2, 3$ sont des fonctions réelles et continues d'une seule variable réelle.

L'équation (2.9$_2$) est équivalente au système d'équations

$$f_1(x+y)g_1(x-y)+f_2(x+y)g_3(x-y)+f_3(x+y)g_2(x-y)=h_1^2(x)+2h_2(x)h_3(x),$$
$$f_1(x+y)g_2(x-y)+f_2(x+y)g_1(x-y)+f_3(x+y)g_3(x-y)=h_3^2(x)+2h_1(x)h_2(x),$$
$$f_1(x+y)g_3(x-y)+f_2(x+y)g_2(x-y)+f_3(x+y)g_1(x-y)=h_2^2(x)+2h_3(x)h_1(x).$$

L'étude a été faite en introduisant des fonctions hypercomplexes conjuguées de variable réelle, à $\theta^3=1$.

2.10. On démontre facilement que les équations fonctionnelles

1° $\begin{vmatrix} f(x) & f_1(x+h) \\ f_2(x) & f_3(x+2h) \end{vmatrix}=0$

a la solution générale continue

$$f(x)=ac^x, \quad f_3(x)=abc^x,$$

tandis que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ deux fonctions arbitraires continues de manière que

$$f_1(x)f_2(x)=a^2bc^{2x}.$$

2° $f(x+y)+g(x-y)=2h(x)\cos y$

a la solution générale $f(x)=a(1+\cos x)+b\sin x-c$,

$$g(x)=-a(1-\cos x)+b\sin x+c, \quad h(x)=a\cos x+b\sin x.$$

3° $f\left(\dfrac{x+y}{1+\dfrac{xy}{C^2}}\right)=g(x)\,h(y) \qquad (C\neq 0),$

a la solution générale

$$f(x)=ab\left(\frac{C+x}{C-x}\right)^c, \quad g(x)=a\left(\frac{C+x}{C-x}\right)^c, \quad h(x)=b\left(\frac{C+x}{C-x}\right)^c$$

4° $f(x)\cdot g(y)=h(\sqrt{x^2+y^2}), \qquad (x, y>0)$

a la solution générale

$$f(x)=ae^{cx^2}, \quad g(x)=be^{cx^2}, \quad h(x)=abe^{cx^2}.$$

5° $f(x)g(y)=h(|x|+|y|)$

a la solution générale

$$f(x)=ae^{c|x|}, \quad g(x)=be^{c|x|}, \quad h(x)=ab^{c|x|}.$$

Les solutions triviales sont faciles a écrite, a, b, c et k étant des constantes arbitraires.

3. EQUATIONS FONCTIONNELLES À PLUSIEURS VARIABLES

3.1. L'équation fonctionnelle qui généralise l'équation de CAUCHY comprenant plusieurs variables est la suivante

$$(3.1) \qquad f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_n}, \ldots, x_{n_1}+\cdots+x_{n_n}) \\ =f(x_{1_1}+\cdots+x_{n_1})+\cdots+f(x_{1_n}+\cdots+x_{n_n})$$

On sait qu'elle admet comme solution générale, $f(x)$ étant une fonction continue (mesurable), la fonction linéaire homogène à n variables

$$f(x_1, \ldots, x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

a_i étant des constantes arbitraires.

On vérifie facilement les suivantes

1° L'équation fonctionnelle [25]

$$(3.1_1) \qquad f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_p}, \ldots, x_{n_1}+\cdots+x_{n_p}) \\ =f(x_{1_1}, \ldots, x_{n_1})+\cdots+f(x_{1_p}, \ldots, x_{n_p}),$$

dans la même condition que (3.1) a la solution générale

$$f(x_1, \ldots, x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

et l'équation

$$(3.1_2) \qquad f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_p}, \ldots, x_{n_1}+\cdots+x_{n_p}) \\ =f(x_{1_1}, \ldots, x_{n_1})+\cdots+f(x_{1_p}+\cdots+x_{n_p})+C, \qquad (p\geqq 2),$$

C étant une constante, la fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a_1x_1+a_1x_2+\cdots+a_nx_n-\frac{C}{p-1}.$$

3.2. *L'équation fonctionnelle*

$$(3.2)\qquad f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_p},\ldots,x_{n_1}+\cdots+x_{n_p}) =f_1(x_{1_1},\ldots,x_{n_1})+\cdots+f_p(x_{1_p},\ldots,x_{n_p})$$

où f et f_i sont des fonctions continues, a comme solution générale

$$f(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+c_1+\cdots+c_p,$$

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+c_i\qquad(i=1,\ldots,p).$$

On fait la démonstration en remenant l'équation (3.2) à la forme (3.1_2). Pour cela on écrit successivement en (3.2)

$$x_{1_2}=x_{1_3}=\cdots+x_{1_p}=0,\ldots,x_{n_2}=x_{n_3}=\cdots=x_{n_p}=0,$$
$$\vdots$$
$$x_{1_1}=x_{1_2}=\cdots=x_{1_{p-1}}=0,\ldots,x_{n_1}=x_{n_2}=\cdots=x_{n_{p-1}}=0,$$

et alors, avec la notation $f_i(0,\ldots,0)=f_i$, $(i=1,\ldots,p)$, on a

$$f(x_{1_1},x_{2_1},\ldots,x_{n_1})=f_1(x_{1_1},x_{2_1},\ldots,x_{n_1})+f_2+\cdots+f_p,$$
$$\vdots$$
$$f(x_{1_p},x_{2_p},\ldots,x_{n_p})=f_p(x_{1_p},\ldots,x_{n_p})+f_1+\cdots+f_{p-1}.$$

Si on remplace les expressions des fonctions du deuxième membre, dans (3.2), on obtient

$$f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_p},\ldots,x_{n_1}+\cdots+x_{n_p}) =f(x_{1_1},\ldots,x_{n_1})+\cdots+f(x_{1_p},\ldots,x_{n_p})-(p-1)(f_1+f_2+\cdots+f_p)$$

équation qui a la forme (3.1_2), d'où résultent immédiatement les solutions donnnées.

3.3. *La solution générale continue de l'équation fonctionnelle*

$$(3.3)\qquad f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_p},\ldots,x_{n_1}+\cdots+x_{n_p}) =f_1(kx_{1_1},\ldots,kx_{n_1})+\cdots+f_p(kx_{1_p},\ldots,kx_{n_p})$$

où $k\neq 0$ est une constante donnée est

$$f(x_1,\ldots,x_n)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+c_1+\cdots+c_p$$

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{k}(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+c_i\qquad(i=1,\ldots,p).$$

On fait la démonstration exactement comme plus haut. On déduit

$$f_i(kx_{i_1},\ldots,kx_{i_p})=f(x_{i_1}+\cdots+x_{i_p})-(f_1+f_2+\cdots+f_{i-1}+f_{i+1}+\cdots+f_p)$$

$(i=1,\ldots,p)$, expressions qui, remplacées en (3.3), conduisent à une équation de la forme (3.1_2), d'où on arrive facilement à solution donnée.

Ces problèmes une fois résolus, on fait sans difficultés l'extension à des fonctions de plusieurs variables des autres types d'équation étudiées par nous dans les chapitres 1 et 2, la méthode pour la détermination des solutions étant la même que celle exposée auparavant, ce n'est plus le cas de reproduire ces équations.

3.4. Une équation qui généralise l'un des quatre types d'équation de CAUCHY est

$$f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_p},\ldots,x_{n_1}+\cdots+x_{n_p}) = f(x_{1_1},\ldots,x_{n_1})\ldots f(x_{1_p},\ldots,x_{n_p}) \tag{3.4}$$

f étant une fonction continue.

Cette équation a comme solution générale

n pair: $f(x_1,\ldots,x_n)=e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}$ et $f=0$, $f=1$

n impair: $f(x_1,\ldots,x_n)=\pm e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}$ et $f=0$, $f=1$, $f=-1$.

On déduit facilement que *l'équation fonctionnelle*

$$f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_p},\ldots,x_{n_1}+\cdots+x_{n_p}) = f_1(kx_{1_1},\ldots,kx_{1_p})\ldots f_n(kx_{n_1},\ldots,kx_{n_p}),$$

où k est une constante donnée, a comme solution générale continue

$$f(x_1,\ldots,x_n)=e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n+c_1+\cdots+c_n},\quad f_i=e^{\frac{1}{k}(a_1x_1+\cdots+a_nx_n)+c_i}.$$

Les solutions triviales sont $f\equiv 0$ et au moins l'une des fonctions de droite, identiquement nulle.

3.5. Le prof. T. POPOVICIU [22] a proposé le problème suivant:

Déterminer les fonctions continues $f(x)$ d'une variable réelle de telle manière que $f(x+y+z)$ soit le produit d'une fonction de x par une fonction de y et z.

De l'énoncé résulte l'équation fonctionnelle

$$f(x+y+z)=g(x)\,h(y,z) \tag{3.5}$$

où les fonctions sont continues.

Les solutions triviales sont: $f(x)=0$, $g(x)$ arbitraire, $h(y,z)=0$; $f(x)=0$, $g(x)=0$, $h(y,z)$ arbitraire. Par la suite nous évitons ces cas particuliers.

Si nous faisons dans (3.5), $x=0$ nous obtenons

$$f(y+z)=g(0)\,h(y,z). \tag{3.5$_1$}$$

Si $g(0)=0$ alors $f(t)=0$ cas trivial que nous excluons. Donc nous supposons $g(0)\neq 0$, soit $g(0)=a$, si nous remplaçons dans (3.5) l'expression de $h(y,z)$ tirée de la relation (3.5$_1$) nous obtenons

$$f(x+y+z)=\frac{1}{a}g(x)f(y+z) \tag{3.5$_2$}$$

Avec $y=z=0$ nous avons $f(x)=\frac{b}{a}g(x)$, où $f(0)=b\neq 0$. Donc $g(x)=\frac{a}{b}f(x)$ et avec cela, l'équation (3.5_2) devient

$$f(x+y+z)=\frac{1}{b}f(x)f(y+z) \Rightarrow f(x+t)=\frac{1}{b}f(x)f(t), \quad \text{où} \quad y+z=t,$$

équation qui a la forme (2.1). Par conséquence, pour l'équation (3.5) on déduit les suivantes solutions générales

$$f(x)=f(0)\cdot e^{cx}, \quad g(x)=g(0)\cdot e^{cx}, \quad h(y,z)=\frac{f(0)}{g(0)}e^{c(y+z)}, \quad \text{c const.}$$

3.6. Employant un procédé analogue au procédé précédent, on voit que *l'équation fonctionnelle*

$$f(x+y+z)=g(x)+h(y,z)$$

admet comme solution générale continue

$$f(x)=ax+f(0), \quad g(x)=ax+g(0), \quad h(y,z)=a(y+z)+f(0)-g(0).$$

3.7. Nous donnons trois extensions à l'équation fonctionnelle (3.5).

1° L'équation fonctionnelle

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2,\ldots,x_n)$$

a la solution générale continue

$$f(x)=f(0)e^{cx}, \quad f_1(x)=f_1(0)e^{cx}, \quad f_2(x_2,\ldots,x_n)=\frac{f(0)}{f_1(0)}e^{c(x_2+\cdots+x_n)}$$

2° L'équation fonctionnelle

$$f(x_1+x_2+\cdots+x_n)=f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_i(x_i)f_p(x_{i+1},\ldots,x_n)$$

a la solution générale continue

$$f(x)=f(0)\cdot e^{cx}, \quad f_i(x)=f_i(0)e^{cx}, \quad f_p(x_{i+1},\ldots,x_n)=\frac{f(0)}{f_1(0)\ldots f_i(0)}e^{c(x_{i+1}+\cdots+x_n)}.$$

3° L'équation fonctionnelle

$$f(x_{1_1}+\cdots+x_{1_p},\ldots,x_{n_1}+\cdots+x_{n_p})=f_1(x_{1_1},\ldots,x_{1_p})\ldots f_n(x_{n_1},\ldots,x_{n_p})$$

a la solution générale continue

$$f(x_1,\ldots,x_n)=e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n+c_1+\cdots+c_n},$$

$$f_i(x_1,\ldots,x_n)=e^{a_1x_1+\cdots+a_nx_n+c_i} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

et les solutions triviales $f=0$ et un au moins des fonctions de droite identiquement nulle.

3.8. L'équation fonctionnelle

$$(3.8_1) \qquad f(x+y)-f(x)-f(y)=\varphi(x,y)$$

où $\varphi(x,y)$ est une fonction donnée et $f(x)$ est inconnue, a été étudiée par G. Galbură, Th. Anghelutza, M. Ghermănescu, en supposant des hypothèses supplémentaires sur la fonction $f(x)$. Le résultat suivant appartenant à D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković [16] n'intervient aucune condition supplémentaire sur $f(x)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3.8_1) admette une solution, c'est que la fonction donnée $\varphi(x)$ satisfasse la relation

$$(3.8_2) \qquad \varphi(z, x+y)-\varphi(x, y+z)+\varphi(x, y)-\varphi(y, z)=0.$$

Observation. La relation (3.8_2) conçue comme une équation fonctionnelle admet comme solution générale les fonctions (3.8_1), ou $f(x)$ est une fonction arbitraire. D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković qui ont étudié de même des équations déduites de (3.8_2) par l'inversion des arguments, une partie de ces équations admettant toujours à la solution (3.8_1), tandis que par exemple l'équation

$$(3.8_3) \qquad \varphi(x, y+z)-\varphi(y, x+z)-\varphi(x, z)+\varphi(y, z)=0$$

a la solution générale

$$(3.8_4) \qquad \varphi(x, y)=f(x+y)-f(y)+g(x)$$

où f et g sont des fonctions arbitraires.

Nous allons étudier la généralisation suivante de l'équation (3.8_1)

$$(3.8_5) \qquad f(x+y)-u(x)-v(y)=\varphi(x, y)$$

où φ est un fonction donnée et f, u, v sont à trouver, mais sans y mettre de conditions restrictives.

Nous allons étudier d'abord l'équation

$$(3.8_6) \qquad f(x+y)-u(x)=\varphi(x, y)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3.8_6) *admette une solution f, u, c'est que la fonction φ vérifie la relation*

$$(3.8_7) \qquad \varphi(x, y+z)-\varphi(y, x+z)-\varphi(x, y)+\varphi(y, x)=0.$$

Dans le cas de la condition (3.8_7) remplie, l'ensemble des solutions de l'équation (3.8_6) est

$$(3.8_8) \qquad f(x)=\varphi(0, x)+a, \quad u(x)=\varphi(0, x)-\varphi(x, 0)+a.$$

Démonstration. Le calcul direct nous montre qu'une fonction de la forme (4.8_6) vérifie la relation (3.8_7). Réciproquement, si (3.8_7) s'avère, on a:

$$\varphi(x, z)-\varphi(0, x+z)-\varphi(x, 0)+\varphi(0, x)=0$$

donc

$$(3.8_9) \qquad \varphi(x, y)=\varphi(0, x+y)+\varphi(x, 0)-\varphi(0, x)$$

ce qui nous montre qu'il y a de f et u vérifiant (3.8_6). Pour obtenir toutes ces paires de fonctions, nous écrivons l'équation (3.8_6) sous la forme:

$$f(x+y)-\varphi(0, x+y)=u(x)+\varphi(x, 0)-\varphi(0, x)$$

les deux membres dépendant de variables indépendantes distinctes, sont égaux à une constante a, d'où on déduit la solution générale (3.8_8).

Corrolaire. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (3.8_7) *est donnée par*

$$\varphi(x, y) = f(x+y) - u(x)$$

où f et u sont de fonctions arbitraires.

Ce corrolaire-ci complète les résultats de D. S. MITRINOVIĆ et D. Ž. ĐOKOVIĆ dans le sens qu'on a résolu une équation apparentée avec (3.8_2) nommément (3.8_7), qui ne se trouve pourtant pas dans la liste des équations étudiées par ces auteurs.

Observation. L'équation (3.8_7) a été mentionée aussi par M. GHERMĂNESCU, lequel a montré au cours d'une démonstration que la fonction (3.8_1) la vérifie, mais ne s'était point intéressé à trouver toutes ses solutions.

Les conditions (3.8_7) et (3.8_9) sont équivalentes.

En réalité (3.8_7) implique d'une manière évidente (3.8_9). Si l'on admet (3.8_9) la fonction φ est de la forme (3.8_6) et alors résulte (3.8_7).

Condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (3.8_5) ait une solution f, u, v est que la fonction donnée φ vérifie la relation

$$(3.8_{10}) \qquad \begin{aligned} &\varphi(z, x+y) - \varphi(x, y+z) + \varphi(x, y) - \varphi(y, z) - \varphi(0, x+y) \\ &+ \varphi(0, y+z) + \varphi(y, 0) - \varphi(0, y) - \varphi(z, 0) + \varphi(0, z) = 0. \end{aligned}$$

Quand la condition (3.8_{10}) est réalisée, l'ensemble des solutions de l'équation (3.8_5) est constitué par les fonctions:

$$(3.8_{11}) \quad f(x) = f_1(x) + h(x) + a + b, \quad u(x) = u_1(x) + h(x) + a, \quad v(x) = v_1(x) + h(x) + b$$

ou f_1, u_1, v_1 est une solution de l'équation (3.8_5) $h(x)$ une solution arbitraire de l'équation de CAUCHY, $h(x+y) = h(x) + h(y)$, tandis que a, b des constantes arbitraires.

Démonstration. Posons l'équation (3.8_5) sous la forme de l'équation (3.8_6)

$$f(x+y) - u(x) = \varphi(x, y) + v(y)$$

Tenant compte de ce qui a été indiqué, cette équation a des solutions quand et seulement quand $\varphi(x, y) + v(y)$ vérifie la condition (3.8_9) c'est à-dire quand si et seulement s'il existe une solution v de l'équation fonctionnelle

$$(3.8_{12}) \quad \varphi(x, y) + v(y) = \varphi(0, x+y) + v(x+y) + \varphi(x, 0) + v(0) - \varphi(0, x) - v(x).$$

Mais on écrit cette équation

$$\begin{aligned} &[v(x+y) - v(0)] - [v(x) - v(0)] - [v(y) - v(0)] \\ &\qquad\qquad = \varphi(x, y) - \varphi(0, x+y) + \varphi(0, x) - \varphi(x, 0) \end{aligned}$$

donc elle admet des solutions quand et seulement quand la fonction du membre II satisfait la condition (3.8_2). En faisant les calculs nous obtenons la condition (3.8_{10}). Soit (f_1, u_1, v_1), (f, u, v) deux solutions de l'équation (3.8_5); alors

$$f(x+y) - f_1(x+y) = [u(x) - u_1(x)] + [v(x) - v_1(x)];$$

il résulte que $f - f_1$, $u - u_1$, $v - v_1$ vérifient l'équation de PEXIDER, ce qu'implique les formules (3.8_{11}).

La condition (3.8_{10}) peut être établie aussi par la réduction de l'équation (3.8_1) à la forme (3.8_1) sans passer par la forme intermédiaire (3.8_6). En réalité, s'il y a des fonctions f, u, v vérifiant (3.8_5) nous pouvons supposer sans restriction de la généralité que $u(0)=v(0)=0$ (en faisant au besoin l'addition ou la soustraction de certaines constantes). De (3.8_5) nous déduisons

$$(3.8_{13})\qquad \begin{gathered} f(y)-v(y)=\varphi(0, y), \quad f(x)-u(x)=\varphi(x, 0), \\ f(x+y)-f(x)-f(y)=\varphi(x, y)-\varphi(0, y)-\varphi(x, 0). \end{gathered}$$

Donc si (3.8_5) a une solution (3.8_{13}) en a aussi une. Inversement, si (3.8_{13}) a une solution nous écrivons

$$f(x+y)-[f(x)-\varphi(x, 0)]-[f(y)-\varphi(0, y)]=\varphi(x, y)$$

d'où l'on voit que (3.8_5) a aussi une solution. Mais (3.8_{13}) aura une solution alors et seulement alors que $\varphi(x, y)-\varphi(0, y)-\varphi(x, 0)$ vérifie la condition (3.8_2). Les calculs nous conduisent à (3.8_{10}).

4. EQUATIONS FONCTIONNELLES DEFINISSANT DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Les fonctions trigonométriques circulaires ou hyperboliques, directes ou inverses ont été caractérisées par des équations ou par des systèmes d'équations fonctionnelles, suivies ou non par certaines conditions supplémentaires, en diverses manières.

Nos résultats dans cette direction, nous les exposons dans ce qui suit.

4.1. *Les solutions générales de l'équation fonctionnelle*

$$(4.1)\qquad f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)}{1+\varepsilon g(x)\, h(y)}$$

où $\varepsilon=-1$ *respectivement* $\varepsilon=1$, *sont*

$$\varepsilon=-1 \quad f(x)=\operatorname{tg}(\alpha x+c_1+c_2), \quad g(x)=\operatorname{tg}(\alpha x+c_1), \quad h(x)=\operatorname{tg}(\alpha x+c_2);$$

$$f(x)=0, \quad g(x)=-h(x) \ \textit{arbitraires};$$

$$\varepsilon=1, \quad f(x)=th(\alpha x+c_1+c_2), \quad g(x)=th(\alpha x+c_1), \quad h(x)=th(\alpha x+c_2),$$

respectivement $f(x)=0$, $g(x)=-h(x)$ *arbitraires*; $f(x)=g(x)=h(x)=1$, $f(x)=$ $=g(x)=h(x)=-1$; α_1, c_1, c_2 *constantes arbitraires.*

En posant $f(0)=f_0$, $g(0)=g_0$ et $h(0)=h_0$ et en faisant $y=0$, respectivement $x=0$, et éliminant les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ on obtient une équation qui peut être écrite

$$(4.1_1)\qquad f(x+y)=\frac{\dfrac{f(x)+f(y)}{1+\varepsilon f(x)f(y)}-\dfrac{g_0+h_0}{1+\varepsilon g_0h_0}}{1-\varepsilon\dfrac{g_0+h_0}{1+\varepsilon g_0h_0}\cdot\dfrac{f(x)+f(y)}{1+\varepsilon f(x)f(y)}}, \text{ avec } f_0=\frac{g_0+h_0}{1+\varepsilon g_0h_0},$$

l'équation (4.1_1) devient

$$f(x+y)=\frac{\dfrac{f(x)-f_0}{1-\varepsilon f_0 f(x)}+f(y)}{1+\varepsilon f(y)\dfrac{f(x)-f_0}{1-\varepsilon f_0 f(x)}}.$$

En notant

$$F(x)=\frac{f(x)-f_0}{1-\varepsilon f_0 f(x)}, \quad \text{d'où} \quad f(x)=\frac{F(x)+f_0}{1+\varepsilon f_0 F(x)}$$

on obtient que la fonction $F(x)$ satisfait l'équation fonctionnelle

$$F(x+y)=\frac{F(x)+F(y)}{1+\varepsilon F(x)F(y)}$$

qui a la solution générale $f(x)=\operatorname{tg} cx$ si $\varepsilon=-1$ et $f(x)=\operatorname{tg} hcx$ si $\varepsilon=1$, avec $c \in R$ constante arbitraire.

4.2. L'article intéressant de P. M. VASIĆ et R. R. JANIĆ [30] a été complété par nous avec les équations fonctionnelles suivantes:

1° L'équation

$$(4.2_1) \qquad f(x+y)=\frac{g(x)\,h(y)-1}{g(x)+h(y)}$$

a comme solution générale

$$f(x)=\operatorname{ctg}(\alpha x+c_1+c_2), \quad g(x)=\operatorname{ctg}(\alpha x+c_1), \quad h(x)=\operatorname{ctg}(\alpha x+c_2);$$

2° L'équation

$$(4.2_2) \qquad f(x+y)=\frac{g(x)\,h(y)-2}{g(x)+h(y)-2}$$

a la solution

$$f(x)=1-\operatorname{ctg}(\alpha x+c_1+c_2), \quad g(x)=1-\operatorname{ctg}(\alpha x+c_1), \quad h(x)=1-\operatorname{ctg}(\alpha x+c_2);$$

3° L'équation

$$(4.2_3) \qquad f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)-2g(x)\,h(y)}{1-(1-\varepsilon)\,g(x)\,h(y)}$$

a la solution si $\varepsilon=-1$

$$f(x)=\frac{\sin(\alpha x+c_1+c_2)}{\sin(\alpha x+c_1+c_2)-\cos(\alpha x+c_1+c_2)},$$

$$g(x)=\frac{\sin(\alpha x+c_1)}{\sin(\alpha x+c_1)-\cos(\alpha x+c_1)}, \quad h(x)=\frac{\sin(\alpha x+c_2)}{\sin(\alpha x+c_2)-\cos(\alpha x+c_2)},$$

tandis que si $\varepsilon=1$, l'équation devient

$$(4.2_4) \qquad f(x+y)=g(x)+h(y)-2g(x)\,h(y)$$

qui a la solution générale

$$f(x)=\frac{sh(\alpha x+c_1+c_2)}{sh(\alpha x+c_1+c_2)-ch(\alpha x+c_1+c_2)},$$

$$g(x)=\frac{sh(\alpha x+c_1)}{sh(\alpha x+c_1)-ch(\alpha x+c_1)}, \quad h(x)=\frac{sh(\alpha x+c_2)}{sh(\alpha x+c_2)-ch(\alpha x+c_2)};$$

4° L'équation

$$(4.2_5) \qquad f(x+y)=\frac{f(x)+h(y)+2(1-\cos a)\,g(x)\,h(y)}{1-2(1-\cos a)\,g(x)\,h(y)}$$

a comme solution générale

$$f(x)=\frac{\sin(cx+c_1+c_2)}{2\sin\frac{a}{2}\cos\left(cx+c_1+c_2+\frac{a}{2}\right)}, \quad g(x)=\frac{\sin(cx+c_1)}{2\sin\frac{a}{2}\cos\left(cx+c_1+\frac{a}{2}\right)}$$

$$h(x)=\frac{\sin(cx+c_2)}{2\sin\frac{a}{2}\cos\left(cx+c_2+\frac{a}{2}\right)}.$$

Dans $(4\cdot 2_1)$—$(4\cdot 2_5)$, c, c_1, c_2 et α sont des constantes arbitraires.

4.3. Nous allons donner quelques équations fonctionnelles qui caractérisent les fonctions trigonométrique inverses.

On sait que les équations fonctionnelles

$$(4.3) \qquad f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right), \quad g(x)+g(y)+a=g\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

ont comme solutions générales

$$f(x)=c \text{ arc tg } x \text{ respectivement } g(x)=c \text{ arc tg } x-a$$

L'équation fonctionnelle

$$(4.3_1) \qquad f(x)+g(y)=h\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

a comme solution générale

$$f(x)=c \operatorname{arctg} x+c_1, \quad g(x)=c \operatorname{arctg} x+c_2, \quad h(x)=c \operatorname{arctg} x+c_1+c_2$$

c, c_1, $c_2 \in R$ constantes arbitraires.

En effet, si dans (4.3_1) on fait premièrement $y=0$, $x=t$ et puis $x=0$, $y=t$, on déduit $h(t)=f(t)+g_0$, $g(t)=f(t)+g_0-f_0$ expressions qui, remplacées dans (4.3_1), donnent

$$f(x)+f(y)-f_0=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

équation qui est de forme (4.3).

4.4. *L'équation fonctionnelle*

$$f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n)=f\left(\frac{\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]}(-1)^{k+2}p_{2k+1}}{(-1)^{k+2}p_{2k}}\right)$$

où $\left[\frac{i}{2}\right]$ *représente la partie entière du nombre* $\frac{i}{2}$, *tandis que* p_k *représente la somme de tous les produits des combinaisons simples des variables* $x_1, \ldots, x_n$ *prises* k *à* k, *a comme solution générale*

$$f(x)=c \operatorname{arc\,tg} x+c_1+c_2+\cdots+c_n, \quad f_i(x)=c \operatorname{arc\,tg} x+c_1$$

$i=1, 2, \ldots, n$ et $c_i \in R$ *constantes arbitraires.*

Pour la démonstration, nous faisons successivement $n-2$ variables égales à zéro. L'équation se réduit ainsi à une équation de la forme (4.3_1).

4.5. *Une équation fonctionnelle de sinus.* Dans R. M. sp. 77 (1966—67), 434, a été solutionné le problème: Déterminer une fonction réelle $f(x)$ continue sur R telle que

$$f(x)f(y)=k\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,dt. \tag{4.5}$$

Nous donnerons plus bas, à ce problème, une solution plus simple, dans laquelle on n'utilise pas la dérivabilité, ainsi qu'on a procédé dans la note mentionnée.

La fonction $f(t)$ étant continué a des primitives, soit $F(t)$. Alors l'équation (4.5) devient

$$f(x)f(y)=k[F(x+y)-F(x-y)]$$

Nous remplaçons ici $x+y=2u$, $x-y=2v$, d'où $x=u+v$, $y=u-v$ et alors

$$f(u+v)f(u-v)=k[F(2u)-F(2v)]. \tag{4.5_1}$$

L'équation contient deux fonctions inconnues et nous cherchons éliminer la fonction F. A cette fin nous faisons $v=0$ et $u=t$. On déduit

$$f^2(t)=kF(2t)-kF(0) \Rightarrow kF(2t)=f^2(t)+kF(0)$$

et l'équation (4.5_1) devient

$$f(u+v)f(u-v)=f^2(u)-f^2(v)$$

équation bien connue qui a des solutions netrivialles

$$f(x)=c_1x, \quad f(x)=c_2 \sin c_3x, \quad f(x)=c_4 \operatorname{sh} c_5x$$

où c_i sont des constantes arbitraires réelles.

Remplaçant en (4.5) les solutions trouvées plus haut, on déduit que l'équation (4.5) a des solutions générales

$$f(x)=2kx, \quad f(x)=\frac{2k}{c_3}\sin c_3x, \quad f(x)=\frac{2k}{c_5}\operatorname{sh} c_5x$$

identiques à celles données dans la revue mentionnée.

Soit maintenant l'équation fonctionnelle de trois fonctions inconnues continues

$$f(x)g(y)=k\int_{x-y}^{x+y} h(t)\,\mathrm{d}t, \quad \bigl(f(x),\ g(x),\ h(x): R\to R\bigr).$$

Si $H(t)$ est une primitive de la fonction $h(t)$, nous déduisons

$$f(x)\,g(y)=k\,[H(x+y)-H(x-y)] \ \Rightarrow\ f(u+v)\,g(u-v)=k\,[H(2u)-H(2v)].$$

Faisant ici $v=0$ et $u=t$, nous avons $f(t)\,g(t)=kH(2t)-kH(0)$. Eliminant la fonction H nous obtenons

$$f(u+v)\,g(u-v)=f(u)\,g(u)-f(v)\,g(v).$$

Changeant le rôle des variables u et v, nous avons

$$f(u+v)\,g(v-u)=f(v)\,g(v)-f(u)\,g(u)$$

équation qui additionnée avec la précédente donne

$$f(u+v)[g(u-v)+g(v-u)]=0.$$

Nous supposons que $g(u-v)+g(v-u)=0$, donc $g(t)$ est une fonction impaire. Restent les équations

$$f(u+v)\,g(u-v)=f(u)\,g(u)-f(v)\,g(v), \quad f(u-v)\,g(u+v)=f(u)\,g(u)-f(v)\,g(v)$$

d'où il résulte $f(u+v)\,g(u-v)=f(u-v)\,g(u+v)$, équation qui dans l'hypothèse que $f(t)\not\equiv 0$ n'est pas possible que si $g(t)=cf(t)$, où c peut être égal à zéro.

Si $c\neq 0$, nous obtenons

$$f(u+v)\,cf(u-v)=f(u)\,cf(u)-f(v)\,cf(v) \ \Rightarrow\ f(u+v)f(u-v)=f^2(u)-f^2(v).$$

Pour la solution $f(x)=c_1x$ il résulte $g(x)=cc_1x$ et ayant en vue que $f(t)\,g(t)=kH(2t)-kH(0)$, $H'(x)=h(x)$, nous déduisons

$$c_1^2ct^2=kH(2t)-kH(0)$$

et la dérivée par rapport à t, donne $h(x)=\dfrac{c_1^2c}{2k}x$.

Analoguement nous trouvons

$$f(x)=c_2\sin c_3x, \quad g(x)=c_2c\sin c_3x, \quad h(x)=\frac{c_2^2c_3c}{2k}\sin c_3x$$

$$f(x)=c_4\operatorname{sh} c_5x, \quad g(x)=c_4c\operatorname{sh} c_5x, \quad h(x)=\frac{c_4^2c_5c}{2k}\operatorname{sh} c_5x.$$

4.6. 1° Dans la travail **[10]** nous avons démontré que, si les fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont analytiques, l'équation

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x+\varphi(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

n'a de solutions qu'à la condition que $\xi=\dfrac{1}{2}(a+b)$.

2° Dans un travail [7] nous avons étudié le système à 9 fonctions réelles mesurables.

$$c_p(x+y)-\lambda\sum_{k=1}^{p} c_k(x+y)\sum_{i=1}^{p+1-k} a_{p+2-k-i}(x)b_i(y)=a_p(x)+b_p(y)$$

où $p=1, 2, 3$ et λ un paramètre.

5. EQUATIONS FONCTIONNELLES DEFINISSANT DES POLYNOMES

La définition fonctionnelle du polynôme à une variable ou à plusieurs variables a été faite de différentes manières. En général les équations introduites dans la définition du polynôme contiennent une seule fonction inconnue.

Dans ce chapitre nous étudions des équations intégro-fonctionnelles, contenant plusieurs fonctions inconnues, définissant des polynômes.

5.1. *L'équation fonctionnelle*

$$\varphi[\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta]=\frac{k}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (\forall\alpha,\ \beta\in R), \tag{5.1}$$

où λ *et* $k\neq 0$ *sont deux constantes,* $f(t)$ *et* $\varphi(t)$ *étant deux fonctions réelles bornées, sommables ou mesurables a les solutions générales*

$$1^\circ\ \ f(x)=\frac{c}{k},\quad \varphi(x)=c, \qquad 2^\circ\ \ f(x)=\frac{1}{k}(ax+b),\ \ \varphi(x)=ax+b\ \Rightarrow\ \lambda=\frac{1}{2}\,.$$

En effet, les variables α et β étant quelconques, nous ferons dans (5.1) successivement

$$1^\circ\ \ \alpha=u-v,\ \ \beta=u; \qquad 2^\circ\ \ \alpha=u,\ \ \beta=u+v \quad \text{et} \quad 3^\circ\ \ \alpha=u-v,\ \ \beta=u+v,$$

par conséquent, on obtient

$$\frac{k}{v}\int_{u-v}^{u} f(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(u-\lambda v), \qquad \frac{k}{v}\int_{u}^{u+v} f(t)\,\mathrm{d}t=\varphi[u+(1-\lambda)v],$$

$$\frac{k}{2v}\int_{u-v}^{u+v} f(t)\,\mathrm{d}t=\varphi[u+(1-2\lambda)v].$$

En utilisant la propriété

$$\int_{u-v}^{u} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{u}^{u+v} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{u-v}^{u+v} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{5.1$_1$}$$

on obtient

$$\varphi(u-\lambda v)+\varphi[u+(1-\lambda)v]-2\varphi[u+(1-2\lambda)v]=0 \tag{5.1$_2$}$$

équation de la forme (1.7_2). On déduit

$$\sum a_i=0, \quad \sum a_i\alpha_i=2\lambda-1, \quad \sum a_i\alpha_i^2=-6\lambda^2+6\lambda-1.$$

Puisque $\sum a_i\alpha_i^2$ ne s'annulent pas pour $\lambda=\frac{1}{2}$, nous concluons pour l'équation fonctionnelle (5.1) que: si $\lambda\neq\frac{1}{2}$ alors la solution générale est $\varphi(x)=$constante, et si $\lambda=\frac{1}{2}$, alors la solution est un polynôme du premier degré $\varphi(x)=ax+b$, où a et b sont deux constantes arbitraires.

Par la suite, nous avons

1° $c=\frac{k}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ où $\int\limits_\alpha^\beta c\,\mathrm{d}t=\int\limits_\alpha^\beta kf(t)\,\mathrm{d}t$, donc $f(t)=\frac{c}{k}$:

2° $\frac{1}{2}a(\alpha+\beta)+b=\frac{k}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$

Si on remplace $f(t)=F'(t)$ on déduit immédiatement les solutions données plus haut.

5.2. *Considérons maintenant l'équation fonctionnelle*

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[g(\alpha_1)+h(\beta_1)] \tag{5.2}$$

où $\alpha_1=\alpha+\lambda(\beta-\alpha)$, $\beta_1=\beta-\lambda(\beta-\alpha)$, $0\leq\lambda\leq\frac{1}{2}$ *les fonctions* f, g *et* h *sont supposées bornées, etc.*

L'ensemble des solutions de l'équation (5.2) *est*

1° $\lambda=\frac{1}{2}$, $f(x)=\frac{1}{2}(ax+b)$, $g(x)+h(x)=ax+b$;

2° $\lambda\neq\frac{1}{2}$ et $\lambda\neq\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f(x)=\frac{1}{4}ax^2+\frac{1}{2}(2b+c)x$,

$h(x)=ax+b$, $g(x)=ax+b+c$;

3° $\lambda=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $h(x)$ *et* $g(x)$ *polynômes du* 3^e *degré, et* $f(x)$ *polynôme du* 4^e *degré.*

Nous allons calculer les intégrales suivantes

$$\int\limits_{u-v}^{u+v}, \quad \int\limits_{u-v}^{u}, \quad \int\limits_{u}^{u+v}.$$

On obtient

$$\frac{1}{2v}\int_{u-v}^{u+v} f(t)\,dt=\frac{1}{2}[g(u-v+2\lambda v)+h(u+v-2\lambda v)],$$

$$\frac{1}{v}\int_{u-v}^{u} f(t)\,dt=\frac{1}{2}[g(u-v+\lambda v)+h(u-\lambda v)],$$

$$\frac{1}{v}\int_{u}^{u+v} f(t)\,dt=\frac{1}{2}[g(u+\lambda v)+h(u+v-\lambda v)].$$

En utilisant la propriété (5.1_1) on obtient l'équation

$$(5.2_1)\qquad \begin{aligned} &g(u-v+\lambda v)+h(u-\lambda v)+g(u+\lambda v)+h(u+v-\lambda v)\\ &\quad-2g(u-v+2\lambda v)-2h(u+v-2\lambda v)=0. \end{aligned}$$

En changeant v en $-v$ on a

$$\begin{aligned} &g(u+v-\lambda v)+h(u+\lambda v)+g(u-\lambda v)+h(u-v+\lambda v)\\ &\quad-2g(u+v-2\lambda v)-2h(u-v+2\lambda v)=0. \end{aligned}$$

En soustrayant la dernière égalité de la précédente, on obtient

$$\begin{aligned} &[g(u-v+\lambda v)-h(u-v+\lambda v)]+[g(u+\lambda v)-h(u+\lambda v)]-[g(u-\lambda v)-h(u-\lambda v)]\\ &\quad-[g(u+v-\lambda v)-h(u+v-\lambda v)]-2[g(u-v+2\lambda v)-h(u-v+2\lambda v)]\\ &\quad+2[g(u+v-2\lambda v)-h(u+v-2\lambda v)]=0. \end{aligned}$$

A l'aide de la notation $g(t)-h(t)=\Phi(t)$, on déduit

$$\begin{aligned} &\Phi[u+(\lambda-1)v]+\Phi(u+\lambda v)-\Phi(u-\lambda v)-\Phi[u+(1-\lambda)v]\\ &\quad-2\Phi[u+(2\lambda-1)v]+2\Phi[u+(1-2\lambda)v]=0. \end{aligned}$$

Cette équation a la forme (1.7_2). On déduit

$$\sum a_i=0,\quad \sum a_i\alpha_i^n=(\lambda-1)^n+\lambda^n-(-\lambda)^n-(1-\lambda)^n-2(2\lambda-1)^n+2(1-2\lambda)^n.$$

On vérifie facilement que quelque soit le nombre naturel n pour $\lambda=\frac{1}{2}$ on a $\sum a_i\alpha_i^n=0$.

Si $\lambda=\frac{1}{2}$ alors $\alpha_1=\beta_1=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, et l'équation contenant les fonctions g et h devient

$$g\left(u+\frac{1}{2}v\right)-2g(u)+g\left(u-\frac{1}{2}v\right)+h\left(u+\frac{1}{2}v\right)-2h(u)+h\left(u-\frac{1}{2}v\right)=0$$

En substituant dans cette équation $v=2t$ et $g(x)+h(x)=\varphi(x)$ on obtient $\varphi(u+t)-2\varphi(u)+\varphi(u-t)=0$ équation qui a comme ensemble des solutions $\varphi(x)=ax+b$, donc $g(x)+h(x)=ax+b$ et alors

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left[a\frac{\alpha+\beta}{2}+b\right],\quad \text{d'où}\quad f(x)=\frac{1}{2}(ax+b)$$

a et b étant deux constantes réelles arbitraires.

Par conséquent si $\lambda=\frac{1}{2}$ l'ensemble des solutions est

$$f(x)=\frac{1}{2}(ax+b), \quad g(x)+h(x)=ax+b.$$

Si $\lambda\neq\frac{1}{2}$ alors $\Phi=c$, donc $g(t)-h(t)=c$. En prenant dans l'équation (5.2_1) $g(t)=h(t)+c$ on obtient

$$h(u-v+\lambda v)+h(u-\lambda v)+h(u+\lambda v)+h(u+v-\lambda v)$$
$$-2h(u-v+2\lambda v)-2h(u+v-2\lambda v)=0,$$

équation qui peut être écrite

$$h[u+(\lambda-1)v]+h(u-\lambda v)+h(u+\lambda v)+h[u+(1-\lambda)v]$$
$$-2h[u+(2\lambda-1)v]-2h[u+(1-2\lambda)v]=0.$$

Pour cette équation on a

$$\sum a_i=0, \quad \sum a_i\alpha_i=0 \quad \text{et} \quad \sum a_i\alpha_i^2=-2(6\lambda^2-6\lambda+1),$$
$$\sum a_i\alpha_i^3=0, \quad \sum a_i\alpha_i^4=-60\lambda^4+120\lambda^2-84\lambda^2+24\lambda-2.$$

Mais $\Sigma a_i\alpha_i^2=0$ pour $\lambda=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, (l'autre racine est inacceptable). Mais la racine $\lambda=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ne satisfait pas la relation $\Sigma a_i\alpha_i^4=0$ et en tenant compte du théoreme de T. Popoviciu énoncé plus haut, on déduit les solutions données au début du chapitre.

5.3. N. Cioranescu [4] a étudié l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=\int_a^b [f(sx)+f(sy)]\,du(s). \tag{5.3}$$

Nous considérons l'équation fonctionnelle

$$f(x+y)=\int_a^b [g(sx)+h(sy)]\,du(s) \tag{5.3_1}$$

où $u(s)$ est une fonction à variation bornée dans (a, b), la relation ayant lieu quel que soit x et y, il est évident que les intégrales du seconde membre ont un sens.

Faisons dans (5.3_1), $y=0$ et ensuite $x=0$, on obtient

$$f(x)=\int_a^b g(sx)\,du(s)+h(0)\cdot C, \quad f(y)=\int_a^b h(sy)\,du(s)+g(0)\cdot C \quad \text{où} \quad C=\int_a^b du(s)$$

En éliminant les intégrales du seconde membre, on arrive à l'équation

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-C(g_0+h_0). \tag{5.3_2}$$

Distinguons deux cas

1° $g_0+h_0=0$, alors l'équation (5.3_2) est l'équation de CAUCHY, et par conséquent $f(x)=Ax$, à A arbitraire.

2° $g_0+h_0\neq 0$, alors $f(x)=Bx+C(g_0+h_0)$.

Par la suite, dans le premier cas, il résulte

$$\int_a^b g(sx)\,du(s)=Ax-h_0C,\quad \int_a^b h(sx)\,du(s)=Ax-g_0C.$$

Supposant que la fonction $g(sx)$ est développable en série soit

$$g(sx)=c_0+c_1sx+\cdots$$

on déduit

$$Ax-h_0c=c_0\int_a^b du(s)+c_1x\int_a^b s\,du(s)+c_2x^2\int_a^b s^2\,du(s)+\cdots$$

il résulte

$$c_0=-h_0,\quad c_1=A:\int_a^b s\,du(s),\quad c_i=0,\quad i=2,\ldots$$

$$g(sx)=-h_0+(Asx):\int_a^b s\,du(s),\quad h(sx)=-g_0+(Asx):\int_a^b s\,du(s).$$

Pour le 2ᵉ cas nous procédons exactement comme plus haut.

5.4. On montre facilement que les équations

$$\int_x^y \varphi(t)f(t)\,dt=(y-x)f\left(\frac{x+y}{2}\right),\quad \int_x^y \varphi(t)f(t)\,dt=\frac{y-x}{2}[f(x)+f(y)]$$

ont la solution $f(x)=\alpha x+\beta$, $\varphi(x)=1$, α et β des constantes arbitraires.

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie générale est donnée dans l'introduction.

1. J. ACZÉL: *Sur une équation fonctionnelle*. Publ. Inst. Math, (Beograd) **2** (1948), 257—262.
2. J. ACZÉL: *Miszellen über Funktionalgleichungen I.* Mathematische Nachrichten **19** (1958), 87—99.
3. N. CIORĂNESCU: *Quelques équations fonctionnelles caractérisant la fonction linéaire.* Acad. Romaine, Bul. Sect. Sci. **15** (1932), 87—92.
4. N. CIORĂNESCU: *Sur la définition fonctionnelle des polynômes et quelques „formules à deux et trois niveaux"*. Bull. Math. de la Soc. roumaine des sci. **33—34** (1932), 39—47.
5. O. E. GHEORGHIU: *Sur un système d'équations fonctionnelles qui généralise l'équation fonctionnelle de D. S. Mitrinović* (russe). Ces Publications **№ 35—№ 37** (1960), 9—15.

6. O. E. Gheorghiu et B. Cristici: *Sisteme de ecuaţii funcţionale care generalizează ecuaţia funcţională a lui D. S. Mitrinovic.* Ann. Univ. Timişoara, St. Mat. fiz. **6** (1968), 159—65.

7. O. E. Gheorghiu, N. V. Ghircoiaşiu et I. Stamate: *Sisteme de ecuaţii funcţionale neliniare.* Bul. şti. Inst. Poli. Cluj 11_2 (1968), 25—28.

8. M. Ghermănescu: *Sur qulques extensions de l'équation fonctionnelle de Cauchy.* Bull. Sect. Sci. Acad. Roumaine **28** (1945), 197—200.

9. M. Ghermănescu: *Solutions mesurables de certaines équations fonctionnelle linéaires à plusieurs variables.* Bull. sci. et tehn. Poly. Timişoara **13** (1948), 18—49.

10. N. Ghircoiaşiu et I. Stamate: *O problemă relativa la a doua formulă de medie.* Bul. şti. Inst. Poli. (Cluj) **9** (1966), 37—40.

11. N. Ghircoiaşiu et I. Stamate: *O generalizare a unei ecuaţii a lui D. Pompeiu.* Bul. şti. Inst. Pol. (Cluj), **10** (1967), 19—23.

12. N. I. Lobacevski: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.* Berlin, 1940, 33, 36.

13. S. Marcus: *Sur une généralisation des fonctions de G. Hamel.* Rend. dell' Ac. Naz. dei Lincei, **20** (1956), 584—589.

14. S. Marcus: *Sur une classe de fonctions définies par des inégalités, introduite par M. A. Császár.* Acta Sci. Math. (Szeged) **19** (1958), 192—217.

15. D. S. Mitrinović: *Sur un procédé fournissant des équations fonctionnelles dont les solutions continues et différentiables peuvent être déterminées.* Ces Publications № **5**, (1956), 1—8.

16. D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković: *Sur quelques équations fonctionnelles.* Publ. de l'Institut mathématique, **1** (15), (1961), 67—73.

17. J. V. Pexider: *Notiz über Funktionaltheoreme.* Monatsh. Math. und Physik **14** (1903), 293—301.

18. D. Pompeiu: *Sur une équation fonctionnelle qui s'introduit dans un problème de moyenne.* C. R. Paris, **190** (1930), 1107—9.

19. D. Pompeiu: *Les fonctions indéfiniment symétriques et les équations différentielles,* Bull. de la Sec. Sc. de l'Acad. Roumaine **24** (1941), 291—96.

20. T. Popoviciu: *Sur certaines équations fonctionnelles définissant des polynômes.* Mathematica **10** (1935), 194—208.

21. T. Popoviciu: *Sur les solutions bornées et les solutions mesurables de certaines équations fonctionnelles.* Mathematica **14** (1938), 47—106.

22. T. Popoviciu: *G. Matematică,* XLVI (1941), 392.

23. H. Roşcău et I. Stamate: *Generalizarea matricială a ecuaţiei funcţionale a lui N. I. Lobacevski pe mai multe funcţii.* Bul. şti. Inst. Poli. (Cluj), **10** (1967), 51—55.

24. I. Stamate: *O clasă de ecuaţii funcţionale.* Gazeta Matematică şi fizică (A) (1959), 587—97.

25. I. Stamate: *Ecuaţii funcţionale de tip Pexider,* I, II et III. Bul. şti. Inst. Poli. (Cluj) **5** (1962), 7 (1963) et **8** (1965).

26. I. Stamate: *Généralisation de l'équation fonctionnelle de H. P. Thielman.* Mathematica 7 (30) (1965), 383—390.

27. I. Stamate: *Characteristic integral properties for polynomials.* Mathematica **9** (32), (1967), 383—389.

28. H. Sviatak: *Remarks of the functional equations* $f(x+y-xy)+f(xy)=f(x)+f(y)$ Aeq. Math. **1** (1968), 239—41.

29. H. P. Thielman: *On generalized Cauchy functional equations.* Amer. Math. Monthly **56** (1949), 452—57.

30. P. M. Vasić et R. R. Janić: *Sur quelques équations fonctionnelles du type de Pexider.* Ces Publications № **274**—№ **301** (1969), 33-45.

31. Z. Waraszkiewicz: *Sur les fonctions définies par les équations fonctionnelles* $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$ *et* $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ *où* $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Ann. Soc. Polon. Math. **19** (1946—47), 237.