PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 9 (1956)

SUR LA CARACTÉRISATION DES ESPACES UNIFORMISABLES[1]

Zlatko Mamuzić[*]

Considérons deux ensembles E, M non vides quelconques et une application f du produit direct $E\times E$ dans M, par laquelle on associe à tout élément $(a, b)\in E\times E$ un élément unique $f(a, b)\in M$. Soit $\mathfrak{F}$ une famille de sous-ensembles de M, telle que pour chaque $\lambda\in\mathfrak{F}$ on a $X\supset\{f(a, a) \mid a\in E\}$. Au moyen de l'application f et de la famile $\mathfrak{F}$ on peut définir un espace de voisinages sur E par le système de voisinages suivant:

$$W_X(a)=\{b \mid b\in E,\ f(a, b)\in X\},\quad X\in\mathfrak{F},\ a\in E, \tag{1}$$

et il est évident que l'on a la proposition suivante:

Proposition 1. *Pour qu'un point $a\in E$ soit contigu à un sous-ensemble $F\subset E$, il faut et il suffit que pour tout $X\in\mathfrak{F}$ il existe au moins un point $b\in F$ tel que $f(a, b)\in X$.*

D'autre part, $\mathfrak{B}_F$ étant une famille d'ensembles inclusivement équivalente à $\mathfrak{F}$ (c. à. d. pour chaque $X\in\mathfrak{F}$ il existe $Y\in\mathfrak{B}_F$ tel que $X\subset Y$ et réciproquement), soit $\mathfrak{U}$ la famille de tous les sous-ensembles $V\subset E\times E$ contenant au moins un élément de $f^{-1}(\mathfrak{B}_F)=\{f^{-1}(X) \mid X\in\mathfrak{B}_F\}$, où $f^{-1}(X)=\{(a, b) \mid f(a, b)\in X\}$, c'est-à-dire, $\mathfrak{U}=\{V \mid V\subset E\times E,\ V\supset f^{-1}(X)$ pour au moins un élément $X\in\mathfrak{B}_F\}$. Si l'on définit sur le même support E l'espace de voisinages par le système de voisinages

$$V(a)=\{b \mid b\in E,\ (a, b)\in V\},\quad V\in\mathfrak{U},\ a\in E, \tag{2}$$

où $V(a)$ n'est autre que la coupe de V suivant a, on voit tout de suite ([10], p. 2) que les deux espaces (1) et (2) sont topologiquement identiques (c. à. d. les deux systèmes de voisinages (1) et (2) sont équivalents).

On voit donc que par le procédé (1) on peut définir les topologies diverses sur un même support E en introduisant les conditions supplémentaires qui

[1]) Communiqué au IV[e] Congrès des mathématiciens d'Autriche à Vienne (17—22 septembre 1956).

[*]) Je suis bien reconnaissant à M. G. Kurepa d'avoir lu le manuscrit de ce travail et de m'avoir fait une remarque sur la signification de $M\neq E\times E$ dans les lemmes 2 et 4, sur le sens de laquelle j'ai donné quelques explications à la fin de cet article.

doivent être satisfaites par la fonction f ou bien par la famille $\mathfrak{F}$. Vu la définition même de la famille $\mathfrak{U}$ des sous-ensembles $V \subset E \times E$ correspondants, on voit en même temps que les conditions supplémentaires sont exprimables au moyen de $\mathfrak{U}$ et c'est grâce à ce fait qu'on peut rechercher les conditions conduisant à la caractérisation des espaces uniformisables.

La famille $\mathfrak{F}$ étant supposée multiplicative (c'est-à-dire, si $\mathfrak{F}$ possède la propriété des intersections finies, autrement dit, si $X_i \in \mathfrak{F}$, $i=1, \cdots, n$, alors $\cap X_i \in \mathfrak{F}$), ou semi-multiplicative (c. à. d. pour chaque couple $X, Y \in \mathfrak{F}$ il existe $Z \in \mathfrak{F}$ tel que $Z \subset X \cap Y$), il est presque immédiat que l'espace correspondant défini par le système de voisinages (1) est un espace à topologie distributive (c. à. d. si $F_1 \subset E$ et $F_2 \subset E$ on a $\overline{F_1 \cup F_2} \subset \overline{F_1} \cup \overline{F_2}$). Quant à l'axiome de transitivité α (c. à. d. pour chaque $F \subset E$ on a $\overline{\overline{F}} = \overline{F}$) on peut ([10], p. 5) démontrer la proposition suivante:

Proposition 2. *Pour que l'espace défini par le système de voisinages* (1) *soit à topologie transitive, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée:*

(*e*) *Pour tout triple de points a, b, c de E et chaque* $X \in \mathfrak{F}$ *il existent* $Y, Z \in \mathfrak{F}$ *tels que*

$$[f(a, b) \in Y \,\&\, f(b, c) \in Z] \Rightarrow [f(a, c) \in X] .$$

Envisageons encore les deux conditions que voici:

(*s*) *Pour chaque* $X \in \mathfrak{F}$ *il existe* $Y \in \mathfrak{F}$ *tel que*

$$[f(b, a) \in Y] \Rightarrow [f(a, b) \in X], \quad a, b \in E.$$

(*u*) *Pour tout triple a, b, c de E et chaque* $X \in \mathfrak{F}$ *il existe* $Y \in \mathfrak{F}$ *tel que*

$$[f(a, b) \in Y \;\&\; f(a, c) \in Y] \Rightarrow f(b, c) \in X].$$

Ceci étant, on démontre aisément que

Proposition 3. *La famille* $\mathfrak{F}$ *étant supposée semi-multiplicative ou un filtre sur M, alors la conjonction des conditions* (*e*) *et* (*s*) *est équivalente à la condition* (*u*), *c. à. d. on a:*

$$[(e) \;\&\; (s)] \Leftrightarrow (u).$$

Dans ce qui suit nous désignerons par $E(M_F)$ la classe des espaces définis par les systèmes de voisinages (1), $\mathfrak{F}$ étant supposé un filtre sur M. Dans ce cas la famille correspondante $\mathfrak{B}_F$ est une base de filtre de $\mathfrak{F}$, et $f^{-1}(\mathfrak{B}_F)$ est une base de filtre de $\mathfrak{U}$.

En tenant compte de la définition des espaces uniformisables ([4], p. 156) on peut montrer que tout espace de la classe $E(M_F)$ vérifiant la condition (*u*) est un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ possédant une structure uniforme $\mathfrak{U}$ compatible avec la topologie $\mathfrak{T}$, ce qu'on peut énoncer sous la forme du lemme suivant:

Lemme 1. *Pour qu'un espace topologique* $(E, \mathfrak{T})$ *soit uniformisable, il suffit qu'il soit un espace de la classe* $E(M_F)$ *vérifiant la condition* (*u*).

Démonstration. En effet, d'après ce qui précède et en particulier vu les propositions 2 et 3, il est clair que tout espace de la classe $E(M_F)$ vérifiant la condition (u) est un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ au sens de la définition de N. Bourbaki ([4], p. 9) (c. à. d. un espace de Kuratowski) puisque c'est un espace de voisinages à topologie distributive et transitive (c. à. d, $(E, \mathfrak{T})$ est un espace $(V_{\alpha D})$ où $\alpha =$ axiome de transitivité et $D =$ axiome de distributivité, cette términologie étant dûe à A. Appert ([3], p. 23)). D'autre part, la même topologie $\mathfrak{T}$ est définie par le système de voisinages (2) correspondant, ce qui signifie qu'on peut déduire la topologie $\mathfrak{T}$ de la famille correspondante $\mathfrak{U}$ des parties V de $E \times E$. Il suffit donc de montrer que la famille correspondante $\mathfrak{U}$ est un filtre sur $E \times E$ vérifiant tous les axiomes usuels définissant une structure unifome sur E. Il est évident que dans ce but il suffit de montrer que $f^{-1}(\mathfrak{B}_F)$ est un système fondamental d'entourages, puisque $f^{-1}(\mathfrak{B}_F)$ est une base du filtre $\mathfrak{U}$. Chaque élément $X \in \mathfrak{B}_F$ contenant l'ensemble $\{f(a, a) \mid a \in E\}$, il résulte immédiatement que chaque élément $V \in f^{-1}(\mathfrak{B}_F)$ contient la diagonale $\Delta \subset E \times E$, d'où ([4], p. 133) l'axiome (U'_I) est vérifié. Soit X un élément quelconque de $\mathfrak{B}_F$. On voit tout de suite qu'il existe un élément Y de $\mathfrak{F}$ tel que $[f(b, a) \in Y] \rightrightarrows [f(a,b) \in X]$, c'est-à-dire $f^{-1}(Y) \subset [f^{-1}(X)]^{-1}$ où l'on a posé $[f^{-1}(X)]^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f^{-1}(X)\}$. Il est facile à voir que $X \cap Y \in \mathfrak{F}$ et il existe $Z \in \mathfrak{B}_F$ tel que $Z \subset X \cap Y$, d'où $f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$, donc $f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(Y)$, c'est-à-dire $f^{-1}(Z) \subset [f^{-1}(X)]^{-1}$, cette dernièie inclusion montrant que l'axiome (U'_{II}) est aussi vérifié. En même temps on voit que $[f^{-1}(X)]^{-1} \in \mathfrak{U}$ pour chaque $X \in \mathfrak{B}_F$. Enfin, X étant un élément quelconque de $\mathfrak{B}_F$, il est immédiat que, d'après la condition (u), il existe $Y \in \mathfrak{F}$ tel que $[f(a, b) \in Y \;\&\; f(a, c) \in Y] \rightrightarrows [f(b, c) \in X]$ pour tout triple de points a, b, c de E. Or, il existe $Z \in \mathfrak{B}_F$ tel que $Z \subset Y$ et par suite la relation $[f(a, b) \in Z \;\&\; f(a,c) \in Z] \rightrightarrows [f(b, c) \in X]$ est aussi vérifiée. En d'autres termes, on a la relation

$$f^{-1}(Z) \circ [f^{-1}(Z)]^{-1} \subset f^{-1}(X),$$

équivalente ([4], p. 132) à la conjonction des deux conditions suivantes:

$$f^{-1}(Z) \circ f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(X) \quad \text{et} \quad [f^{-1}(Z)]^{-1} \in \mathfrak{U},$$

ce qui montre que l'axiome $(\mathfrak{U}'_{III})$ est aussi vérifié, c. q. f. d.

Nous allons démontrer la réciproque du lemme précédent, à savoir:

Lemme 2. *Pour chaque espace topologique uniformisable* $(E, \mathfrak{T})$ *il existent un ensemble* $M \neq E \times E$ *et une application* f *du produit direct* $E \times E$ *dans* M (de plus, *sur* M) *vérifiant la condition* (u), *tel que l'espace* $(E, \mathfrak{T})$ *peut être reconstruit par le système de voisinages* (1) *correspondant.*

Démonstration. Pour la démonstration du lemme 2 nous appliquerons une modification d'un procédé par lequel G. Kurepa [7] a démontré que tout espace unifoime séparé est un espace de la classe $\mathfrak{E}[M]$ vérifiant la condition[1] O^4, cette dernière classe étant définie ([7], [8], p. 1049) comme suit: E, M étant deux espaces quelconques, l'espace E est dit de la classe $\mathfrak{E}[M]$ s'il existe une application — que nous désignerons encore par f — de $E \times E$ dans M telle que les conditions suivantes sont vérifiées:

[1]) V. page 6 de ce travail.

O^1 $[f(a, b) = f(a, a)] \rightrightarrows [a = b]$, $a, b \in E$;

O^2 $f(b, a) = f(a, b)$, $a, b \in E$;

O^3 *Si* $a \in E$ *et* $F \subset E$ *et si l'on pose* $f(a, F) = \{f(a, x) \mid x \in F\}$, *alors*

$$[a \in \overline{F}] \leftleftarrows\rightrightarrows [f(a, a) \in \overline{f(a, F)}].$$

Remarquons encore que les espaces uniformes non séparés ne sont pas de la classe $\mathfrak{E}[M]$. Or pour démontrer le lemme 2 nous allons définir l'ensemble M de la manière suivante:

$$M = \Big\{\{(a, b)\} \cup \{b\} \mid (a, b) \in E \times E\Big\},$$

c. à. d. les éléments de l'ensemble M sont les ensembles de la forme $\{(a, b)\} \cup \{b\}$ où $\{(a, b)\}$ resp. $\{b\}$ est l'ensemble constitué par l'élément $(a, b) \in E \times E$ resp. par la deuxième coordonnée b de (a, b). Dans ce qui suit nous écrirons simplement $(a, b) \cup (b)$ au lieu de $\{(a, b)\} \cup \{b\}$. Posons

$$f(a, b) = (a, b) \cup (b), \quad (a, b) \in E \times E,$$

$$X = \{f(a, b) \mid (a, b) \in V\}, \quad \mathfrak{F} = \{X \mid V \in \mathfrak{U}\},$$

où par V on a désigné l'élément générique du filtre $\mathfrak{U}$ des entourages de la structure uniforme définie par $\mathfrak{U}$, l'espace $(E, \mathfrak{T})$ étant supposé uniformisable. Tout d'abord, il est immédiat que $\mathfrak{F}$ est un filtre sur M. En effet, on a $X \supset \{fa, a) \mid a \in E\}$ pour tout $X \in \mathfrak{F}$. De plus, si V, $W \in \mathfrak{U}$ tel que $W \subset V$, alors $Y \subset X$ pour les ensembles X, Y correspondants de $\mathfrak{F}$. D'autre part, $\mathfrak{B}_U$ étant une base de filtre de $\mathfrak{U}$, $f(\mathfrak{B}_U)$ est une base de filtre sur M. Par conséquent, pour chaque $V \in \mathfrak{U}$ il existe $W \in \mathfrak{B}_U$ tel que $W \subset V$ et donc $f(W) = Y \subset X = f(V)$ pour les ensembles correspondants $X \in \mathfrak{F}$ et $Y \in f(\mathfrak{B}_U)$. De plus, on a $W_X(a) = V(a)$ pour chaque $V \in \mathfrak{U}$ et chaque $X \in \mathfrak{F}$ correspondant, le point a étant un point arbitraire de E. En conséquence, l'espace $(E, \mathfrak{T})$ est bien de la classe $E(M_F)$, topologiquement identique à l'espace défini par le système (1) des voisinages correspondants. Prouvons que la condition (u) est vérifiée. En effet, $\mathfrak{U}$ étant le filtre des entourages de la structure uniforme sur E, pour chaque $V \in \mathfrak{U}$ il existe $W \in \mathfrak{U}$ tel que ([4], p. 132) $W \circ W^{-1} \subset V$, d'où

$$[f(b, a) \in X_{W^{-1}} \ \& \ f(a, c) \in X_W[\rightrightarrows [fb, c) \in X_V],$$

ou bien

$$[f(a, b) \in X_W \ \& \ f(a, c) \in X_W] \rightrightarrows f(b, c) \in X_V,$$

vu la définition de la fonction f et de la famille $\mathfrak{F}$, où l'on a posé:

$$X_W = \{f(a, b) \mid (a, b) \in W\}, \ X_{W^{-1}} = \{f(b, a) \mid (b, a) \in W^{-1}\}, X_V = f(a, b) \mid (a, b) \in V\}.$$

Le lemme 2 est ainsi démontié.

De ce qui précède on déduit immédiatement le

Théorème 1. *Pour qu'un espace topologique* $(E, \mathfrak{T})$ *soit uniformisable, il faut et il suffit qu'il soit un espace de la classe* $E(M_F)$ *vérifiant la condition* (u).

Par définition ([5], p. 10), un espace topologique est complètement régulier s'il est uniformisable et séparé. Pour la caractérisation des espaces complètement réguliers nous prouverons tout d'abord:

L e m m e 3. *Tout espace de la classe* $E(M_F)$ *vérifiant la condition* (u) *et tel que* $\bigcap_{X\in\mathfrak{F}} X=\{f(a,a)\mid a\in E\}$ *est uniformisable et séparé.*

Démonstration. En effet, il est aisé à démontrer ([10], p. 9) la proposition suivante:

P r o p o s i t i o n 4. *Pour qu'un espace défini par le système de voisinages* (1) *vérifie l'axiome de séparation* T_1, *dit de M. Fréchet, il faut et il suffit que l'intersection de tous les éléments de la famille* $\mathfrak{F}$ *se réduise à l'ensemble* $\{f(a,a)\mid a\in E\}$, *c. à. d.*

$$\bigcap_{X\in\mathfrak{F}} X=\{f(a,a)\mid a\in E\}.$$

Il est bien connu que dans chaque espace de voisinages l'axiome de séparation T_2, dit de F. Hausdorff, entraîne l'axiome T_1. On voit donc que la condition de la proposition 4 est bien nécessaire pour qu'un espace défini par le système de voisinages (1) vérifie l'axiome T_2. Or, la proposition 4 étant valable pour une famille $\mathfrak{F}$ quelconque satisfaisant à la condition $\{f(a,a)\mid a\in E\}\subset X$ pour chaque $X\in\mathfrak{F}$, on peut ([10], p. 11) démontrer:

P r o p o s i t i o n 5. *La condition de la proposition* 3 *étant supposée vérifiée, si la famille* $\mathfrak{F}$ *est inclusive dans l'ensemble* M, *c. à. d. si* $X\in\mathfrak{F}$ *alors* $[M\supset Y\supset X]\Rightarrow[Y\in\mathfrak{F}]$, *l'espace défini par le système de voisinages* (1) *correspondant vérifie l'axiome de séparation* T_2.

Pour la démonstration du lemme 3, il suffit de montrer que chaque espace de la classe $E(M_F)$, satisfaisant à la condition de la proposition 4, vérifie l'axiome de séparation T_2. Mais, en tenant compte de la proposition 5, c'est bien évident, puisque dans ce cas la famille $\mathfrak{F}$ est un filtre sur M et alors inclusive dans M, c. q. f. d.

Prouvons la réciproque:

L e m m e 4. *Pour chaque espace uniformisable et séparé* $(E,\mathfrak{T})$ *il existent un ensemble* $M\neq E\times E$, *une famille* $\mathfrak{F}$ *de sous-ensembles* $X\subset M$ *avec* $\bigcap_{X\in\mathfrak{F}} X=\{f(a,a)\mid a\in E\}$, f *étant une application de* $E\times E$ *dans* M (de plus, *sur* M) *vérifiant la condition* (u), *tels que l'espace* $(E,\mathfrak{T})$ *peut être reconstruit par le système de voisinages* (1) *correspondant.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{U}$ le filtre des entourages définissant la structure uniforme sur E, compatible avec la topologie $\mathfrak{T}$ de $(E,\mathfrak{T})$. Nous allons définir l'ensemble M, la fonction f, et la famille $\mathfrak{F}$ comme suit:

$$M=\{(a,b)\cup(b)\mid a\neq b,\ (a,b)\in E\times E\}\cup\{\Delta\};$$

$$f(a,b)=\begin{cases}(a,b)\cup(b), & \text{si } a\neq b,\\ \Delta, & \text{si } a=b;\end{cases}$$

$$X=\{f(a,b)\mid(a,b)\in V\},\ V\in\mathfrak{U};\ \mathfrak{F}=\{X\mid V\in\mathfrak{U}\},$$

V étant l'élément générique de $\mathfrak{U}$ et X l'élément générique de $\mathfrak{F}$.

Tout d'abord, on voit aisément que la topologie définie sur E par le système de voisinages (1) correspondant est identique à celle de l'espace considéré $(E, \mathfrak{T})$. D'autre part, pour chaque $X \in \mathfrak{F}$ on a $X \supset \{f(a, a) \mid a \in E\} = \{\Delta\}$ et $\bigcap_{X \in \mathfrak{F}} X = \{\Delta\}$, où $\{\Delta\}$ est l'ensemble constitué par un seul élément Δ de M. De plus, $\mathfrak{B}_U$ étant une base de filtre de $\mathfrak{U}$, $f(\mathfrak{B}_U)$ est une base de filtre de $\mathfrak{F}$. Par conséquent, l'espace $(E, \mathfrak{T})$ est bien de la classe $E(M_F)$. Enfin, on peut voir aisément par une démonstration tout à fait analogue à celle du lemme 2 que la condition (u) est aussi vérifiée, c. q. f. d.

Les lemmes 3 et 4 montrent qu'on a le

Théorème 2. *Pour qu'un espace topologique $(E, \mathfrak{T})$ soit complètement régulier, il faut et il suffit qu'il soit un espace de la classe $E(M_F)$ vérifiant la condition (u) tel que l'intersection de tous les éléments de la famille $\mathfrak{F}$ se réduise à l'ensemble $\{f(a, a) \mid a \in E\}$.*

Dans ce qui précède nous avons introduit la condition (s) qui n'est autre qu'une généralisation de la propriété de symétrie de la fonction f (condition O^2 dans la définition de la classe $\mathfrak{E}[M]$ de G. Kurepa) ce qui nous a donné une possibilité de caractériser d'une manière analogue tous les espaces uniformes généralisés de A. Appert ([3], p. 131), ce que nous avons fait dans un autre travail ([11], p. 198). Si dans le cas des espaces uniformes (au sens de la définition de N. Bourbaki), au lieu de la condition (s) on introduit la condition de symétrie de f, il est facile de voir que toutes les démonstrations précédentes restent valables si, dans le cas de la démonstration du lemme 2, on définit l'ensemble M, la fonction f et les sous-ensembles X de la manière suivante:

$$\begin{aligned} &M = \{(a, b) \cup (b, a) \mid (a, b) \in E \times E\}, \\ (3) \qquad &f(a, b) = (a, b) \cup (b, a), \ (a, b) \in E \times E, \\ &X = \{f(a, b) \mid (a, b) \in V\}, \ V \in \mathfrak{U}, \end{aligned}$$

et, dans le cas de la démonstration du lemme 4,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &M = \{(a, b) \cup (b, a) \mid a \neq b, \ (a, b) \in E \times E\} \cup \{\Delta\}, \\ &f(a, b) = \begin{cases} (a, b) \cup (b, a), & \text{si } a \neq b, \\ \Delta, & \text{si } a = b, \end{cases} \\ &X = \{f(a, b) \mid (a, b) \in V\}, \ V \in \mathfrak{U}, \end{aligned} \right.$$

les définitions (4) étant précisément celles au moyen desquelles G. Kurepa a prouvé que tout espace uniforme séparé est de la classe $\mathfrak{E}[M]$. En même temps G. Kurepa a montré [7] que les ensembles X et la fonction f dans (4) vérifient la condition:

O^4 *Pour tout triple de points a, b, c de E et chaque X il existe Y tel que $f(a, b) \in Y$ et $f(b, c) \in Y$ entraînent $f(a, c) \in X$.*

Il est évident que, à cause de la symétrie de f, dans ce cas la condition O^4 est équivalente à la condition (u). Le procédé de G. Kurepa montre donc qu'on peut caractériser les espaces uniformes séparés par les espaces de la classe $\mathfrak{E}[M]$ vérifiant la condition O^4. On peut énoncer ce fait de la manière suivante: pour qu'un espace topologique soit un espace uniforme séparé, il faut et il suffit qu'il soit de la classe $\mathfrak{D}[(V)_{ts}]$ (v. le théorème 2.3.5 dans le travail „Opérateurs $\mathfrak{E}[M]$, $\mathfrak{D}[M]$ et structures topologiques sur un ensemble E", cité ci-dessous où l'on trouvera aussi la définition de la classe $\mathfrak{D}[(V)_{ts}]$).

Dans cet ordre d'idées nous rappelons que J. Colmez ([6], p. 141–3) a caractérisé les espaces complètement réguliers en montrant que la classe de ces espaces est topologiquement identique à la classe d'espaces à écart ordonné régulier du 1[er] type, cette dernière classe étant topologiquement identique à la classe d'espaces uniformes séparés. Par définition, les écarts ordonnés sont les applications convenablement choisies du produit direct $E\times E$ dans un ensemble ordonné, cet idée même étant dûe à G. Kurepa ([9], p. 1563). Une caractérisation des espaces uniformisables et des espaces complètement réguliers, tout-à-fait différente de celles ci-dessus, a été donnée par N. Bourbaki ([5], p. 9). À la base des considérations de N. Bourbaki se trouve aussi la notion d'écart mais, dans ce cas, il s'agit d'une application f du produit direct $E\times E$ dans l'ensemble des nombres réels non négatifs, telle que $f(x, x)=0$, $x\in E$, et satisfaisant à tous les autres axiomes usuels, par lesquels on définit la distance dans le cas des espaces métriques. Il est à peine besoin de dire que c'est A. Weil ([14], p. 13–16) qui a le premier démontré que tout espace uniforme séparé est un espace complètement régulier et réciproquement, en s'appuyant sur l'axiome de la régularité complète noté par (O_{IV}) dans le livre [5] de N. Bourbaki. Notons que les espaces complètement réguliers portent aussi le nom *d'espaces de Tychonoff*, d'après A. Tychonoff qui les a le premier introduit ([13], p. 544–561) dans la topologie. On trouvera plus de details sur ces espaces importants, par exemple, dans les travaux [2] et [12] aussi bien que dans le livre excellent [1] de P. S. Alexandroff.

Ajoutons enfin que par $M\neq E\times E$ dans l'énoncé des lemmes 2 et 4 nous voulons signaler *qu'il existe effectivement un ensemble M différent de l'ensembe produit $E\times E$* et c'est justement dans ce sens qu'on doit entendre la caractérisation des espaces uniformisables de ci-dessus. De même, l'application f de $E\times E$ dans M que nous adoptons n'est pas symétrique. Au lieu de la condition de symétrie de f nous avons considéré la condition plus générale (s) qui se prête à l'étude des espaces plus générales. Bien sûr, il y en a d'autres, aussi bien d'ensembles M que de fonctions f qui peuvent être également utiles pour le but que nous nous sommes proposé à atteindre dans ce travail, par exemple l'ensemble M et la fonction f dans (3) et (4), auquel cas on devrait introduire la condition O^2 au lieu de (s). D'autre part, prenons $M=E\times E$ et l'application identique $f(a, b)=(a, b)$. Il est évident que dans ce cas on retombe dans la méthode de la définition des espaces uniformes de N. Bourbaki (ou d'A. Weil, [14]) et pour l'étude de ces espaces on devrait considérer *l'espace topologique $E\times E$*, ce que nous voulions précisément éviter par la considération des espaces générales définis de la maniére (1), l'ensemble M et la fonction f étant convenablement choisis. D'ailleurs, l'idée de remplacer l'intervention de l'espace topologique $E\times E$ par des applications de l'ensemble produit $E\times E$ dans un ensemble totalement ordonné, a été déja considérée par M. Fréchet (v. par exemple, *De l'écart numérique à l'écart abstrait*, Portugaliae mthematica, vol. V, 1946, p. 121—131), cette méthode même remontant à quelques travaux de G. Kupera (v. par exemple [9] et [8]). D'autre part, dans le travail [10] nous avons étudié de plus près les espaces définis de la manière (1), l'ensemble M étant quelconque, en obtenant ainsi une suite de théorèmes par lesquels on a montré que beaucoup de propriétés des espaces (V) sont exprimables par des familles $\mathfrak{F}$ sur M et des applications de l'ensemble $E \times E$ dans M convenablement choisies. Notre but dans ce travail n'était autre que de *préciser* comment on peut caractériser les espaces uniformes, c'est-à-dire trouver la propriété caractéristique de tels espaces au point de vue des procédés développés dans le travail [10], ces procédés mêmes se prêtant à d'autres applications utiles (v. par exemple, *Opérateurs* $\mathfrak{C}[M]$, $\mathfrak{D}[M]$ *et structures topologiques sur un ensemble* E, Bull. de la Soc. des Math. et phys. de la R. P. de Serbie, VII, 1—2, (1955), p. 39—72, Beograd et [11], p. 185—216).

REZIME

O KARAKTERIZACIJI UNIFORMIZABILNIH PROSTORA[1)]

Zlatko Mamuzić

Neka su E, M dva bilo koja puna skupa i f jednoznačno preslikavanje kombiniranog proizvoda $E \times E$ u skup M. Sa $\mathfrak{F}$ označimo jednu datu familiju delova $X \subset M$ sa svojstvom $X \supset \{f(a, a) \mid a \in E\}$ i neka je $\mathfrak{B}_F$ bilo koja familija inkluzivno ekvivalentna sa $\mathfrak{F}$, tj. takva da za svako $X \in F$ postoji $Y \in \mathfrak{B}_F$, tako da je $Y \subset X$, i obrnuto. Stavimo

$$f^{-1}(\mathfrak{B}_F) = \{f^{-1}(X) \mid X \in \mathfrak{B}_F\},$$

gde je $f^{-1}(X) = \{(a, b) \mid (a, b) \in E \times E,\ f(a, b) \in X\}$, i sa $\mathfrak{U}$ označimo familiju svih delova V skupa $E \times E$ od kojih svaki sadrži bar jedan elemenat familije $f^{-1}(\mathfrak{B}_F)$. Nije teško pokazati ([10], str. 2) da je topologija definisana na skupu E sistemom okolina

$$W_X(a) = \{b \mid b \in E,\ f(a, b) \in X\},\quad X \in \mathfrak{F},\ a \in E, \tag{1}$$

identična topologiji definisanoj na istom skupu sistemom okolina:

$$V(a) = b \mid \{b \in E,\ (a, b) \in V\},\quad V \in \mathfrak{U},\ a \in E.$$

Ako je $\mathfrak{F}$ filtar na skupu M, kazaćemo da prostori definisani korespondentnim sistemom okolina (1) čine klasu prostora $E(M_F)$. U tom slučaju $\mathfrak{B}_F$ je filtarska baza filtra $\mathfrak{F}$ a $f^{-1}(\mathfrak{B}_F)$ je filtarska baza filtra $\mathfrak{U}$.

Za topološki prostor $(E, \mathfrak{T})$ kaže se da je uniformizabilan ako na skupu E postoji uniformna struktura kompatibilna sa topologijom $\mathfrak{T}$.

U radu se dokazuje sledeće:

Lema 1. *Da topološki prostor $(E, \mathfrak{T})$ bude uniformizabilan, dovoljno je da to bude prostor klase $E(M_F)$ koji verifikuje uslov:*

(*u*) *Za bilo koje tri tačke a, b, c skupa E i svako $X \in \mathfrak{F}$ postoji $Y \in \mathfrak{F}$ tako da je*

$$[f(a, b) \in Y \ \&\ f(a, c) \in Y] \rightrightarrows [f(b, c) \in X].$$

Lema 2. *Za svaki topološki uniformizabilni prostor $(E, \mathfrak{T})$ postoji skup $M \neq E \times E$ i preslikavanje f kombiniranog proizvoda $E \times E$ u M, koje verifikuje uslov* (*u*), *tako da se prostor $(E, \mathfrak{T})$ može rekonstruisati korespondentnim sistemom okolina* (1).

Leme 1 i 2 i njihovi dokazi pokazuju da važi:

Teorema 1. *Da topološki prostor $(E, \mathfrak{T})$ bude uniformizabilan, potrebno je i dovoljno da to bude prostor klase $E(M_F)$ koji verifikuje uslov* (*u*).

Kompletno regularnim naziva se svaki topološki uniformizabilni prostor u kome je ispunjen aksiom separacije F. Hausdorff-a.

---

1) Saopšteno na IV Kongresu matematičara Austrije u Beču (17—22 septembra 1956).

L e m a 3. *Svaki prostor klase* $E\,(M_F)$ *koji verifikuje uslov* (u) *i takav da je* $\bigcap_{X\in\mathfrak{F}} X=\{f(a, a)\mid a\in E\}$, *jeste kompletno regularan.*

L e m a 4. *Za svaki kompletno regularni prostor* $(E, \mathfrak{T})$ *postoji skup* $M\neq E\times E$, *familija* $\mathfrak{F}$ *podskupova* $X\subset M$ *sa svojstvom* $\bigcap_{X\in\mathfrak{F}} X=\{f(a, a\mid a\in E\}$ *i preslikavanje* f *kombiniranog proizvoda* $E\times E$ *u* M, *koje verifikuje uslov* (u), *tako da se prostor* $(E, \mathfrak{T})$ *može rekonstruisati korespondentnim sistemom okolina* (1).

Iz lema 3, 4 i njihovih dokaza sledi:

T e o r e m a 2. *Da topološki prostor* $(E, \mathfrak{T})$ *bude kompletno regularan, potrebno je i dovoljno da to bude prostor klase* $E\,(M_F)$, *koji verifikuje uslov* (u), *tako da se presek svih elemenata familije* $\mathfrak{F}$ *svodi na skup* $\{f(a, a)\mid a\in E\}$.

Leme 2 i 4 dokazane su modifikacijom jednog postupka kojim je Dj. Kurepa ([7], [8], str. 1049) dokazao da je svaki separirani uniformni prostor klase $\mathfrak{E}\,[M]$ koji verifikuje uslov O^4.

U vezi sa gornjim rezultatima napomenimo da je J. Colmez ([6], str. 141—3) karakterisao kompletno regularne prostore pokazavši da je klasa ovih prostora topološki identična klasi prostora koji se mogu definisati pomoću uredjenog, regularnog razmaka I-og tipa, pri čemu je ova druga topološki identična klasi separiranih uniformnih prostora. Po definiciji, uredjeni razmaci su podesno izabrana preslikavanja kombiniranog proizvoda $E\times E$ u jedan uredjeni skup. Ta ideja potiče od Dj. Kurepe ([9], str. 1563). Karakterizaciju uniformizabilnih i kompletno regularnih prostora, sasvim različitu od gornjih, dao je N. Bourbaki ([5], str. 9). U osnovi razmatranja N. Bourkaki-a takodje leži pojam razmaka, ali je ovaj definisan preslikavanjem f skupa $E\times E$ u skup realnih, nenegativnih brojeva, takvim da je $f(x, x)=0$, $x\in E$ i da važe svi ostali uslovi razdaljinske funkcije metričkih prostora. Naravno, A. Weil je ([14], str. 13—16) prvi dokazao da je svaki separirani uniformni prostor kompletno regularan i obrnuto, oslanjajući se na aksiom kompletne regularnosti koji N. Bourbaki ([5], str. 9) označuje sa (O_{IV}). Napomenimo da kompletno regularni prostori nose takodje ime *prostora Tychonoff*-a, po Tychonoff-u ([13], str. 544—561) koji ih je prvi i uveo u Topologiju. Detaljnije o ovim važnim prostorima videti radove [2] i [12] kao i izvrsno delo [1] P. S. Alexandroff-a.

RÉFÉRENCES

[1] P. S. Alexandroff:
Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[2] P. S. Alexandroff:
О понятии пространства в топологии, Успехи математических наук, том. 2, вып. 1 (17).

[3] A. Appert-Ky-Fan;
Espaces topologiques intermédiaires, Hermann et Cie, Paris, 1951.

[4] N. Bourbaki:
Topologie générale, L. III, Chap. I et II, Hermann et Cie, Paris, 1951.

[5] N. Bourbaki:
Topologie générale, L. III, Chap. IX, Hermann et Cie, Paris, 1948.

[6] J. Colmez:
Sur divers problèmes concernant les espaces topologiques, Portugaliae mathematica, Vol. 6, Fasc. 3—4, 1947.

[7] G. Kurepa:
Sur l'écart abstrait, Glasnik mat. fiz. i astr. T. 11, № 2, Zagreb, 1956.

[8] G. Kurepa:
Le problème de Suslin et les espaces abstraits, Comptes rendus, 203, Paris, 1936.

[9] G. Kurepa:
Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés, Comptes rendus, 198. Paris, 1934.

]10] Z. Mamuzić:
Structures topologiques définies sur un ensemble E par des structures sur un ensemble M et par application $f(E \times E) \subset M$, Zbornik Mašinskog fakulteta, 1955, Beograd.

[11] Z. Mamuzić:
Structures topologiques [uniformes] diverses définies sur un ensemble E par application $f(E \times E) \subset M$ *dans un ensemble M ordonné [quelconque],* Bulletin de la Soc. math. et phys. de la R. P. de Serbie, VII, 3—4 (1955), Beograd.

[12] J. Smirnov:
О вполне регулярных пространствах, Доклады Академии Наук СССР, т. 62, № 6, 1948.

[13] A. Tychonoff:
Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann., 102 (1930).

[14] A. Weil:
Sur les espaces à structure uniforme ..., Hermann et Cie, Paris, 1936.