PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 330 — № 337 (1970)

331. DREI NOTEN ÜBER STIRLINGZAHLEN*

Ivan Paasche

1. Eine Bemerkung zur Note [1]

Im Literaturverzeichnis des Artikels [**1**] kann man anfügen:
[18] L. OETTINGER: *Höhere Analysis.* Heidelberg 1831.
Dort stehen auf S.92 die ersten 7 STIRLINGpolynome 2. Art (Fehler bei $\mathfrak{S}_{n+7,n}$), die ja absolut die gleichen Koeffizienten besitzen wie die STIRLINGpolynome 1. Art. Bezeichnet man wie heute üblich

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{S}_{11} & & & \\ \mathfrak{S}_{21} & \mathfrak{S}_{22} & & \\ \mathfrak{S}_{31} & \mathfrak{S}_{32} & \mathfrak{S}_{33} & \\ \mathfrak{S}_{41} & \mathfrak{S}_{42} & \mathfrak{S}_{43} & \mathfrak{S}_{44} \\ . & . & . & . \end{array} = \begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ 1 & 7 & 6 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{STIRLING 2. Art} \\ \mathfrak{S}_{m,n-1}+n\mathfrak{S}_{mn} \\ \quad =\mathfrak{S}_{m+1,n} \end{array}$$

so schreiben sich die OETTINGERformeln so:

$$\mathfrak{S}_{n+1,n}=\binom{n+1}{2} \quad \mathfrak{S}_{n+2,n}=\frac{1}{4}\binom{n+2}{3}(3n+1) \quad \mathfrak{S}_{n+3,n}=\frac{1}{2}\binom{n+3}{4}(n^2+n)$$

$$\mathfrak{S}_{n+4,n}=\frac{1}{48}\binom{n+4}{5}(15n^3+30n^2+5n-2)$$

$$\mathfrak{S}_{n+5,n}=\frac{1}{16}\binom{n+5}{6}(3n^4+10n^3+5n^2-2n)$$

$$\mathfrak{S}_{n+6,n}=\frac{1}{576}\binom{n+6}{7}(63n^5+315n^4+315n^3-91n^2-42n+16)$$

$$\mathfrak{S}_{n+7,n}=\frac{1}{144}\binom{n+7}{8}(9n^6+63n^5+105n^4-7n^3-42n^2+16n).$$

Offenbar hat OETTINGER nicht beobachtet, daß alle $\mathfrak{S}_{n+1+2k,n}$ auch den Faktor $\binom{n+1}{2}$ enthalten, denn er notiert $\mathfrak{S}_{n+7,n}$ mit drei ganz falschen Koeffizienten

* Presented June 30, 1970 by D. S. MITRINOVIĆ.

1638, 5024, 3360 (statt 42, 16, 0), die er von S. 87 übernimmt. — Die Bezeichnung von OETTINGER lautet $\mathfrak{S}_{n+k,n} = SC'(k;\ 1, 2, 3, \ldots, n)$ und bedeutet die vollständige homogene Summe k-ten Grades der n Elemente $1, 2, \ldots, n$, also einen Quotienten zweier VANDERMONDE-Determinanten.

BEISPIEL: $\mathfrak{S}_{42} = SC'(2;\ 1, 2) = 1^2 + 1\cdot 2 + 2^2 = \begin{vmatrix} 1^3 & 1^0 \\ 2^3 & 2^0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1^1 & 1^0 \\ 2^1 & 2^0 \end{vmatrix} = 7.$

2. Erweiterung einer Hypothese von Mitrinović

Betrachtet werden die STIRLINGzahlen 1. Art

$$\begin{array}{llll} S_{11} & & & \\ S_{21} & S_{22} & & \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} = \begin{array}{rrrr} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 2 & -3 & 1 & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{0}$$

Die Hypothese in [2] läßt sich nach Multiplikation mit dem Faktor $n-1$ so aussprechen: Die beiden Polynome in n des Grades $2k-3$ $(k=2, 3, 4, \ldots)$

$$A_{nk} = kS_{n,n-2k+2} \Big/ \binom{n}{2k-1} \quad \text{und} \quad B_{nk} = -S_{n,n-2k+1} \Big/ n\binom{n}{2k} \tag{1}$$

besitzen das gleiche konstante Glied $-(-1)^k a_{2k-3} n^0$ mit positivem a_{2k-3}. Bei dieser Formulierung gelangt man induktiv zu 4 weiteren Hypothesen über die von k abhängigen Koeffizienten der Polynome (1) für $k>3$: Mit positiven $a_0, a_1, a_2, a_{2k-4}, a_{2k-3}$ gilt

$$\begin{aligned} A_{nk} &= (a_0 n^{2k-3} - a_1 n^{2k-4} + a_2 n^{2k-5}) \pm \cdots - (-1)^k (a_{2k-4} n^1 + a_{2k-3} n^0) \\ B_{nk} &= \left(\frac{a_0}{2k-1} n^{2k-3} - \frac{a_1}{2k-3} n^{2k-4} + \frac{a_2}{2k-5} n^{2k-5}\right) \pm \cdots - (-1)^k (a_{2k-4} n^1 + a_{2k-3} n^0). \end{aligned} \tag{2}$$

Über die mittleren Koeffizienten $\pm \ldots$ lassen sich keine so einfachen Vermutungen anstellen. In den Fällen $k = 1, 2, 3$ hat man analoge kürzere Formeln. Die Beispiele $k = 1$ bis 7 von (1) lauten

$$\begin{aligned} A_{n1} &= 1/n \ (\neq \text{Polynom in } n) &&= P_0(n) \\ B_{n1} &= 1/n \ (\neq \text{Polynom in } n) &&= (1-n)P_1(n) \\ 2A_{n2} &= 3n - 1 &&= P_2(n) \\ 2B_{n2} &= n - 1 &&= (1-n)P_3(n) \\ 16A_{n3} &= 15n^3 - 30n^2 + 5n + 2 &&= P_4(n) \\ 16B_{n3} &= 3n^3 - 10n^2 + 5n + 2 &&= (1-n)P_5(n) \\ 144A_{n4} &= 63n^5 - 315n^4 + 315n^3 + \cdots - 42n - 16 &&= P_6(n) \end{aligned}$$

$$144 B_{n4} = 9n^5 - 63n^4 + 105n^3 + \cdots - 42n - 16 = (1-n)P_7(n)$$

$$768 A_{n5} = 135n^7 - 1260n^6 + 3150n^5 - \cdots + 404n + 144 = P_8(n)$$

$$768 B_{n5} = 15n^7 - 180n^6 + 630n^5 - \cdots + 404n + 144 = (1-n)P_9(n)$$

$$1536 A_{n6} = 99n^9 - 1485n^8 + 6930n^7 - \cdots - 2288n - 768 = P_{10}(n)$$

$$1536 B_{n6} = 9n^9 - 165n^8 + 990n^7 - \cdots - 2288n - 768 = (1-n)P_{11}(n)$$

$$552960 A_{n7} = 12285n^{11} - 270270n^{10} + 2027025n^9 - \cdots + 3327584n + 1061376 = P_{12}(n)$$

$$552960 B_{n7} = 945n^{11} - 24570n^{10} + 225225n^9 - \cdots + 3327584n + 1061376 = (1-n)P_{13}(n).$$

Die Grundformel der STIRLING-Dreiecksmatrix (0)

$$S_{n,m-1} - nS_{nm} = S_{n+1,m} \tag{3}$$

muß hier für $m = n - 2k + 2 = (n+1) - 2k + 1$ benutzt werden. Setzt man (1) in (3) ein und dividiert durch $-\binom{n}{2k-1}\frac{1}{2k}$, so ergibt sich

$$n(n-2k+1)B_{nk} + 2nA_{nk} = (n+1)^2 B_{n+1,k} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Bei Einsetzen von (2) in (4) fallen die Potenzen n^{2k-1} und n^{2k-2} von selbst heraus, die Potenz n^{2k-3} jedoch nur, falls stets $\binom{2k-2}{2}a_0 = 3a_1$ ist, was sogar in allen 6 Beispielen $k = 2$ bis 7 zutrifft.

Der Polynomansatz ohne Minuszeichen

$$A_{nk} = A_0 n^{2k-3} + \cdots + A_{2k-3} n^0$$

$$B_{nk} = B_0 n^{2k-3} + \cdots + B_{2k-3} n^0$$

liefert in Verbindung mit (4) folgende Koeffizientenvergleiche: Bei n^{2k-1} die Identität $B_0 = B_0$ und bei n^{2k-t} $(t = 2, 3, 4, \ldots)$ die Gleichung

$$2A_{t-2} = (4k-t)B_{t-2} + \sum_{\tau=1}^{t-2}\left[\binom{2k-\tau-2}{t-\tau-2} + 2\binom{2k-\tau-2}{t-\tau-1} + \binom{2k-\tau-2}{t-\tau}\right]B_{\tau-1},$$

also insbesondere $A_0 = (2k-1)B_0$. Die vorderste Hypothese ist damit bewiesen. Die (hinterste) Hypothese von MITRINOVIĆ besagt genauer $(t = 2k-1)$

$$2A_{2k-3} = 2B_{2k-3} = (2k+1)B_{2k-3} + \sum_{\tau=1}^{2k-3}(2k-\tau)B_{\tau-1}.$$

Die benachbarte hintere Hypothese besagt genauer $(t = 2k-2)$

$$2A_{2k-4} = 2B_{2k-4} = (2k+2)B_{2k-4} + \sum_{\tau=1}^{2k-4}\left[\binom{2k-\tau-2}{2} + (4k-2\tau-3)\right]B_{\tau-1}.$$

A_{2k-3} und A_{2k-4} haben als Zahlenwert beide das Vorzeichen $-(-1)^k$. Der Koeffizientenvergleich in (4) bei den Potenzen n^{2k-2}, n^{2k-3}, n^{2k-4} liefert zusammen mit den 3 vorderen Hypothesen für $k=3, 4, 5, \ldots$ die Kette

$$0<\frac{B_0}{\binom{2k-1}{0}}=\frac{A_0}{\binom{2k-1}{1}}=\frac{-3B_1}{\binom{2k-1}{2}}=\frac{-A_1}{\binom{2k-1}{3}}=\frac{3B_2}{\binom{2k-1}{4}}=\frac{3A_2}{5\binom{2k-1}{5}},$$

die in bekannter Weise auch für $k=2$ als formal gültig erklärt werden darf.

$$(4)_{n=0} \text{ führt auf } 0=B_{1k}=B_0+B_1+\cdots+B_{2k-3},$$

$$(4)_{n=-1} \text{ auf } A_{-1,k}=kB_{-1,k},$$

$$\text{explizit } -A_0+A_1-\cdots+A_{2k-3}=k(-B_0+B_1-\cdots+B_{2k-3}).$$

Das sind 2 nur auf bekannten Polynomeigenschaften der S_{nm} beruhende Rechenkontrollen, die von den 4 unbewiesenen Hypothesen unabhängig sind.

Zusatz bei der Korrektur. Die eckige Klammer auf S. 19, 9 Zeilen nach Formel (4), hat den bequemen Wert $\binom{2k-\tau}{t-\tau}$, am Seitenende also $\binom{2k-\tau}{2}$.

3. Beweis dreier Hypothesen nach (berichtigten) Ergebnissen von Schweins

In **2.** wurden der Hypothese von MITRINOVIĆ aus [2] unter anderem drei vordere Hypothesen nachgebildet, die sich gemäß [3] und **2.** wie folgt notieren lassen ($S_{n,n-\nu}$ ist das STIRLINGpolynom 1. Art des Grades 2ν in n): Sei $t=1$ oder 2 oder 3. Für $k=3, 4, 5, \ldots$ besitzen die beiden Polynome des Grades $2k-3$ in n

$$(1) \qquad A_{nk}=kS_{n,n-2k+2}\Big/\binom{n}{2k-1}=k\,a(n,2k-2)\Big/\binom{n}{2k-1} \quad \text{und}$$

$$(2k-t)B_{nk}=-(2k-t)S_{n,n-2k+1}\Big/\binom{n}{2k}=(2k-t)\,a(n,2k-1)\Big/n\binom{n}{2k}$$

die gleichen Koeffizienten bei der Potenz n^{2k-2-t}. Diese haben in der Bezeichnung von **2.** folgende Werte:

$$(2) \qquad \begin{aligned} A_0&=(2k-1)B_0=1\binom{2k}{2}\Big/2^{2k-2} &&\text{für } t=1\\ A_1&=(2k-3)B_1=-2\binom{2k}{4}\Big/2^{2k-2} &&\text{für } t=2\\ A_2&=(2k-5)B_2=5\binom{2k}{6}\Big/2^{2k-2} &&\text{für } t=3.\end{aligned}$$

In **2.** wurde nur die erste Hypothese in der schwachen Gestalt $A_0=(2k-1)B_0$ bewiesen. Der Beweis aller 3 Hypothesen (2) gelingt jedoch sofort, wenn man in (1) für $a(n, m)$ die Darstellung von SCHWEINS heranzieht. Die Formel bei SCHWEINS ist fehlerhaft, da er die aufsteigende und absteigende lexikographische Anordnung der Fakultätenprodukte miteinander verwechselt. Für das Bildungsgesetz von $a(n, m)$ nach SCHWEINS ist bereits der Fall $m=3$ repräsentativ, der Vertauschungsfehler kommt jedoch erst ab $m=5$ zum Vorschein. Das berichtigte

Bildungsgesetz lautet wie folgt und leistet unmittelbar den Beweis der 3 Hypothesen (2). Wir benutzen $m=5$ zur repräsentativen Darstellung:

$$\frac{5\,a(n,5)}{6!\binom{n}{6}}=$$

$$\frac{1}{6!}+\frac{n-1}{1\cdot 2!\,5!}+\frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2}\,\frac{1}{2!\,2!\,4!}+\frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2}\,\frac{n-3}{3}\,\frac{1}{2!\,2!\,2!\,3!}+\frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2}\,\frac{n-3}{3}\,\frac{n-4}{4}\,\frac{1}{2!\,2!\,2!\,2!\,2!}$$

$$+\frac{n-2}{2\cdot 3!\,4!}+\frac{n-1}{1}\,\frac{n-3}{3}\,\frac{1}{2!\,3!\,3!}+\frac{n-1}{1}\,\frac{n-2}{2}\,\frac{n-4}{4}\,\frac{1}{2!\,2!\,3!\,2!}$$

$$+\frac{n-3}{3\cdot 4!\,3!}+\frac{n-1}{1}\,\frac{n-4}{4}\,\frac{1}{2!\,4!\,2!}+\frac{n-1}{1}\,\frac{n-3}{3}\,\frac{n-4}{4}\,\frac{1}{2!\,3!\,2!\,2!}$$

$$+\frac{n-4}{4\cdot 5!\,2!}+\frac{n-2}{2}\,\frac{n-3}{3}\,\frac{1}{3!\,2!\,3!}+\frac{n-2}{2}\,\frac{n-3}{3}\,\frac{n-4}{4}\,\frac{1}{3!\,2!\,2!\,2!}$$

$$+\frac{n-2}{2}\,\frac{n-4}{4}\,\frac{1}{3!\,3!\,2!}$$

$$+\frac{n-3}{3}\,\frac{n-4}{4}\,\frac{1}{4!\,2!\,2!}$$

LITERATUR

[1] D. S. Mitrinović: *Sur les nombres de Stirling de première espèce et les polynômes de Stirling*. Diese Publicationen № **23** (1959), 1—8.

[2] D. S. Mitrinović et R. S. Mitrinović: *Tableaux qui fournissent des polynômes de Stirling*. Diese Publicationen № **34** (1960), 1—23.

[3] F. Schweins: *Analysis*. Heidelberg 1880, pp. 182—191

8031 Stockdorf / Lk. Starnberg
Kobellstr. 1, Deutschland