PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 320 — № 328 (1970)

321. TRANSZENDENTE GLEICHUNGEN, DEREN LÖSUNGEN DURCH DIE INVERSEN FUNKTIONEN DER FUNKTION e^x/x AUSDRÜCKBAR SIND*

Dragoš Cvetković

In this paper transcedental equations are given, whose solutions can be expressed by inverse functions of the function e^x/x. Tables of the mentioned functions are given also.

Diese Arbeit stellt eine Zusammenfassung und eine Fortsetzung der Arbeit [1] dar. In beiden Artikeln ist die Grundidee im folgenden.

Es sei $z_1(x)$ die inverse Funktion der Funktion e^x/x $(x \leqq 1)$, und $z_2(x)$ die inverse Funktion der Funktion e^x/x $(x \geqq 1)$. Die Gleichung

$$e^x = kx \qquad (k \text{ reelle Zahl}) \tag{1}$$

hat dann

a) eine reelle Lösung $x_1 = z_1(k)$ für $k < 0$,
b) keine reelle Lösung für $0 \leqq k < e$, und
c) zwei reellen Lösungen $x_1 = z_1(k)$ und $x_2 = z_2(k)$ für $k \geqq e$.

Die Tatsache, daß man die reellen Lösungen der Gleichung (1) mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens, das auf Koeffizient k verwendet wird, erhält, bezeichnen wir mit

$$x_{(1,2)} = z(k). \tag{1'}$$

Die Indexe 1, 2 sind in Klammern gesetzt, weil man die Zahl der reellen Lösungen nicht kennt, da k nicht fixiert ist. Wir schreiben auch kürzer $x = z(k)$.

In [2] und [3] sind alle, reelle und komplexe, Lösungen einer Modifikation der Gleichung (1) bestimmt gewesen. Wir beschränken uns auf die reellen Lösungen aber es ist möglich die Bedeutung des Operators z aus (1') so verbreiten, daß er alle Lösungen der Gleichung (1) gibt.

Es ist interessant, daß eine große Zahl der transzendenten Gleichungen, in welchen die Ausdrücke e^x, x^n, $\log x$, x^x u.a. sich befinden, mit Hilfe der günstigen Substitutionen der Unbekannten auf die Gleichung (1) führen. Deshalb kan man die Lösungen dieser Gleichungen durh ihre Koeffizienten mit Hilfe der Funktionen $z_1(x)$ und $z_2(x)$, d.h. des Operators z, ausdrücken. Mit Hilfe der nummerischen Tafeln für die Funktionen $z_1(x)$ und $z_2(x)$ kann

* Presented March 28, 1970 by D. S. Mitrinović.

man die Lösungen der Gleichungen mit nummerischen Koeffizienten erhalten. Außerdem kann das Verfahren mit dem Operator z bei Diskussion der Anzahl der reellen Lösungen der Gleichungen mit veränderlichen Koeffizienten verwendet werden [1].

Obwohl alle Substitutionen der Unbekannten in Gleichungen, die sogleich angeführt werden, sehr einfach sind, glauben wir doch, daß eine Liste der durch den Operator z lösbaren Gleichungen interessant wäre. Keine ähnliche Liste haben wir in der Literatur gefunden.

Auf Grund des Dargelegten, schlagen wir vor, daß die Funktionen $z_1(x)$ und $z_2(x)$, oder vielleicht eine ihrer Modifikationen, als elementäre Funktionen betrachtet werden sollen.

1. Gleichungen, die durch einfache Anwendung des Operators z lösbar sind

Wenn nichts anderes gesagt ist, soll man alle Koeffizienten in Gleichungen als reelle Zahlen beobachten.

1° Aus der Gleichung

$$e^x = kx + b \tag{2}$$

ensteht durch die Substitution $kx + b = kt$ die Gleichung $e^t = e^{\frac{b}{k}} kt$. Daraus ist $t_{(1,2)} = z(e^{\frac{b}{k}} k)$ d.h.

$$x_{(1,2)} = z(e^{\frac{b}{k}} k) - \frac{b}{k}. \tag{2'}$$

Mit ähnlichem Verfahren kann auch die folgende allgemeinere Gleichung gelöst werden:

$$ab^{cx+d} = fx + g. \tag{2''}$$

2° Die Gleichung

$$e^{ax^m} = bx^n \tag{3}$$

bekommt durch die Substitution $ax^m = t$ die Form $e^t = ba^{-\frac{n}{m}} t^{\frac{n}{m}}$. Daraus folgt $e^{\frac{m}{n}t} b^{\frac{m}{n}} a^{-1} t$. Durch die neue Substitution $u = \frac{m}{n} t$ bekommt man die Gleichung $e^u = b^{\frac{m}{n}} \frac{n}{ma} u$, deren Lösungen $u = z\left(\frac{n}{ma} b^{\frac{m}{n}}\right)$ sind. Die Lösungen der Gleichung (3) sind

$$x = \left[\frac{n}{ma} z\left(\frac{n}{ma} b^{\frac{m}{n}}\right)\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{3'}$$

3° Die Gleichung

$$\log x = ax^n + b \tag{4}$$

führt durch die Substitution $x^n = e^t$ auf die Gleichung von der Gestalt (2). Einen interessanten Spezialfall bekommt man für $n = -1$

$$x \log x = a + bx. \tag{5}$$

4° Durch Logarithmierung und Einsetztung $x = e^{-t}$ die Gleichung

$$x^x = a \qquad (x,\, a > 0) \tag{6}$$

wird $e^t = -\dfrac{1}{\log a}\, t$ und daraus folgt

$$x = e^{-z\left(-\frac{1}{\log a}\right)} = -\frac{\log a}{z\left(-\dfrac{1}{\log a}\right)}. \tag{6'}$$

Analog löst man die Gleichung

$$\sqrt[x]{x} = a \qquad (x,\, a > 0) \tag{6''}$$

und andere ähnliche Gleichungen.

5° Die Gleichung

$$e^{\frac{ax+b}{cx+d}} = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \tag{7}$$

kann mit Hilfe des Operators z gelöst werden, wenn

$$\begin{vmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & \beta \end{vmatrix} = 0 \tag{7'}$$

gilt.

In beiden Fällen erhält man durch Einsetzung $\dfrac{1}{cx+d} = t$ die Gleichung von der Gestalt (2'').

6° Nach der Darstellung der hyperbolischen Funktionen durch die Exponentialfunktionen und nach dem Lösen nach e^{ax+b} die Gleichungen

$$2x \operatorname{ch}(ax+b) = x^2 + 1 \tag{8}$$

$$2x \operatorname{sh}(ax+b) = x^2 - 1 \tag{9}$$

$$\operatorname{th}(ax+b) = \frac{x^2 - c^2}{x^2 + c^2} \tag{10}$$

erhalten die Gestalt (2'').

Betrachten wir z.B. (8). Wenn $e^{ax+b} = y$, bekommt man aus (8)

$x\left(y + \dfrac{1}{y}\right) = x^2 + 1$ d.h. $(y - x)\left(\dfrac{1}{y} - x\right) = 0$. Also, (8) zerlegt sich in die Gleichungen $e^{ax+b} = x$ und $e^{-(ax+b)} = x$.

7° Es sei $P(x)=0$ eine algebraische Gleichung und $\varphi(x)=k$ (k Konstante) eine von angeführten Gleichungen. Die Gleichung

$$P(\varphi(x))=0 \tag{11}$$

führt durch Substitution $\varphi(x)=k$ zu $P(k)=0$. Wenn k_i ($i=1,\ldots,n$) die Lösungen der Gleichung $P(k)=0$ sind, soll man noch die Gleichungen $\varphi(x)=k_i$ lösen.

Einige interessante Gleichungen von der Gestalt (11) sind hier als Beispiele angeführt:

$$a_0\, e^{nx}+a_1 x e^{(n-1)x}+\cdots+a_n x^n=0 \tag{11'}$$

$$a_0 \log^n x+a_1 x \log^{n-1} x+\cdots+a_n x^n=0 \tag{11''}$$

$$a_0\, x^{nx}+a_1 x^{(n-1)x}+\cdots+a_n=0. \tag{11'''}$$

Bei dem Lösen der Gleichungen von dem Typ (11) soll man Rechnung führen, daß die Gleichung (1) keine reelle Lösung hat, wenn k nicht reell ist.

2. Iteration des Operators z

1° Die Gleichung

$$x^x e^{e^x}=a^x e^{x^2} \qquad (x,\ a>0) \tag{12}$$

kann nach x gelöst werden. Wenn man beide Seiten von (12) mit $\frac{1}{x}$ potenziert, bekommt man $x e^{e^x/x}=a e^x$ d.h. $e^{e^x/x}=a e^x/x$, woraus $e^x/x=z(a)$ folgt sowie $x=z(z(a))$. Auf Grund der Eigenschaften des Operators z kann man folgern, daß die Gleichung (12):

a) keine reelle Lösung für $0<a<e$ und $0<z(a)<e$, d. h. $0<a<e^{e-1}$, hat;

b) eine reelle zweifache Lösung $x_{1,2}=1$ für $a=e^{e-1}$ hat;

c) zwei reelle verschiedene Lösungen $x_1=z_1(z_2(a))$ und $x_2=z_2(z_2(a))$ für $a>e^{e-1}$ hat.

2° Die Gleichung

$$x^\alpha e^{\beta x^n}=\gamma \log x+\delta x^n+\eta \tag{13}$$

ist durch z lösbar, wenn $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=0$. In diesem Fall kann (13) in folgender Form geschrieben werden

$$e^{\alpha \log x+\beta x^n}=\frac{\gamma}{\alpha}(\alpha \log x+\beta x^n)+\eta.$$

Nach Verwendung der Formel (2′) bekommt man

$$\alpha \log x+\beta x^n=z\left(e^{\frac{\alpha\eta}{\gamma}}\frac{\gamma}{\alpha}\right)-\frac{\alpha\eta}{\gamma}. \tag{13'}$$

Die Gleichung (13′) ist von der Gestalt (4) und weiteres Lösen ist augenscheinlich. In endlicher Lösung der Gleichung (13) befinden sich zwei, iterativ angewendeten, Operatoren z.

3° Ähnlich ist es auch mit der Gleichung

$$x^{\alpha x}e^{\beta x}=\gamma x\log x+\delta x+\eta, \tag{14}$$

die lösbar ist, wenn $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=0$. Dann ist

$$e^{\alpha x\log x+\beta x}=\frac{\gamma}{\alpha}(\alpha x\log x+\beta x)+\eta,$$

woraus die Gleichung

$$\alpha x\log x+\beta x=z\left(e^{\frac{\alpha\eta}{\gamma}}\frac{\gamma}{\alpha}\right)-\frac{\alpha\eta}{\gamma} \tag{14′}$$

folgt, die von der Gestalt (5) ist.

3. In der Lösung befinden sich zwei Operatoren z

Weitere Anwendungsmöglichkeiten des Operators z kann man in folgenden Beispielen betrachten.

Bei der Forschung kann umgekehrtes Problem aufgestellt werden: Welche Gleichung hat die gegebene Lösung? In dieser Weise können eventuell die Formen der Gleichungen, die durch z lösbar sind, geahnt werden.

1° Welche Gleichung hat die Lösung $x=z(a)+z(b)$?

Aus $z(a)=x-z(b)$ folgt $e^{x-z(b)}=a(x-z(b))$. Da $e^{z(x)}=xz(x)$ ist, bekommt man

$$\frac{e^x}{bz(b)}=a(x-z(b)),\quad z(b)=\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}},$$

$$e^{\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}}}=b\left(\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}}\right),$$

$$\left(e^{\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}}}-b\frac{x}{2}\right)^2=b^2\left(\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}\right),$$

$$ae^{\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}}}+be^{\mp\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}}}=abxe^{-\frac{x}{2}}$$

$$(a+b)\operatorname{ch}\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}}\pm(a-b)\operatorname{sh}\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{e^x}{ab}}=abxe^{-\frac{x}{2}}, \tag{15}$$

Durch ähnliches Verfahren ersieht man, daß der Ausdruck $x=z(a)\,z(b)$ die Lösung der Gleichung

$$(a+b)\operatorname{ch}\sqrt{\log^2\sqrt{abx}-x}\pm(a-b)\operatorname{sh}\sqrt{\log^2\sqrt{abx}-x}=\sqrt{\frac{ab}{x}}\log abx \tag{16}$$

darstellt.

4. Nummerische Tafeln

Die vorliegenden Tafeln für Funktionen $z_1(x)$ und $z_2(x)$ sind an einem IBM 1130 Elektronenrechner aus Rechnenzentrum der Elektrotechnischen Fakultät in Beograd erhalten. Es war die Iterationsmethode auf die Gleichung (1) angewendet. Diese Tafeln sind als unvollständige zu betrachten. Erst nach einer längeren Zeit kann man ersehen, in welchem Umfang soll man die Funktionen $z_1(x)$ und $z_2(x)$ tabulieren, um alle angeführten Gleichungen günstig lösen zu können.

Es ist bekannt, daß die Formell

$$(17) \qquad z_1(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-1}}{n!}\;\frac{1}{x^n} \qquad (|x|>e)$$

gilt (vgl. [4], S. 141-142). Für einen großen $|x|$ stellen einige der ersten Gliedeı aus Entwicklung (17) eine gute Aproximation für $z_1(x)$ dar. Andererseits, wenn man in (1) für einen kleinen x $e^x\approx 1+x$ einsetzt, erhält man $x\approx\frac{1}{k-1}$ d.h.

$$(18) \qquad z_1(x)\approx\frac{1}{x-1} \qquad (x\to\infty).$$

Aproximation (18) gibt schon für $|x|=50$ die Werte von $z_1(x)$ mit dem Fehler, der etwa gleich 10^{-5} ist.

Günstige Aproximationen für $z_1(x)$ $(x\to 0-)$ und $z_2(x)$ $(x\to+\infty)$ haben wir nicht gefunden.

In der Literatur bestehen verschiedene Tafeln von Lösungen der transzendenten Gleichungen. In [5] befinden sich Lösungen einiger speziellen Gleichungen und Referenzen [6]—[8].

In [6] sind zwei Lösungen der Gleichung $ue^{1-u}=e^{-t}$ für $t=0(0{,}02)\,1\,(0{,}1)11$ mit 7—8 Dezimalstellen gegeben.

[7] gibt die Lösung y $(\neq 0)$ der Gleichung $xy=1-e^{-y}$ für $x=0(0{,}1)1$ mit 5 Dezimalen.

In [8] befindet sich die Lösung $(\neq 0)$ der Gleichung $\log(1+x^3)=\frac{x^3}{10^k}$ für $k=0{,}05(0{,}01)\,0{,}65$ mit 4 Dezimalen.

Aus neuerer Zeit stammen die Tafeln [9]. Dort befinden sich die Lösungen $(\neq 0)$ der Gleichungen $e^{-a}+ka=1$ $\big(k=0{,}050(0{,}001)\,1\big)$ und $e^{-a}-\frac{a}{1-p}=1$ $\big(p=0(0{,}001)0{,}999\big)$ mit 7 Dezimalen.

Alle angeführten Tafeln sind hauptsächlich für spezielle Probleme tabuliert.

TAFEL 1.

$z_1(x)$ für x=—50,0 (0,5)—10,0 (0,1)—1,00 (0,01)—0,300 (0,005)—0,100 (0,001)—0,001 (0,0001)—
—0,0001 (0,00001)—0,00001

x	$z_1(x)$	x	$z_1(x)$	x	$z_1(x)$	x	$z_1(x)$
—50,0	—0,01961	—25,0	—0,03849	—8,0	—0,11178	—3,0	—0,25763
—49,5	—0,01981	—24,5	—0,03925	—7,9	—0,11305	—2,9	—0,26465
—49,0	—0,02000	—24,0	—0,04003	—7,8	—0,11435	—2,8	—0,27207
—48,5	—0,02021	—23,5	—0,04085	—7,7	—0,11568	—2,7	—0,27994
—48,0	—0,02041	—23,0	—0,04170	—7,6	—0,11705	—2,6	—0,28829
—47,5	—0,02062	—22,5	—0,04259	—7,5	—0,11844	—2,5	—0,29717
—47,0	—0,02084	—22,0	—0,04352	—7,4	—0,11987	—2,4	—0,30663
—46,5	—0,02106	—21,5	—0,04449	—7,3	—0,12133	—2,3	—0,31675
—46,0	—0,02128	—21,0	—0,04550	—7,2	—0,12283	—2,2	—0,32758
—45,5	—0,02151	—20,5	—0,04656	—7,1	—0,12437	—2,1	—0,33921
—45,0	—0,02174	—20,0	—0,04767	—7,0	—0,12595	—2,0	—0,35173
—44,5	—0,02198	—19,5	—0,04884	—6,9	—0,12757	—1,9	—0,36527
—44,0	—0,02223	—19,0	—0,05006	—6,8	—0,12923	—1,8	—0,37994
—43,5	—0,02248	—18,5	—0,05135	—6,7	—0,13094	—1,7	—0,39592
—43,0	—0,02273	—18,0	—0,05270	—6,6	—0,13269	—1,6	—0,41338
—42,5	—0,02299	—17,5	—0,05413	—6,5	—0,13449	—1,5	—0,43256
—42,0	—0,02326	—17,0	—0,05564	—6,4	—0,13634	—1,4	—0,45375
—41,5	—0,02354	—16,5	—0,05723	—6,3	—0,13824	—1,3	—0,47728
—41,0	—0,02382	—16,0	—0,05892	—6,2	—0,14019	—1,2	—0,50362
—40,5	—0,02410	—15,5	—0,06072	—6,1	—0,14220	—1,1	—0,53332
—40,0	—0,02440	—15,0	—0,06262	—6,0	—0,14427	—1,00	—0,56714
—39,5	—0,02470	—14,5	—0,06465	—5,9	—0,14641	—0,99	—0,57079
—39,0	—0,02501	—14,0	—0,06681	—5,8	—0,14861	—0,98	—0,57448
—38,5	—0,02532	—13,5	—0,06913	—5,7	—0,15087	—0,97	—0,57823
—38,0	—0,02565	—13,0	—0,07161	—5,6	—0,15321	—0,96	—0,58204
—37,5	—0,02598	—12,5	—0,07427	—5,5	—0,15562	—0,95	—0,58590
—37,0	—0,02632	—12,0	—0,07715	—5,4	—0,15810	—0,94	—0,58982
—36,5	—0,02668	—11,5	—0,08025	—5,3	—0,16067	—0,93	—0,59379
—36,0	—0,02704	—11,0	—0,08362	—5,2	—0,16333	—0,92	—0,59783
—35,5	—0,02741	—10,5	—0,08728	—5,1	—0,16608	—0,91	—0,60193
—35,0	—0,02779	—10,0	—0,09128	—5,0	—0,16892	—0,90	—0,60609
—34,5	—0,02818	—9,9	—0,09212	—4,9	—0,17186	—0,89	—0,61031
—34,0	—0,02858	—9,8	—0,09298	—4,8	—0,17490	—0,88	—0,61461
—33,5	—0,02900	—9,7	—0,09386	—4,7	—0,17806	—0,87	—0,61897
—33,0	—0,02942	—9,6	—0,09475	—4,6	—0,18134	—0,86	—0,62340
—32,5	—0,02986	—9,5	—0,09566	—4,5	—0,18474	—0,85	—0,62790
—32,0	—0,03032	—9,4	—0,09659	—4,4	—0,18827	—0,84	—0,63247
—31,5	—0,03078	—9,3	—0,09753	—4,3	—0,19194	—0,83	—0,63712
—31,0	—0,03127	—9,2	—0,09850	—4,2	—0,19576	—0,82	—0,64185
—30,5	—0,03176	—9,1	—0,09948	—4,1	—0,19974	—0,81	—0,64666
—30,0	—0,03227	—9,0	—0,10049	—4,0	—0,20389	—0,80	—0,65155
—29,5	—0,03280	—8,9	—0,10151	—3,9	—0,20821	—0,79	—0,65652
—29,0	—0,03335	—8,8	—0,10256	—3,8	—0,21273	—0,78	—0,66158
—28,5	—0,03392	—8,7	—0,10363	—3,7	—0,21745	—0,77	—0,66673
—28,0	—0,03450	—8,6	—0,10472	—3,6	—0,22239	—0,76	—0,67197
—27,5	—0,03511	—8,5	—0,10583	—3,5	—0,22756	—0,75	—0,67731
—27,0	—0,03574	—8,4	—0,10697	—3,4	—0,23299	—0,74	—0,68274
—26,5	—0,03639	—8,3	—0,10813	—3,3	—0,23869	—0,73	—0,68828
—26,0	—0,03706	—8,2	—0,10932	—3,2	—0,24467	—0,72	—0,69391
—25,5	—0,03776	—8,1	—0,11054	—3,1	—0,25098	—0,71	—0,69966

x	$z_1(x)$	x	$z_1(x)$	x	$z_1(x)$	x	$z_1(x)$
—0,70	—0,70551	—0,250	—1,20217	—0,080	—1,88945	—0,030	—2,56471
—0,69	—0,71148	—0,245	—1,21322	—0,079	—1,89768	—0,029	—2,58914
—0,68	—0,71756	—0,240	—1,22455	—0,078	—1,90603	—0,028	—2,61448
—0,67	—0,72377	—0,235	—1,23616	—0,077	—1,91450	—0,027	—2,64083
—0,66	—0,73010	—0,230	—1,24807	—0,076	—1,92309	—0,026	—2,66824
—0,65	—0,73655	—0,225	—1,26030	—0,075	—1,93181	—0,025	—2,69681
—0,64	—0,74315	—0,220	—1,27286	—0,074	—1,94066	—0,024	—2,72663
—0,63	—0,74988	—0,215	—1,28576	—0,073	—1,94965	—0,023	—2,75782
—0,62	—0,75675	—0,210	—1,29903	—0,072	—1,95877	—0,022	—2,79049
—0,61	—0,76378	—0,205	—1,31268	—0,071	—1,96804	—0,021	—2,82480
—0,60	—0,77095	—0,200	—1,32672	—0,070	—1,97745	—0,020	—2,86089
—0,59	—0,77829	—0,195	—1,34119	—0,069	—1,98702	—0,019	—2,89896
—0,58	—0,78579	—0,190	—1,35611	—0,068	—1,99673	—0,018	—2,93923
—0,57	—0,79346	—0,185	—1,37150	—0,067	—2,00661	—0,017	—2,98196
—0,56	—0,80132	—0,180	—1,38738	—0,066	—2,01666	—0,016	—3,02745
—0,55	—0,80935	—0,175	—1,40379	—0,065	—2,02687	—0,015	—3,07606
—0,54	—0,81759	—0,170	—1,42076	—0,064	—2,03726	—0,014	—3,12823
—0,53	—0,82602	—0,165	—1,43833	—0,063	—2,04784	—0,013	—3,18451
—0,52	—0,83466	—0,160	—1,45653	—0,062	—2,05860	—0,012	—3,24556
—0,51	—0,84352	—0,155	—1,47540	—0,061	—2,06955	—0,011	—3,31224
—0,50	—0,85261	—0,150	—1,49500	—0,060	—2,08070	—0,010	—3,38563
—0,49	—0,86193	—0,145	—1,51537	—0,059	—2,09207	—0,009	—3,46719
—0,48	—0,87150	—0,140	—1,53656	—0,058	—2,10364	—0,008	—3,55887
—0,47	—0,88134	—0,135	—1,55866	—0,057	—2,11544	—0,007	—3,66344
—0,46	—0,89144	—0,130	—1,58171	—0,056	—2,12747	—0,006	—3,78496
—0,45	—0,90183	—0,125	—1,60581	—0,055	—2,13974	—0,005	—3,92974
—0,44	—0,91252	—0,120	—1,63104	—0,054	—2,15226	—0,004	—4,10842
—0,43	—0,92353	—0,115	—1,65751	—0,053	—2,16503	—0,003	—4,34103
—0,42	—0,93486	—0,110	—1,68532	—0,052	—2,17807	—0,002	—4,67284
—0,41	—0,94654	—0,105	—1,71461	—0,051	—2,19139	—0,001	—5,24960
—0,40	—0,95859	—0,100	—1,74553	—0,050	—2,20500	$x \cdot 10^4$	
—0,39	—0,97102	—0,099	—1,75192	—0,049	—2,21892	—9	—5,33822
—0,38	—0,98386	—0,098	—1,75839	—0,048	—2,23314	—8	—5,43757
—0,37	—0,99713	—0,097	—1,76493	—0,047	—2,24770	—7	—5,55054
—0,36	—1,01085	—0,096	—1,77155	—0,046	—2,26260	—6	—5,68139
—0,35	—1,02507	—0,095	—1,77825	—0,045	—2,27786	—5	—5,83673
—0,34	—1,03979	—0,094	—1,78503	—0,044	—2,29349	—4	—6,02768
—0,33	—1,05506	—0,093	—1,79189	—0,043	—2,30952	—3	—6,27513
—0,32	—1,07092	—0,092	—1,79883	—0,042	—2,32595	—2	—6,62617
—0,31	—1,08740	—0,091	—1,80586	—0,041	—2,34283	—1	—7,23185
—0,300	—1,10454	—0,090	—1,81298	—0,040	—2,36015	$x \cdot 10^5$	
—0,295	—1,11338	—0,089	—1,82018	—0,039	—2,37795	—9	—7.32448
—0,290	—1,12240	—0,088	—1,82748	—0,038	—2,39626	—8	—7,42820
—0,285	—1,13162	—0,087	—1,83487	—0,037	—2,41510	—7	—7,54600
—0,280	—1,14103	—0,086	—1,84236	—0,036	—2,43450	—6	—7,68225
—0,275	—1,15065	—0,085	—1,84995	—0,035	—2,45449	—5	—7,84377
—0,270	—1,16049	—0,084	—1,85763	—0,034	—2,47511	—4	—8,04196
—0,265	—1,17055	—0,083	—1,86543	—0,033	—2,49540	—3	—8,29827
—0,260	—1,18084	—0,082	—1,87332	—0,052	—2,51840	—2	—8,66095
—0,255	—1,19138	—0,081	—1,88133	—0,031	—2,54115	—1	—9,28457

TAFEL 2.

$z_1(x)$ und $z_2(x)$ für $x=e$; 2,7183; 2,719; 2,720 (0,005) 2,80 (0,01) 3,50 (0,05) 6,0 (0,1) 15,0 (0,5)50,0

x	$z_1(x)$	$z_2(x)$	x	$z_1(x)$	$z_2(x)$
e	1,00000	1,00000	3,11	0,56670	1,61226
2,7183	0,99635	1,00366	3,12	0,56254	1,62068
2,719	0,97719	1,02316	3,13	0,55846	1,62900
2,720	0,96487	1,03597	3,14	0,55446	1,63723
2,725	0,93137	1,07192	3,15	0,55053	1,64536
2,730	0,91009	1,09564	3,16	0,54668	1,65341
2,735	0,89331	1,11486	3,17	0,54290	1,66138
2,740	0,87509	1,13152	3,18	0,53919	1,66926
2,745	0,86658	1,14646	3,19	0,53554	1,67707
2,750	0,85531	1,16015	3,20	0,53196	1,68479
2,755	0,84501	1,17288	3,21	0,52843	1,69245
2,760	0,83547	1,18483	3,22	0,52497	1,70002
2,765	0,82657	1,19614	3,23	0,52157	1,70753
2,770	0,81821	1,20691	3,24	0,51822	1,71497
2,775	0,81030	1,21722	3,25	0,51493	1,72234
2,780	0,80279	1,22712	3,26	0,51169	1,72964
2,785	0,79564	1,23667	3,27	0,50850	1,73688
2,790	0,78880	1,24590	3,28	0,50536	1,74406
2,795	0,78225	1,25484	3,29	0,50227	1,75117
2,800	0,77594	1,26352	3,30	0,49923	1,75823
2,81	0,76401	1,28020	3,31	0,49623	1,76523
2,82	0,75286	1,29609	3,32	0,49327	1,77217
2,83	0,74237	1,31128	3,33	0,49036	1,77905
2,84	0,73247	1,32588	3,34	0,48749	1,78588
2,85	0,72307	1,33996	3,35	0,48467	1,79266
2,86	0,71413	1,35356	3,36	0,48188	1,79939
2,87	0,70559	1,36674	3,37	0,47913	1,80606
2,88	0,69741	1,37954	3,38	0,47642	1,81268
2,89	0,68957	1,39199	3,39	0,47375	1,81926
2,90	0,68203	1,40413	3,40	0,47111	1,82579
2,91	0,67477	1,41596	3,41	0,46851	1,83227
2,92	0,66777	1,42753	3,42	0,46594	1,83870
2,93	0,66100	1,43884	3,43	0,46340	1,84509
2,94	0,65445	1,44991	3,44	0,46090	1,85143
2,95	0,64811	1,46077	3,45	0,45843	1,85773
2,96	0,64196	1,47141	3,46	0,45599	1,86399
2,97	0,63599	1,48186	3,47	0,45359	1,87020
2,98	0,63019	1,49212	3,48	0,45121	1,87637
2,99	0,62455	1,50221	3,49	0,44886	1,88251
3,00	0,61906	1,51213	3,50	0,44654	1,88860
3,01	0,61371	1,52190	3,55	0,43536	1,91848
3,02	0,60850	1,53151	3,60	0,42480	1,94746
3,03	0,60342	1,54098	3,65	0,41482	1,97560
3,04	0,59846	1,55032	3,70	0,40536	2,00296
3,05	0,59361	1,55952	3,75	0,39638	2,02959
3,06	0,58888	1,56860	3,80	0,38784	2,05554
3,07	0,58425	1,57755	3,85	0,37970	2,08085
3,08	0,57972	1,58639	3,90	0,37193	2,10556
3,09	0,57529	1,59512	3,95	0,36451	2,12969
3,10	0,57095	1,60374	4,00	0,35740	2,15329

x	$z_1(x)$	$z_2(x)$	x	$z_1(x)$	$z_2(x)$
4,05	0,35060	2,17638	7,1	0,16633	3,08744
4,10	0,34407	2,19898	7,2	0,16357	3,10809
4,15	0,33780	2,22112	7,3	0,16090	3,12839
4,20	0,33177	2,24282	7,4	0,15832	3,14836
4,25	0,32597	2,26409	7,5	0,15581	3,16801
4,30	0,32039	2,28497	7,6	0,15339	3,18733
4,35	0,31500	2,30545	7,7	0,15105	3,20636
4,40	0,30981	2,32557	7,8	0,14877	3,22508
4,45	0,30480	2,34533	7,9	0,14656	3,24352
4,50	0,29996	2,36475	8,0	0,14442	3,26169
4,55	0,29527	2,38384	8,1	0,14234	3,27958
4,60	0,29074	2,40261	8,2	0,14032	3,29721
4,65	0,28636	2,42108	8,3	0,13836	3,31459
4,70	0,28211	2,43926	8,4	0,13645	3,33172
4,75	0,27800	2,45714	8,5	0,13460	3,34861
4,80	0,27400	2,47476	8,6	0,13279	3,36527
4,85	0,27013	2,49211	8,7	0,13104	3,38170
4,90	0,26637	2,50920	8,8	0,12932	3,39791
4,95	0,26272	2,52604	8,9	0,12766	3,41391
5,00	0,25917	2,54264	9,0	0,12604	3,42970
5,05	0,25572	2,55901	9,1	0,12445	3,44528
5,10	0,25237	2,57515	9,2	0,12291	3,46066
5,15	0,24910	2,59107	9,3	0,12141	3,47585
5,20	0,24592	2,60677	9,4	0,11994	3,49086
5,25	0,24283	2,62227	9,5	0,11851	3,50567
5,30	0,23981	2,63756	9,6	0,11711	3,52031
5,35	0,23688	2,65266	9,7	0,11574	3,53478
5,40	0,23401	2,66757	9,8	0,11441	3,54907
5,45	0,23122	2,68228	9,9	0,11311	3,56319
5,50	9,22849	2,69682	10,0	0,11183	3,57715
5,55	0,22583	2,71118	10,1	0,11059	3,59095
5,60	0,22323	2,72537	10,2	0,10937	3,60460
5,65	0,22070	2,73939	10,3	0,10818	3,61809
5,70	0,21822	2,75325	10,4	0,10701	3,63143
5,75	0,21580	2,76694	10,5	0,10587	3,64463
5,80	0,21343	2,78048	10,6	0,10476	3,65768
5,85	0,21112	2,79387	10,7	0,10367	3,67060
5,90	0,20886	2,80711	10,8	0,10260	3,68338
5,95	0,20665	2,82020	10,9	0,10155	3,69602
6,00	0,20448	2,83315	11,0	0,10052	3,70853
6,1	0,20029	2,85863	11,1	0,09952	3,72091
6,2	0,19627	2,88358	11,2	0,09853	3,73317
6,3	0,19241	2,90802	11,3	0,09756	3,74531
6,4	0,18870	2,93197	11,4	0,09662	3,75732
6,5	0,18514	2,95545	11,5	0,09569	3,76921
6,6	0,18171	2,97848	11,6	0,09478	3,78099
6,7	0,17840	3,00108	11,7	0,09388	3,79266
6,8	0,17522	3,02326	11,8	0,09301	3,80421
6,9	0,17215	3,04503	11,9	0,09214	3,81565
7,0	0,16919	3,06642	12,0	0,09130	3,82698

x	$z_1(x)$	$z_2(x)$	x	$z_1(x)$	$z_2(x)$
12,1	0,09047	3,83821	25,5	0,04085	4,80921
12,2	0,08966	3,84934	26,0	0,04003	4,83371
12,3	0,08886	3,86036	26,5	0,03925	4,85771
12,4	0,08807	3,87128	27,0	0,03849	4,88124
12,5	0,08730	3,88211	27,5	0,03776	4,90430
12,6	0,08654	3,89283	28,0	0,03706	4,92692
12,7	0,08579	3,90347	28,5	0,03639	4,94911
12,8	0,08506	3,91401	29,0	0,03574	4,97090
12,9	0,08434	3,92445	29,5	0,03511	4,99228
13,0	0,08363	3,93481	30,0	0,03450	5,01329
13,1	0,08294	3,94508	30,5	0,03392	5,03393
13,2	0,08225	3,95526	31,0	0,03335	5,05421
13,3	0,08158	3,96536	31,5	0,03280	5,07415
13,4	0,08092	3,97537	32,0	0,03228	5,09375
13,5	0,08026	3,98530	32,5	0,03176	5,11303
13,6	0,07962	3,99515	33,0	0,03127	5,13200
13,7	0,07899	4,00492	33,5	0,03078	5,15067
13,8	0,07837	4,01461	34,0	0,03032	5,16905
13,9	0,07776	4,02422	34,5	0,02986	5,18714
14,0	0,07716	4,03376	35,0	0,02942	5,20496
14,1	0,07657	4,04321	35,5	0,02900	5,22251
14,2	0,07598	4,05260	36,0	0,02858	5,23980
14,3	0,07541	4,06191	36,5	0,02818	5,25684
14,4	0,07484	4,07115	37,0	0,02779	5,27364
14,5	0,07428	4,08033	37,5	0,02741	5,29020
14,6	0,07373	4,08943	38,0	0,02704	5,30652
14,7	0,07319	4,09846	38,5	0,02668	5,32262
14,8	0,07266	4,10742	39,0	0,02632	5,33851
14,9	0,07213	4,11632	39,5	0,02598	5,35418
15,0	0,07162	4,12515	40,0	0,02565	5,36964
15,5	0,06913	4,16836	40,5	0,02532	5,38490
16,0	0,06682	4,21007	41,0	0,02501	5,39996
16,5	0,06465	4,25037	41,5	0,02470	5,41484
17,0	0,06263	4,28935	42,0	0,02440	5,42952
17,5	0,06072	4,32710	42,5	0,02410	5,44402
18,0	0,05893	4,36369	43,0	0,02382	5,45835
18,5	0,05724	4,39919	43,5	0,02354	5,47250
19,0	0,05564	4,43367	44,0	0,02326	5,48648
19,5	0,05413	4,46717	44,5	0,02299	5,50029
20,0	0,05271	4,49976	45,0	0,02273	5,51394
20,5	0,05135	4,53147	45,5	0,02248	5,52744
21,0	0,05006	4,56236	46,0	0,02223	5,54078
21,5	0,04884	4,59247	46,5	0,02198	5,55396
22,0	0,04767	4,62183	47,0	0,02174	5,56700
22,5	0,04656	4,65049	47,5	0,02151	5,57990
23,0	0,04550	4,67846	48,0	0,02128	5,59266
23,5	0,04449	4,70580	48,5	0,02106	5,60527
24,0	0,04352	4,73251	49,0	0,02084	5,61775
24,5	0,04259	4,75863	49,5	0,02062	5,63010
25,0	0,04170	4,78419	50,0	0,02041	5,64232

LITERATUR

1. D. Cvetković: *O rešavanju nekih transcendentnih jednačina*, Matematička biblioteka, sv. 39, Beograd 1969, str. 111-123.

2. E. M. Wright: *Solution of the equation* $ze^z = a$, Bull. Amer. Math. Soc., **65**(1959), 89-93.

3. E. M. Wright: *Solution of the equation* $ze^z = a$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, A, **65**(1959), 193-203.

4. A. Hurwitz, R. Courant: *Funktionentheorie*, Berlin 1929.

5. A. Fletcher, J. C. P. Miller, L. Rosenhead and L. J. Comprie: *An index of mathematical tables*, Oxford (England) 1962, second edition.

6. G. N. Watson: *Theorems stated by Ramanujan (V): Approximations connected with* e^z, Proc. London Math. Soc., **29**(1929), No. 2, 293-308.

7. C. Hastings, M. Piedem: *Miscellanzous Probability Tables...*, New York 1944.

8. D. A. Evans: *Experimental evidence concerning contagious distributions in ecologi*, Biometrika, **40**(1953), No. 1-2, 186-211.

9. F. N. David, M. G. Kendall and D. E. Borton: *Symmetric Functions and Allied Tables*, Cambridge (England) 1966.

Ka'edra za matematiku
Elektrotehnički fakultet
Beograd, Jugoslavija