PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 320 — № 328 (1970)

320. ÜBER UNGLEICHUNGEN VON DER FORM $f(M_\varphi(x;\ a),\ M_\psi(y;\ a)) \geqq M_\chi(f(x, y);\ a)$*

Eugen Beck

1. Einleitung

Ungleichungen von der Form

$$f(M_\varphi(x;\ a),\ M_\psi(y;\ a)) \geqq M_\chi(f(x,\ y);\ a), \tag{I}$$

zu denen die klassischen Ungleichungen von CAUCHY, HÖLDER und MINKOWSKI gehören, werden hier mit einer einheitlichen Methode untersucht, die auf der Theorie der konkaven (konvexen) Funktionen von zwei Veränderlichen beruht. Ungleichung (I) verknüpft drei pseudoarithmetische Mittelwerte

$$\begin{aligned} &M_\varphi(x;\ a) := \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,\varphi(x_k)\right);\ \varphi : J_x \to J_\varphi \ \text{ mit } \ x_k \in J_x, \\ &M_\psi(y;\ a) := \Psi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,\psi(y_k)\right);\ \psi : J_y \to J_\psi \ \text{ mit } \ y_k \in J_y, \\ &M_\chi(z;\ a) := X\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\,\chi(z_k)\right);\ \chi : J_z \to J_\chi \ \text{ mit } \ z_k \in J_z,\ (k = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Mit Φ, Ψ, X werden hier die zu den „*Abbildungsfunktionen*" φ, ψ, χ inversen Funktionen bezeichnet. Es wird angenommen, daß die $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(z)$ in ihren Definitionsintervallen J_x, J_y, J_z stetig und monoton sind. Da man z.B. statt $\varphi(x)$ auch jede Funktion $a\varphi(x)+b$ mit beliebigen reellen Zahlen a, $b (a \neq 0)$ nehmen kann, ohne daß sich der Mittelwert $M_\varphi(x;\ a)$ ändert, machen wir im folgenden die grundsätzliche Voraussetzung:

(V) Die Abbildungsfunktionen $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(z)$ sind monoton *zunehmende* Funktionen.

Dasselbe gilt dann auch für die Umkehrfunktionen.

Die „*Gewichtszahlen*" $(a) = (a_1, \ldots, a_n)$ seien reelle, nichtnegative Zahlen mit der Summe $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$.

Die „*Verknüpfungsfunktion*" $z = f(x,\ y)$ besitze im Rechteck $J_x \times J_y$ stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung; der Wertebereich von

* Presented March 28, 1970 by D. S. MITRINOVIĆ

$f(x, y)$ sei das Intervall Y_z. Die wichtigsten, hier in Frage kommenden Funktionen sind die Summe $f(x, y) \equiv x + y$ und das Produkt $f(x, y) \equiv xy$; wir nennen die zugehörigen Ungleichungen „*additive*" bzw. „*multiplikative*" Ungleichungen.

Zu den multiplikativen Ungleichungen unserer Klasse gehört die HÖLDERsche Ungleichung, die wir in der Form schreiben

$$M_p(x; \alpha) \cdot M_q(y; \alpha) \geqq M_r(xy; \alpha) \tag{1.2}$$

mit $p^{-1} + q^{-1} \leqq r^{-1}$ und $x, y, p, q, r > 0$. Die M_p, M_q, M_r sind dabei Potenzmittelwerte mit den Abbildungsfunktionen $\varphi(x) = x^p$, $\psi(y) = y^q$, $\chi(z) = z^r$. Der Sonderfall $p = q = 2$, $r = 1$ stellt die CAUCHYsche Ungleichung dar.

Zu den additiven Ungeleichungen unserer Klasse gehört die Ungleichung von MINKOWSKI

$$M_p(x; \alpha) + M_p(y; \alpha) \geqq M_p(x + y; \alpha) \tag{1.3}$$

mit $p \geqq 1$, $x, y > 0$. Ein weiteres Beispiel ist die Ungleichung

$$\mathfrak{M}_{g_1}(x; \alpha) + \mathfrak{M}_{g_2}(y; \alpha) \geqq \mathfrak{M}_{g_3}(x + y; \alpha) \tag{1.4}$$

mit $g_1, g_2, g_3 > 1$ und $1/\log g_1 + 1/\log g_2 \leqq 1/\log g_3$ (x, y beliebig). Die $\mathfrak{M}_{g_i}$ sind Exponentialmittelwerte; sie sind durch $\varphi(x) = g_1{}^x$, $\psi(y) = g_2{}^y$, $\chi(z) = g_3{}^z$ gekennzeichnet.

Neben der Ungleichung (I) betrachten wir auch ihre Umkehrung

$$f\big(M_\varphi(x; \alpha),\ M_\psi(y; \alpha)\big) \leqq M_\chi\big(f(x, y); \alpha\big). \tag{I'}$$

Beispiele zu (I') stellen z.B. die Ungleichungen (1.3) im Fall $1 \underset{(=)}{<} p < 1$ und (1.4) im Falle $0 < g_i < 1$ dar.

Die Ungleichungen von CAUCHY, HÖLDER und MINKOWSKI werden üblicherweise nach unterschiedlichen Methoden bewiesen. Während man beim Beweis der HÖLDERschen Ungleichung meist auf die Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel [**2**, S. 21 ff.] zurückgeht (auch die Anwendung der YOUNGschen Ungleichung [**1**, S. 15] führt auf diesen Zusammenhang), wird die MINKOWSKIsche Ungleichung in der Regel mit Hilfe der HÖLDERschen bewiesen. Beweise, die ohne die HÖLDERsche Ungleichung auskommen, sind selten. So geben DAYKIN—ELIEZER [**8**; **11**; **12**] (vgl. auch CALLEBAUT [**6**]) für jede der bekannten Ungleichungen eine monotone Funktion $f(x)$ an, die an der Stelle $x = 0$ gleich der linken Seite, an der Stelle $x = 1$ gleich der rechten Seite der Ungleichung wird. A. DINGHAS [**10**, S. 322 f.] stellt mit Hilfe von vergleichbaren Mittelwerten, die auf der Theorie der konkaven Funktionen von einer Veränderlichen beruht, allgemeine Ungleichungen auf, aus denen sich durch Spezialisierung die HÖLDERsche bzw. die MINKOWSKIsche Ungleichung gewinnen lassen.

Um Ungleichung (I) bzw. (I') mit Hilfe der Theorie der konkaven bzw. konvexen Funktionen von zwei Veränderlichen untersuchen zu können, wird in Abschnitt 2 der Begriff der *äquivalenten Ungleichung* eingeführt. So gibt es i. a. zu einer additiven Ungleichung eine äquivalente multiplikative Ungleichung u. u.. Beispielsweise sind die HÖLDERsche Ungleichung (1.2) und die Ungleichung (1.4) äquivalente Ungleichungen. Unter den äquivalenten Ungleichungen ist die konkave bzw. konvexe „Hauptform" von besonderer Bedeutung für den Beweis der Ungleichung. Schon bei HARDY—LITTLEWOOD—PÓLYA [2, S. 81 f.] wird diese Methode bei der Frage nach Verallgemeinerungen der HÖLDERschen Ungleichung benutzt. Die Frage, wann das Gleichheitszeichen gilt, wird dabei allerdings nicht angeschnitten. Sie ist bei der HÖLDERschen Ungleichung insofern interessant, weil hier die zugehörige quadratische Form (siehe Abschnitt 3) nur noch semidefinit ist, so daß die üblichen Kriterien einer Ergänzung bedürfen. Die weitere Untersuchung der einer konkaven Funktion zugehörigen quadratischen Form führt bei den additive und multiplikativen Ungleichungen (Abschnitte 4 und 5) auf notwendige und hinreichende Definitheitsbedingungen. Bei diesen werden gewisse aus den ersten und zweiten Ableitungen der Abbildungsfunktionen $\varphi(x)$, $\psi(y)$, $\chi(z)$ gebildete Funktionen F_i bzw. $D_i (i=1, 2, 3)$ miteinander in Beziehung gezetzt. Diese Funktionen sind gerade bei den klassischen Ungleichungen besonders einfach. Mit Hilfe dieser Funktionen ist es möglich, weitere Ungleichungen der Form (I) bzw. (I′) aufzustellen. Beispielsweise kann die MINKOWSKIsche Ungleichung auf Ungleichungen zwischen verschiedenen Potenzmittelwerten $M_{p_i}(x;\, a)$ erweitert werden.

2. Äquivalente Ungleichungen

Man kann Ungleichung (I) so transformieren, daß sich wieder eine Ungleichung derselben Form ergibt. Wir behandeln zwei dieser Möglichkeiten und kombinieren beide in Abschnitt 3 so, daß wir zu einer konkaven bzw. konvexen Form der Ungleichung gelangen.

a) *Änderung der Verknüpfungsfunktion.* Die Funktion $\sigma: J_z \to J_u$ sei eigentlich monoton zunehmend in J_z und besitze dort stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung[1]. Setzt man

$$\sigma\big(f(x, y)\big) := g(x, y) \quad \text{und} \quad \tau(u) := \chi\big(\sigma^{-1}(u)\big), \tag{2.1}$$

wobei σ^{-1} die zu σ inverse Funktion ist, so kann man Ungleichung (I) umformen zu

$$g\big(M_\varphi(x;\, a),\ M_\psi(y;\, a)\big) \geqq M_\tau\big(g(x, y);\, a\big). \tag{II.1}$$

Dies ist eine Ungleichung derselben Form. Ist σ monoton abnehmend, dann kehrt sich die Ungleichung um.

Ein wichtiger Sonderfall ist der Fall $\sigma \equiv \chi$, wobei χ jetzt als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. In diesem Sonderfall erscheint auf der rechten Seite der arithmetische Mittelwert $M_1(u;\, a)$; die spezielle Verknüpfungsfunktion bezeichnen wir mit

$$\chi\big(f(x, y)\big) := g_0(x, y). \tag{2.2}$$

Man erhält

$$g_0\big(M_\varphi(x;\, y),\ M_\psi(y;\, a)\big) \geqq M_1\big(g_0(x, y);\, a\big). \tag{II.2}$$

Natürlich kann man aus der Ungleichung (II.1) oder (II.2) umgekehrt wieder eindeutig (I) erhalten.

---

1) Die Existenz und Stetigkeit dieser Ableitungen wird lediglich im Hinblick auf die späteren Abschnitte gefordert.

b) *Änderung der Punktmengen.* Die Funktionen

$$\lambda^{-1}: J_x \to J_s \quad \text{und} \quad \mu^{-1}: J_y \to J_t$$

seien eigentlich monoton zunehmend mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung[1]. Wir setzen

$$s_k := \lambda^{-1}(x_k), \quad t_k := \mu^{-1}(y_k), \tag{2.3}$$

dann ist

$$x_k = \lambda(s_k), \quad y_k = \mu(t_k). \tag{2.4}$$

Ferner sei

$$f_{\lambda\mu}(s, t) := f(\lambda(s), \mu(t)); \quad \varphi_\lambda(s) := \varphi(\lambda(s)); \quad \psi_\mu(t) := \psi(\mu(t)). \tag{2.5}$$

$f_{\lambda\mu}(s, t)$ ist eine im Rechteck $J_s \times J_t$ definierte Verknüpfungsfunktion. Aus Ungleichung (I) wird nun

$$f_{\lambda\mu}(M_{\varphi_\lambda}(s; \alpha), M_{\psi_\mu}(t; \alpha)) \geqq M_\chi(f_{\lambda\mu}(s, t); \alpha), \tag{II.3}$$

und dies ist wieder eiene Ungleichung derselben Form.
Natürlich kann man umgekehrt wieder aus (II.3) eindeutig (I) erhalten.

Ein wichtiger Sonderfall ist der Fall $\lambda^{-1} \equiv \varphi$, $\mu^{-1} \equiv \psi$, es wird hier $\varphi_\lambda(s) \equiv s$, $\psi_\mu(t) \equiv t$ und man erhält

$$f_{\Phi\Psi}(M_1(s, \alpha), M_1(t; \alpha)) \geqq M_\chi(f_{\Phi\Psi}(s, t); \alpha). \tag{II.4}$$

Bezeichnung. *All Ungleichungen, die durch ein- oder mehrfache Anwendung der Transformationen 2a) und 2b) aus* (I) *entstehen, heißen äquivalente Ungleichungen.*

Beispiele. Die Verknüpfungsfunktion sei $f(x, y) \equiv xy$ mit $x > 0$, $y > 0$. Wir setzen

$$s = \log x, \quad t = \log y \quad \text{d.h.} \quad x = e^s, \; y = e^t,$$

dann geht (I) über in

$$M_{\varphi_\lambda}(s; \alpha) + M_{\psi_\mu}(t; \alpha) \geqq M_{\chi_\nu}(s + t; \alpha)$$

mit $\varphi_\lambda(s) = \varphi(e^s)$, $\psi_\mu(t) = \psi(e^t)$ und $\chi_\nu(u) = \chi(e^u)$.
Aus einer multiplikativen Ungleichung ist eine additive Ungleichung geworden. Man kann das Verfahren auch umkehren.

Aus der Hölderschen Ungleichung (1.2) wird die äquivalente additive Ungleichung (1.4) mit den Abkürzungen

$$g_1 = e^p, \; g_2 = e^q, \; g_3 = e^r, \; \varphi_\lambda(s) = e^{ps} = g_1^s, \; \psi_\mu(t) = g_2^t, \; \chi_\nu(u) = g_3^u.$$

Die Bedingung $1/p + 1/q \leqq 1/r$ $(p, q, r > 0)$ geht über in $1/\log g_1 + 1/\log g_2 \leqq \leqq 1/\log g_3$ $(g_1, g_2, g_3 > 1)$. Da Gleichheit bei der Hölderschen Ungleichung nur dann gilt, wenn die x_k^p zu den y_k^q $(k = 1, \ldots, n)$ proportional sind, so gilt bei der äquivalenten Ungleichung, daß die $g_1^{s_k}$ im Falle der Gleichheit zu den $g_2^{t_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ proportional sind.

[1] Die Existenz und Stetigkeit dieser Ableitungen wird lediglich im Hinblick auf die späteren Abschnitte gefordert.

Die zu der MINKOWSKIschen Ungleichung äquivalente multiplikative Ungleichung lautet

$$(2.6)\qquad \exp\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(\log s_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \exp\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(\log t_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \geqq \exp\left[\sum_{k=1}^{n} a_k(\log s_k t_k)^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Anmerkungen. 1. Die Verknüpfungsfunktion $f(x, y) \equiv x - y$ kann auf die Verknüpfungsfunktion $x+y$ zurückgeführt werden. Man setzt in

$$M_\varphi(x; a) - M_\psi(y; a) \geqq M_\chi(x-y; a) \qquad (x \in J_x,\ x \in J_y,\ x-y \in J_z)$$

$z = x - y$, dann erhält man wegen $x = y + z$

$$M_\psi(y; a) + M_\chi(z; a) \leqq M_\varphi(y+z; a) \qquad y \in J_y,\ z \in J_z,\ y+z \in J_x).$$

2. Schließlich läßt sich die Verknüpfungsfunktion $f(x, y) \equiv x/y$ auf die Verknüpfungsfunktion xy zurückführen. Aus

$$M_\varphi(x; a)/M_\psi(y; a) \geqq M_\chi(x/y; a) \qquad (x, y > 0)$$

wird mit $z = x/y$ die Ungleichung

$$M_\psi(y; a) \cdot M_\chi(z; a) \leqq M_\varphi(yz; a) \qquad (y, z > 0).$$

In beiden Fällen hat sich das Ungleichheitszeichen umgekehrt.

3. Die konkave (konvexe) Hauptform der Ungleichung

Wir führen zunächst die Transformation 2a) mit $\sigma \equiv \chi$ und anschließend die Transformation 2b) mit $\lambda^{-1} \equiv \varphi$, $\mu^{-1} \equiv \psi$ aus; dann erhalten wir mit der Abkürzung

$$(3.1)\qquad H(s, t) := \chi\big(f(\Phi(s);\ \Psi(t))\big)$$

die Ungleichung

$$H\big(M_1(s; a),\ M_1(t; a)\big) \geqq M_1\big(H(s, t); a\big)$$

d.h.

$$(\mathrm{III})\qquad H\left(\sum_{k=1}^{n} a_k s_k,\ \sum_{k=1}^{n} a_k t_k\right) \geqq \sum_{k=1}^{n} a_k\, H(s_k, t_k).$$

(III) drückt aus, daß $H(s, t)$ eine im Rechteck $J_\varphi \times J_\psi$ konkave Funktion ist. *Wir nennen deshalb* (III) *die konkave Hauptform der Ungleichung* (I). *Entsprechend entsteht aus* (I') *die konvexe Hauptform*

$$(\mathrm{III}')\qquad H\left(\sum_{k=1}^{n} a_k s_k,\ \sum_{k=1}^{n} a_k t_k\right) \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k\, H(s_k, t_k).$$

dieser Ungleichung. $H(s, t)$ nennen wir die Hauptverknüpfungsfunktion.

Da die Ungleichungen (I) und (III) äquivalent sind, kann (III) wieder eindeutig in (I) zurücktransformiert werden. Daher gilt

Satz 3.1. *Notwendig und hinreichend für das Bestehen der Ungleichung* (I) *ist, daß die durch* (3.1) *definierte Hauptverknüpfungsfunktion $H(s, t)$ in $J_\varphi \times J_\psi$ konkav ist.*

Der Nachweis, daß $H(s, t)$ eine konkave Funktion ist, kann wegen der Existenz der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung mit Hilfe der quadratischen Form

$$(3.2) \qquad Q(s, t; h, k) := H_{ss}(s, t)h^2 + 2H_{st}(s, t)hk + H_{tt}(s, t)k^2$$

geführt werden (vgl. [2], S.80). Es sei

$$s_0 := \sum_{i=1}^{n} a_i s_i, \quad t_0 := \sum_{i=1}^{n} a_i t_i, \quad s_i := s_0 + h_i, \quad t_i := t_0 + k_i,$$

dann ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i h_i = \sum_{i=1}^{n} a_i k_i = 0,$$

und es folgt aus

$$(3.3) \qquad H(s_i, t_i) = H(s_0, t_0) + h_i H_s(s_0, t_0) + k_i H_t(s_0, t_0) + \frac{1}{2!} Q(s_0 + \vartheta_i h_i, t_0 + \vartheta_i k_i; h_i, k_i) \quad (0 < \vartheta_i < 1)$$

im Hinblick auf (III)

$$(3.4) \qquad 0 \geqq \sum_{i=1}^{n} a_i H(s_i, t_i) - H(s_0, t_0) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} a_i Q(s_0 + \vartheta_i h_i, t_0 + \vartheta_i k_i; h_i, k_i) \quad (0 < \vartheta_i < 1).$$

Da die $(s_i, t_i) \in J_\varphi \times J_\psi$ beliebig wählbar sein sollen ebenso wie die Gewichtszahlen a_i, so schließt man aus (3.4), daß *die Hauptverknüpfungsfunktion $H(s, t)$ in $J_\varphi \times J_\psi$ genau dann konkav ist, wenn die quadratische Form $Q(s, t; h, k)$ für alle $(s, t) \in J_\varphi \times J_\psi$ und alle h, k negativ-definit ist.* Ist $Q(s, t; h, k)$ eigentlich definit, gilt also $Q = 0$ nur für $h = k = 0$, dann schließt man aus (3.4) weiter, daß in der Hauptform (III) das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn alle $h_i = k_i = 0$ sind, d.h., wenn alle $(s_i, t_i) = (s_0, t_0)$ sind. Ist dagegen die quadratische Form nur semidefinit, d.h. gibt es bei bestimmten Werten $(\bar{s}, \bar{t})$ Richtungen $\bar{h}/\bar{k}$, für welche $Q(\bar{s}, \bar{t}; \bar{h}, \bar{k}) = 0$ ist, dann ist damit zu rechnen, daß das Gleichheitszeichen in (III) für bestimmte Kombinationen $(\bar{s}_1, \ldots, \bar{s}_n)$, $(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$ eintritt, bei denen nicht alle $\bar{s}_i$ oder $\bar{t}_i$ einander gleich sind. Wegen $s_0 + \vartheta_i h_i = \bar{s}$ ist $\vartheta_i h_i = \bar{s} - s_0$ für alle i. Der Fall, daß es nur ein einziges Wertepaar $(\bar{s}, \bar{t})$ gibt, scheidet offensichtlich aus, da sonst $\vartheta_i h_i$ für $i = 1, \ldots, n$, konstant wäre, was wegen der Vorzeichen von h_i nur für $h_i = 0$ möglich ist.

Die quadratische Form $Q(s, t; h, k)$ ist genau dann negativ-definit, wenn die drei folgenden Definitheitsbedingungen erfüllt sind:

$$(D.1, 2, 3) \qquad H_{ss}(s, t) \leqq 0, \quad H_{tt}(s, t) \leqq 0, \quad H_{ss}(s, t) H_{tt}(s, t) - H_{st}^2(s, t) \geqq 0.$$

$Q(s, t; h, k)$ ist genau dann positiv-definit, wenn

$$(D'.1, 2, 3) \qquad H_{ss}(s, t) \geqq 0, \quad H_{tt}(s, t) \geqq 0, \quad H_{ss}(s, t) H_{tt}(s, t) - H_{st}^2(s, t) \geqq 0$$

ist. Für die eigentliche Definitheit darf in $(D.3)$ bzw. $(D'.3)$ das Gleichheitszeichen, nicht stehen, und daraus ergibt sich, daß dann auch in $(D.1)$ und $(D.2)$ die Gleichheitszeichen fehlen.

Beispiele. 1) Bei Hardy—Littlewood—Pólya [2, S. 81 f.] wird die multiplikative Ungleichung $M_\varphi(x;\alpha)M_\psi(y;\alpha)\geqq M_1(xy;\alpha)$ auf die konkave Hauptform gebracht. In diesem Fall ist $H(s,t)=\Phi(s)\Psi(t)$. Ein Sonderfall ist die Höldersche Ungleichung; hier ist die Hauptform $H(s,t)=s^{\frac{1}{p}}t^{\frac{1}{q}}$, die für $p>1$, $q>1$, $(p-1)(q-1)\geqq 1$ konkav und für $p<1$, $q<1$, $(1-p)(1-q)\geqq 1$ konvex ist.

Wir wollen hier die Höldersche Ungleichung in der Fassung (1.2) behandeln. Die Hauptform ist $H(s,t)=s^{\frac{r}{p}}t^{\frac{r}{q}}$. Die Bedingungen für Konkavität lauten

$$H_{ss}(s,t)=\frac{r}{p}\left(\frac{r}{p}-1\right)s^{\frac{r}{p}-2}t^{\frac{r}{q}}\leqq 0,\qquad H_{tt}(s,t)=\frac{r}{q}\left(\frac{r}{q}-1\right)s^{\frac{r}{p}}t^{\frac{r}{q}-2}\leqq 0,$$

$$H_{ss}(s,t)H_{tt}(s,t)-H_{st}^2(s,t)=s^{2\left(\frac{r}{p}-1\right)}t^{2\left(\frac{r}{q}-1\right)}\frac{r^2}{pq}\left(1-\frac{r}{p}-\frac{r}{q}\right)\geqq 0.$$

Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit

$$\frac{r}{p}\geqq 0,\quad \frac{r}{q}\geqq 0 \quad\text{und}\quad \frac{r}{p}+\frac{r}{q}\leqq 1.$$

Die quadratische Form läßt sich übrigens mit der Abkürzung $\varepsilon:=1-\frac{r}{p}-\frac{r}{q}$ in der Form schreiben

$$Q(s,t;h,k)=-H(s,t)\frac{r^2}{pq}\left(\frac{h}{s}-\frac{k}{t}\right)^2-\varepsilon H(s,t)\left(\frac{r}{p}\cdot\frac{h^2}{s^2}+\frac{r}{q}\cdot\frac{k^2}{t^2}\right).$$

Gilt $\frac{r}{p}>0$, $\frac{r}{q}>0$, dann sieht man aus dieser Darstellung unmittelbar, daß für $\varepsilon>0$ die quadratische Form stets negativ-definit im eigentlichen Sinne ist. In der Hölderschen Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen also im Falle $\frac{r}{p}+\frac{r}{q}<1$ nur dann, wenn alle (s_i, t_i), also auch alle (x_i, y_i) einander gleich sind. Ist dagegen $\varepsilon=0$, dann wird die quadratische Form semidefinit und verschwindet genau dann, wenn $h_it_i-k_is_i=0$ $(i=1,\dots,n)$ wird. Wegen $h_i=s_i-s_0$, $k_i=t_i-t_0$ ist dies gleichbedeutend mit $\frac{s_i}{t_i}=\frac{s_0}{t_0}=\text{const.}$, d.h. Gleichheit besteht im Falle $\frac{r}{p}+\frac{r}{q}=1$ genau dann, wenn alle x_i^p proportional den y_i^q $(i=1,\dots,n)$ sind.

2) Bei der Minkowskischen Ungleichung ist $f(x,y)\equiv x+y$; alle drei Abbildungsfunktionen sind einander gleich und durch $\varphi(x)=x^p\,(x\geqq 0)$ gekennzeichnet. Die Hauptverknüpfungsfunktion ist

$$H(s,t)=\left(s^{\frac{1}{p}}+t^{\frac{1}{p}}\right)^p.$$

Die Definitheitsbedingungen (*D.* 1, 2, 3) lauten hier

$$H_{ss}(s,t)=-\left(1-\frac{1}{p}\right)s^{\frac{1}{p}-2}\,t^{\frac{1}{p}}\left(s^{\frac{1}{p}}+t^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2}\leqq 0;$$

$$H_{tt}(s,t)=-\left(1-\frac{1}{p}\right)s^{\frac{1}{p}}\,t^{\frac{1}{p}-2}\left(s^{\frac{1}{p}}+t^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2}\leqq 0;$$

$$H_{ss}(s,t)\,H_{tt}(s,t)-H_{st}^2(s,t)\equiv 0,$$

und es folgt, daß $H(s,t)$ bei positivem p für $p>1$ konkav und für $p<1$ konvex ist. Die quadratische Form

$$Q(s,t;h,k)=-\left(1-\frac{1}{p}\right)s^{\frac{1}{p}-2}\,t^{\frac{1}{p}-2}\left(s^{\frac{1}{p}}+t^{\frac{1}{p}}\right)^{p-2}(th-sk)^2$$

ist wieder semidefinit. Gleichheit gilt wie bei der HÖLDERschen Ungleichung nur für $\frac{s_i}{t_i}=\text{const.}$ $(i=1,\ldots,n)$, d.h. hier, wenn alle x_i proportional den y_i sind.

3) Eine ähnliche Überlegung läßt sich für die additive Ungleichung (1.4), die der HÖLDERschen Ungleichung äquivalent ist, anstellen. Die Hauptverknüpfungsfunktion ist

$$H(s,t)=\exp\left(\frac{\log g_3}{\log g_1}\log s+\frac{\log g_3}{\log g_2}\log t\right).$$

Setzt man z. Abk.

$$\varepsilon:=1-\frac{\log g_3}{\log g_1}-\frac{\log g_3}{\log g_2},$$

dann besteht für die zugehörige quadratische Form die Darstellung

$$Q(s,t;h,k)=-H(s,t)\frac{(\log g_3)^2}{\log g_1\log g_2}\left(\frac{h}{s}-\frac{k}{t}\right)^2-\varepsilon H(s,t)\left(\frac{h^2}{s^2}\frac{\log g_3}{\log g_1}+\frac{k^2}{t^2}\frac{\log g_3}{\log g_2}\right),$$

und hieraus ergeben sich dieselben Schlußfolgerungen wie bei der HÖLDERschen Ungleichung.

4. Additive Ungleichungen

Zu den Ungleichungen der Form

(IV) $$M_\varphi(x;\alpha)+M_\psi(y;\alpha)\geqq M_\chi(x+y;\alpha)$$

gehört die Hauptverknüpfungsfunktion

(4.1) $$H(s,t)=\chi\big(\Phi(s)+\Psi(t)\big).$$

Die quadratische Form ist in naheliegender, vereinfachter Schreibweise

(4.2) $$Q(s,t;h,k)=\chi''(h\Phi'+k\Psi')^2+\chi'(h^2\Phi''+k^2\Psi'').$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich sofort die folgende hinreichende Bedingung dafür, daß Q negativ-definit ist:

(4.3) $$\Phi''\leqq 0,\qquad \Psi''\leqq 0 \text{ und } \chi''\leqq 0,$$

in ihren Definitionsintervallen. Ein triviales Beispiel dafür ergibt sich für $\chi(z)\equiv z$. Aus $\Phi''<0$, $\Psi''<0$ folgt nämlich

$$M_\varphi(x;\alpha)\geqq M_1(x;\alpha) \text{ und } M_\psi(y;\alpha)\geqq M_1(y;\alpha).$$

Daher ist sicher

$$M_\varphi(x;\alpha)+M_\psi(y;\alpha)\geqq M_1(x+y;\alpha).$$

Um weniger triviale Beispiele zu erhalten, gehen wir von den Definitheitsbedingungen (*D.* 1, 2, 3) aus. Sie lauten hier

(4.4) $$\chi''\Phi'^2+\chi'\Phi''\leqq 0;\quad \chi''\Psi'^2+\chi'\Psi''\leqq 0;$$

$$\chi\chi'(\Phi'^2\Psi''+\Psi'^2\Phi'')+\chi'^2\Phi''\Psi''\geqq 0.$$

Wenn wir nun die Ableitungen Φ', Φ'', Ψ', Ψ'' durch die Ableitungen φ', φ'', ψ', ψ'' ausdrücken, dann erhalten wir die drei Bedingungen

$$(4.5)\qquad \begin{gathered} \frac{\chi''(x+y)}{\chi'(x+y)} \leqq \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}; \quad \frac{\chi''(x+y)}{\chi'(x+y)} \leqq \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}; \\ -\frac{\chi''(x+y)}{\chi'(x+y)} \left\{\frac{\varphi''(x)}{\psi'(x)} + \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)}\right\} + \frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)} \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} \geqq 0. \end{gathered}$$

Es ist zweckmäßig, folgende Funktionen einzuführen:

$$(4.6)\qquad F_1(x) := \frac{\varphi'(x)}{\varphi''(x)}, \quad F_2(y) := \frac{\psi'(y)}{\psi''(y)}, \quad F_3(z) := \frac{\chi'(z)}{\chi''(z)}$$

(vorausgesetzt, daß diese Funktionen existieren). Die Fälle, in denen eine der drei Nennerfunktionen identisch verschwindet, lassen sich leicht vorwegnehmen. Der wichtigste Fall ist $\chi''(z) \equiv 0$, d.h. $\chi(z) \equiv z$; in diesem Fall lauten die Bedingungen einfach

$$\varphi''(x) \geqq 0, \quad \psi''(y) \geqq 0, \quad \text{oder} \quad \Phi''(s) \leqq 0, \quad \Psi''(t) \leqq 0,$$

und dies ist gerade der oben erwähnte triviale Fall. Die übrigen Fälle $\varphi'' = 0$ und $\psi'' = 0$ lassen sich ähnlich einfach diskutieren. Die Definitheitsbedingungungen lauten jetzt

$$(F.\, \alpha, \beta, \gamma)\qquad \begin{gathered} \alpha)\ \frac{1}{F_3(x+y)} \leqq \frac{1}{F_1(x)}; \quad \beta)\ \frac{1}{F_3(x+y)} \leqq \frac{1}{F_2(y)}; \\ \gamma)\ \frac{1}{F_3(x+y)} \left(\frac{1}{F_1(x)} + \frac{1}{F_2(y)}\right) \leqq \frac{1}{F_1(x)\, F_2(y)}. \end{gathered}$$

Von den acht Möglichkeiten über die Vorzeichenverteilung der Funktionen $F_1(x)$, $F_2(y)$, $F_3(z)$ sind folgende vier sinnvoll:

1) $F_1 \geqq 0$; $F_2 \geqq 0$; $F_3 \geqq 0$: $\alpha)$ $F_3 \geqq F_1$; $\beta)$ $F_3 \geqq F_2$; $\gamma)$ $F_3 \geqq F_1 + F_2$.

Ist $\gamma)$ erfüllt, dann sind $\alpha)$ und $\beta)$ von selbst erfüllt.

2) $F_1 \geqq 0$; $F_2 \geqq 0$; $F_3 \leqq 0$: $\alpha)$ $F_1 \geqq F_3$; $\beta)$ $F_2 \geqq F_3$; $\gamma)$ $F_1 + F_2 \geqq F_3$.

Alle drei Bedingungen sind trivialerweise erfüllt.

3) $F_1 \geqq 0$; $F_2 \leqq 0$; $F_3 \leqq 0$: $\alpha)$ $F_1 \geqq F_3$; $\beta)$ $F_2 \leqq F_3$; $\gamma)$ $F_1 + F_2 \leqq F_3$.

$\alpha)$ ist trivialerweise erfüllt.

4) $F_1 \leqq 0$; $F_2 \geqq 0$; $F_3 \leqq 0$: $\alpha)$ $F_1 \leqq F_3$; $\beta)$ $F_2 \geqq F_3$; $\gamma)$ $F_1 + F_2 \leqq F_3$.

$\beta)$ ist trivialerweise erfüllt.

Die Fälle 3) und 4) gehen durch Vertauschung von F_1 in F_2 ineinander über. Im Fall 2) ist $\Phi'' \leqq 0$, $\Psi'' \leqq 0$ und $\chi'' \leqq 0$; wir haben es also mit dem in (4.3) angegebenen Fall zu tun. Der wichtigste Fall ist der erste; wir formulieren ihn als

Satz 4.1. *Unter der Voraussetzung, daß die Ableitungen φ', ψ', χ' and φ'', ψ'', χ'' alle positiv sind, ist die quadratische Form $Q(s, t; h, k)$ genau dann negativ--definit, wenn die Ungleichung besteht*

$$(4.7)\qquad F_3(x+y) \geqq F_1(x) + F_2(y).$$

Anmerkung. Für positiv-definite Formen hat man ebenfalls vier sinnvolle Möglichkeiten. Man erhält sie aus den Fällen 1) bis 4), wenn man dort alle Funktionen $F_i (i=1,2,3)$ durch $-F_i$ ersetzt.

Insbesondere gilt der

Zusatz zu Satz 4.1. *Unter der Voraussetzung, daß die ersten Ableitungen φ', ψ', χ' positiv, die zweiten Ableitungen φ'', ψ'', χ'' negativ sind, ist die quadratische Form $Q(s,t;h,k)$ genau dann positiv-definit, wenn die Ungleichung besteht*

$$F_3(x+y) \leqq F_1(x) + F_2(y). \tag{4.8}$$

Die Funktion F_1 hat, da wir stets $\varphi' \geqq 0$ annehmen, nach Definition dasselbe Vorzeichen wie φ'', und analog verhält es sich mit den beiden andern Funktionen F_2 und F_3 bezüglich ψ'' und χ''. Ist $F_1(x)$ bekannt, so erhält man aus der Definitionsgleichung die zugehörige Funktion $\varphi(x)$ durch Integrationen.

$$\varphi(x) = c_1 \int_{a_1}^{x} \exp\left(\int_{a_1}^{u} \frac{dt}{F_1(t)}\right) du \qquad \text{mit } c_1 > 0 \text{ und } x \geqq a_1. \tag{4.9}$$

Ebenso erhält man

$$\psi(y) = c_2 \int_{a_2}^{y} \exp\left(\int_{a_2}^{u} \frac{dt}{F_2(t)}\right) du \quad \text{und} \quad \chi(z) = c_3 \int_{a_3}^{z} \exp\left(\int_{a_3}^{u} \frac{dt}{F_3(t)}\right) du.$$

Beispiele. 1) *Alle drei Funktionen sind einander gleich.* Es kommt nur der Fall 1) in Frage; nach Satz 4.1 ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Negativ-Definitheit der quadratischen Form das Bestehen der Ungleichung

$$F(x+y) \geqq F(x) + F(y) \tag{4.10}$$

$F(x)$ ist demnach eine positive, superadditive Funktion. Hinreichend für die Superadditivität ist die Bedingung (vgl. [2] S. 83), daß die Funktion $F(x)/x$ monoton zunimmt (nicht abnimmt).

Einfachster Fall ist $F(x) = cx$ ($c>0$ für $x>0$); nach (4.9) erhalten wir $\varphi(x) = x^{1+\frac{1}{c}}$, und dies führt mit $c = 1/(p-1)$ ($p>1$) auf die Ungleichung von Minkowski. (Für $0<p<1$, d.h. $c<0$ dreht sich die Ungleichung um.) Weitere mögliche Funktionen sind offenbar die Potenzen $F(x) = x^{1+\alpha}$ mit $\alpha \geqq 0$. Die zugehörigen Abbildungsfunktionen $\varphi(x)$ sind für $\alpha>0$ allerdings wenig instruktiv. Möglich ist offenbar auch die Funktion $F(x) = x \log x$; die zugehörige Abbildungsfunktion ist $\varphi(x) = x(\log x - 1)$ mit positiver erster und zweiter Ableitung für $x>1$.

Auch für $F(x) = \tan x$ ist $(F(x)/x)' > 0$ für $x>0$; man erhält $\varphi(x) = -\cos x$, so daß $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ für $0<x<\frac{\pi}{2}$ positiv ausfallen. Beschränkt man sich auf $J_x: 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$; $J_y: 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{4}$, $Y_z: 0 \leqq z \leqq \frac{\pi}{2}$, dann besteht die Ungleichung

$$\operatorname{Arccos}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cos x_k\right) + \operatorname{Arccos}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cos y_k\right) \geqq \operatorname{Arccos}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cos (x_k + y_k)\right). \tag{4.11}$$

2) *Alle drei Funktionen sind Konstante.*

$$F_i(x) = c_i > 0 \quad (i=1,2,3) \quad \text{mit} \quad c_3 \geqq c_1 + c_2.$$

Nach (4.9) ist

$$\varphi(x) = g_1^{\,x}; \quad \psi(y) = g_2^{\,y}; \quad \chi(z) = g_3^{\,z} \quad \text{mit } g_i = \exp(1/c_i) > 1.$$

Man erhält die zur HÖLDERschen äquivalente Ungleichung (1.4) über die Exponentialmittelwerte mit der in (1.4) angegebenen Bedingung

$$\frac{1}{\log g_3} \geqq \frac{1}{\log g_1} + \frac{1}{\log g_2}.$$

Wählt man alle $c_i < 0$ mit $c_3 \leqq c_1 + c_2$, dann werden die $g_i < 1$, und es dreht sich die Ungleichung (1.4) um.

3) *Es sei* $F_i(x) = c_i x$ *und* $c_3(x+y) \geqq c_1 x + c_2 y$. Diese Ungleichung schreiben wir in der Form

(4.12) $$(c_3 - c_1)x + (c_3 - c_2)y \geqq 0.$$

Zu $F_i(x)$ gehört $\varphi_i(x) = x^{p_i}$ mit $p_i = 1 + 1/c_i$. Alle c_i seien positiv, dann gilt $p_i > 1$, und es ist $\varphi_i'(x) > 0$, $\varphi_i''(x) > 0$.[2] Satz 4.1 läßt sich daher anwenden und führt auf eine Verallgemeinerung der MINKOWSKIschen Ungleichung

(4.13) $$M_{p_1}(x; \alpha) + M_{p_2}(y; \alpha) \geqq M_{p_3}(x+y; \alpha) \qquad (p_i > 1).$$

Für den Geltungsbereich hat man folgende Fallunterscheidungen:
α) $c_3 > c_1$, $c_3 > c_2$ d.h. $p_3 < p_1$, $p_3 < p_2$. Die Ungleichung (4.12) und damit auch auch (4.13) ist für alle $x > 0$, $y > 0$ erfüllt. Dieser Fall ist mehr oder weniger trivial, denn er läßt sich aus der MINKOWSKIschen Ungleichung folgern, wenn man berücksichtigt, daß $M_p(x; \alpha)$ mit p monoton zunimmt.

Die beiden folgenden Fälle sind dagegen nicht trivial.
β) $c_1 < c_3 < c_2$ d.h. $p_2 < p_3 < p_1$. Ungleichung (4.12) und damit auch (4.13) gilt jetzt nur noch im Winkelraum

$$0 \leqq y \leqq \left(\frac{c_3 - c_1}{c_2 - c_3} x\right) = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - 1)}{(p_3 - p_2)(p_1 - 1)} x;$$

γ) $c_2 < c_3 < c_1$, d.h. $p_1 < p_3 < p_2$. Ungleichung (4.13) gilt jetzt im Winkelraum

$$y \geqq \left(\frac{c_1 - c_3}{c_3 - c_2} x\right) = \frac{(p_3 - p_1)(p_2 - 1)}{(p_2 - p_3)(p_1 - 1)} x \geqq 0.$$

Schließlich dreht sich die Ungleichung (4.13) für $0 < p_i < 1$, d.h. $c_i < -1$ wegen $\varphi'(x) > 0$, $\varphi''(x) < 0$ um; jetzt gilt

(4.14) $$M_{p_1}(x; \alpha) + M_{p_2}(y; \alpha) \leqq M_{p_3}(x+y; \alpha) \qquad (0 < p_i < 1)$$

und zwar in folgenden Fällen:

α') $p_3 < p_1$, $p_3 < p_2$ für alle $x, y > 0$;

β') $p_2 < p_3 < p_1$ für $0 \leqq y \leqq \dfrac{(p_1 - p_3)(1 - p_2)}{(p_3 - p_2)(1 - p_1)} x$;

γ') $p_1 < p_3 < p_2$ für $y \geqq \dfrac{(p_3 - p_1)(1 - p_2)}{(p_2 - p_3)(1 - p_1)} x \geqq 0$.

In ähnlicher Weise lassen sich weitere Funktionen diskutieren.

5. Multiplikative Ungleichungen

Zu diesen Ungleichungen von der Form

(V) $$M_\varphi(x; \alpha) \cdot M_\psi(y; \alpha) \geqq M_\chi(xy; \alpha)$$

gehört die HÖLDERsche Ungleichung. Da nach Abschnitt 2b) bei positiven Werten x, y jeder multiplikativen Ungleichung eine äquivalente additive Un-

[2] $\varphi_1 \equiv \varphi$, $\varphi_2 \equiv \psi$, $\varphi_3 \equiv \chi$.

gleichung zugeordnet werden kann, wollen wir die entsprechenden Untersuchungen hier etwas kürzer fassen.

Die konkave Hauptform der Ungleichung (V) führt auf die Hauptverknüpfungsfunktion

$$H(s, t) = \chi\big(\Phi(s) \cdot \Psi(t)\big). \tag{5.1}$$

Die quadratische Form ist

$$Q(s, t; h, k) = \chi'' \cdot [h\Phi'\Psi + k\Psi'\Phi]^2 + \chi' \cdot [h^2\Phi''\Psi + 2hk\,\Phi'\Psi' + k^2\Phi\Psi'']. \tag{5.2}$$

Hinreichend dafür, daß $Q(s, t; h, k)$ negativ-definit ist, ist offensichtlich

$$\Phi'' \leqq 0; \quad \Psi'' \leqq 0; \quad \chi'' \leqq 0 \text{ und } \Phi\Phi''\Psi\Psi'' - \Phi'^2\Psi'^2 \geqq 0. \tag{5.3}$$

Um die allgemeinen Definitheitsbedingungen einfacher zu formulieren, führen wir die folgenden drei Funktionen ein:

$$D_1(x) := \frac{1}{1 + x\dfrac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}}; \quad D_2(y) := \frac{1}{1 + y\dfrac{\psi''(y)}{\psi'(y)}}; \quad D_3(z) := \frac{1}{1 + z\dfrac{\chi''(z)}{\chi'(z)}} \tag{5.4}$$

mit $x \in J_x$, $y \in J_y$, $z \in J_z$.

Dann erhalten wir die drei notwendigen und hinreichenden Bedingungen

$$(E.\ \alpha, \beta, \gamma) \qquad \alpha)\ \frac{1}{D_3(xy)} \leqq \frac{1}{D_1(x)}; \quad \beta)\ \frac{1}{D_3(xy)} \leqq \frac{1}{D_2(y)};$$

$$\gamma)\ \frac{1}{D_3(xy)}\left[\frac{1}{D_1(x)} + \frac{1}{D_2(y)}\right] \leqq \frac{1}{D_1(x)\,D_2(y)}.$$

Bei der Diskussion der möglichen Vorzeichenkombinationen der drei Funktionen D_i ergeben sich dieselben vier Vorzeichenfälle wie in Abschnitt 4. Man hat dort nur F durch D zu ersetzen. Der wichtigste Fall ist auch hier der Fall positiver D_i. Wir erhalten

Satz 5.1. *Unter der Voraussetzung, daß die Ableitungen φ', ψ', χ' und die in* (5.4) *definierten Funktionen $D_i (i = 1, 2, 3)$ positiv sind, ist die quadratische Form $Q(s, t; h, k)$ genau dann negativ-definit, wenn die Bedingung*

$$D_3(x, y) \geqq D_1(x) + D_2(y) \tag{5.5}$$

erfüllt ist.

Analog gilt der

Zusatz zu Satz 5.1. *Unter den Voraussetzungen, daß die Ableitungen φ', ψ', χ' positiv und die in* (5.4) *definierten Funktionen $D_i (i = 1, 2, 3)$ negativ sind, ist die quadratische Form $Q(s, t; h, k)$ genau dann positiv-definit, wenn die Bedingung*

$$D_3(xy) \leqq D_1(x) + D_2(y) \tag{5.6}$$

erfüllt ist.

Zwischen $\varphi(x)$ und $D_1(x)$ besteht der Zusammenhang

$$\varphi(x) = C \int_{a_1}^{x} \exp\left(\int_{a_1}^{u} \frac{dt}{t\,D_1(t)}\right)\frac{du}{u}. \tag{5.7}$$

Entsprechende Formeln gelten für $\psi(y)$ und $\chi(z)$.

Sind die Variablen x und y beide positiv, so läßt sich die Beziehung (5.5) mit der Transformation

$$x = e^u, \quad y = e^v, \quad D_i(e^u) := E_i(u), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5.8}$$

auf die Ungleichung

$$E_3(u+v) \geqq E_1(u) + E_2(v) \tag{5.9}$$

also auf die Ungleichung (4.7) zurückführen.

Beispiele. 1) *Sind alle drei Funktionen D_i konstant,*

$$D_i = c_i > 0 \text{ mit } c_3 \geqq c_1 + c_2,$$

so erhält man mit $p = 1/c_1$, $q = 1/c_2$, $r = 1/c_3$ die Abbildungsfunktionen $\varphi(x) = x^p$, $\psi(y) = y^q$, $\chi(z) = z^r$. Dies bedeutet die Hölderсche Ungleichung mit $\frac{1}{r} \geqq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Man kann die Hölderсche Ungleichung auf Grund der Definitheitsbedingungen $(E.\, \alpha, \beta, \gamma($ diskutieren und erhält dann das folgende *Ergebnis*: Die Ungleichung

$$M_p(x; \alpha) \cdot M_q(y; \alpha) \geqq M_r(xy; \alpha) \qquad (x_i > 0,\ y_i > 0)$$

gilt im Fall

α) $p>0$, $q>0$, $r>0$, wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqq \frac{1}{r}$ ist;

β) $p>0$, $q>0$, $r<0$ ohne jede Bedingung (trivialer Fall);

γ) $r \leqq q < 0 < p$ und δ) $r \leqq p < 0 < q$, wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqq \frac{1}{r}$ ist.

Es gilt die umgekehrte Ungleichung im Fall

α') $p<0$, $q<0$, $r<0$, wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqq \frac{1}{r}$ ist;

β') $p<0$, $q<0$, $r>0$, ohne jede Bedingung (trivialer Fall);

γ') $q < 0 < p \leqq r$ und δ') $p < 0 < q \leqq r$, wenn $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geqq \frac{1}{r}$ ist.

2) *Sind alle drei Funktionen D_i einander gleich,* dann ist die zugehörige Funktion $E(u)$ wegen

$$E(u+v) \geqq E(u) + E(v) \tag{5.10}$$

superadditiv. Einfachster Fall ist $E(u) = cu$ ($c>0$ für $u>0$) d.h. $D(x) = c \log x$ ($x>1$). Nach (5.7) ist dann $\varphi(x) = (\log x)^p$ mit $p = 1 + 1/c$, und damit erhalten wir die bereits früher angegebene Ungleichung (2.6), die der Minkowskischen Ungleichung äquivalent ist. Auch diese Ungleichung läßt analoge Erweiterungen zu wie die Minkowskische. Auf weitere Diskussionen kann jedoch verzichtet werden.

EINSCHLÄGIGE LITERATUR

1. BECKENBACH, E. F., and R. BELLMAN: *Inequalities.* 2 nd revised printing, New York, 1965.

2. HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD and G. PÓLYA: *Inequalities.* 2 nd ed. Cambridge, London and New York, 1952.

3. BECKENBACH, E. F.: *On Hölder's inequality.* J. math. Analysis Appl. **15**, 21—29 (1966).

4. BECKENBACH, E. F.: *A „workshop" on Minkowski's inequality.* Proc. Sympos. Inequalities, Wright Pattersen Air Force Base, Ohio. Aug. 19—27, 1965. Ed. by O. Shisha, New York and London (1967) p. 37—55.

5. BULLEN, P. S.: *Some inequalities for symmetric means.* Pacific J. Math. **15**, 47—54 (1965).

6. CALLEBAUT, D. K.: *Generalization of the Cauchy-Schwarz inequality.* J. Math. Anal. Appl. **12**, 491—494 (1965).

7. DARÓCZY, Z.: *Einige Ungleichungen über die mit Gewichtsfunktionen gebildeten Mittelwerte.* Mh. Math. **68**, 102—112 (1964).

8. DAYKIN, D. E. and C. J. ELIEZER: *Elementary proofs of basic inequalities.* Amer. math. Monthly **76**, 543—546 (1969).

9. DIANANDA, P. H.: *On some inequalities of H. Kober.* Proc. Camb. Phil. Soc. **59**, 341—346 (1963).

10. DINGHAS, A.: *Superadditive Funktionale, Indentitäten und Ungleichungen der elementaren Analysis.* Math. Ann. **178**, 315—334 (1968).

11. ELIEZER, C. J.: *On some convex functions and related inequalities.* Sympos. theor. Phys. Math. 8, Lectures 1957 fifth Annivers. Sympos. Inst. math. Sci. Madras, India 129—132 (1968).

12. ELIEZER, C. J. and DAYKIN, D. E.: *Generalizations and applications of Cauchy-Schwarz inequalities.* Quart. J. Math. Oxford Ser. **40**, 247—250 (1967).

13. EVERITT, W. N.: *On the Hölder inequality.* J. London Math. Soc. **36**, 145—158 (1961).

14. KOBER, H.: *On the arithmetic and geometric means and on Hölder's inequality.* Proc. Amer. math. Soc. **9**, 452—459 (1958).

15. MCLAUGHLIN, H. W. and F. T. METCALF: *An inequality for generalized means.* Pacific J. Math. **22**, 303—311 (1967).

16. MCLAUGHLIN, H. W. and F. T. METCALF: *The Minkowski and Tschebychef inequalities as functions of the index set.* Duke math. J. **35**, 865—873 (1968).

17. MITRINOVIĆ, D. S. et P. M. VASIĆ: *Une inégalité générale relative aux moyennes d'ordre arbitraire.* Publ. Fac. Elektrotechn. Univ. Belgrade, Sér. Math. Phys. **210—228**, 81—85 (1968).

18. RESSNIC, B. C.: *On a class of inequalities.* J. Austr. math. Soc. **3**, 442—448 (1963).

19. TOBEY, M. D.: *A two-parameter homogeneous mean value.* Proc. Am. Math. Soc. **18**, 9—14 (1967).

Stutgart-Rohr.