PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 247 — № 273 (1969)

254. LIGNES ASYMPTOTIQUES D'UNE CLASSE DES SURFACES*

*Dragoslav S. Mitrinović***

Considérons la surface d'équation

$$z=f_0(x)\,y^n+f_1(x)\,y^{n-1}+\cdots+f_{n-1}(x)\,y+f_n(x), \tag{1}$$

où $f_0, f_1, \ldots, f_n$ sont des fonctions de x ayant des secondes dérivées, avec $f_0(x)\not\equiv 0$ et $n\geqslant 2$. Nous allons exclure le cas simple $n=1$.

Posons le problème suivant:

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier $f_k\,(k=0,1,\ldots,n)$ pour que l'équation différentielle des projections dans le plan Oxy des lignes asymptotiques de la surface (1), à savoir

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \tag{2}$$

se réduise à la forme suivante

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)+2By\frac{dy}{dx}+Cy^2+2D\frac{dy}{dx}+2Ey+F=0, \tag{3}$$

où $A, \ldots, F$ sont des fonctions de x.

À partir de (1) nous avons:

$$r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_0''y^n+f_1''y^{n-1}+\cdots+f_{n-1}''y+f_n'',$$

$$s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=nf_0'y^{n-1}+(n-1)f_1'y^{n-2}+\cdots+2f_{n-2}'y+f_{n-1}',$$

$$t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=n(n-1)f_0y^{n-2}+(n-1)(n-2)f_1y^{n-3}+\cdots+3\cdot 2f_{n-3}y+2f_{n-2},$$

avec $f_k'=\dfrac{df_k}{x}$ et $f_k''=\dfrac{d^2f_k}{dx^2}$ $(k=0,1,\ldots,n)$.

---

* Reçu le 20 janvier 1969.

** R. Ž. Đorđević a bien voulu vérifier les résultats et rédiger cette Note en se basant sur notre manuscrit inédit qui date de l'année 1936.

r, s, t sont des polynomes en y. Supposons que t représente un polynome qui n'est pas zéro. L'équation (2), ou bien

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{s}{t}\,\frac{dy}{dx} + \frac{r}{t} = 0,$$

aura la forme (3) si et seulement si les polynomes s et r sont divisibles sans reste par le polynome t.

Le quotient $\dfrac{s}{t}$ est

$$\frac{1}{n-1}\,\frac{f_0'}{f_0}\,y + \frac{1}{n(n-1)}\,\frac{1}{f_0}\left((n-1)f_1' - (n-2)\frac{f_0'}{f_0}f_1\right), \tag{4}$$

avec le reste de division

$$M_2 y^{n-3} + M_3 y^{n-4} + \cdots + M_{n-2}y + M_{n-1}, \tag{5}$$

où

$$\begin{aligned} M_k = (n-k)f_k' &- \frac{(n-k)(n-k-1)}{n-1}\,\frac{f_0'}{f_0}f_k \\ &- \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)}\left((n-1)f_1' - (n-2)\frac{f_0'}{f_0}f_1\right)\frac{f_{k-1}}{f_0} \quad (k = 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{6}$$

Le quotient $\dfrac{r}{t}$ est

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n(n-1)}\,\frac{f_0''}{f_0}\,y^2 + \frac{1}{n(n-1)}\,\frac{1}{f_0}\left(f_1'' - \frac{n-2}{n}\,\frac{f_0''}{f_0}f_1\right)y \\ &+ \frac{1}{n(n-1)}\,\frac{1}{f_0}\left(f_2'' - \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\,\frac{f_0''}{f_0}f_2 - \frac{n-2}{n}\,\frac{f_1}{f_0}\left(f_1'' - \frac{n-2}{n}\,\frac{f_0''}{f_0}f_1\right)\right), \end{aligned} \tag{7}$$

avec le reste de division

$$N_3 y^{n-3} + N_4 y^{n-4} + \cdots + N_{n-1}y + N_n, \tag{8}$$

où

$$\begin{aligned} N_k = f_k'' &- \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}\,\frac{f_0''}{f_0}f_k - \frac{(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)}\,\frac{f_{k-1}}{f_0}\left(f_1'' - \frac{n-2}{n}\,\frac{f_0''}{f_0}f_1\right) \\ &- \frac{(n-k+2)(n-k+1)}{n(n-1)}\,\frac{f_{k-2}}{f_0}\left(f_2'' - \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\,\frac{f_0''}{f_0}f_2\right. \\ &\left. - \frac{n-2}{n}\,\frac{f_1}{f_0}\left(f_1'' - \frac{n-2}{n}\,\frac{f_0''}{f_0}f_1\right)\right) \qquad (k = 3, \ldots, n). \end{aligned} \tag{9}$$

Par conséquent, les polynomes s et r sont divisibles sans reste par le polynome t si et seulement si les $n+1$ coefficients f_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ satisfont aux $2n-4$ égalités suivantes:

$$M_2 = \cdots = M_{n-1} = 0 \quad \text{et} \quad N_3 = \cdots = N_n = 0. \tag{10}$$

Ces égalités (10) étant vérifiées, l'équation (2) a alors la forme (3), où

$A=1$,

$B=\frac{1}{n-1}\frac{f_0'}{f_0}$,

$C=\frac{1}{n(n-1)}\frac{f_0''}{f_0}$,

$D=\frac{1}{n(n-1)}\frac{1}{f_0}\left((n-1)f_1'-(n-2)\frac{f_0'}{f_0}f_1\right)$,

$E=\frac{1}{2n(n-1)}\frac{1}{f_0}\left(f_1''-\frac{n-2}{n}\frac{f_0''}{f_0}f_1\right)$,

$F=\frac{1}{n(n-1)}\frac{1}{f_0}\left(f_2''-\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}\frac{f_0''}{f_0}f_2-\frac{n-2}{n}\frac{f_1}{f_0}\left(f_1''-\frac{n-2}{n}\frac{f_0''}{f_0}f_1\right)\right)$.

Nous allons distinguer les trois cas suivants:

1° $2n-4<n+1 \Leftrightarrow n<5$,

2° $2n-4=n+1 \Leftrightarrow n=5$,

3° $2n-4>n+1 \Leftrightarrow n>5$.

Si $n>5$, le systèms (10) en f_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ n'a pas de solution dans le cas général car le nombre des équations est plus grand que celui des fonctions f_k. Nous allons considérer les cas correspondant à $n=2$, $n=3$, $n=4$ ou $n=5$.

Cas $n=2$. L'équation (1) prend la forme

$$z=f_0(x)y^2+f_1(x)y+f_2(x) \qquad (f_0\neq 0) \tag{11}$$

et l'équation (2) devient alors

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\frac{f_0'}{f_0}y\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\frac{f_0''}{f_0}y^2+\frac{f_1'}{f_0}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\frac{f_1''}{f_0}y+\frac{1}{2}\frac{f_2''}{f_0}=0,$$

c'est-à-dire rentre dans le type (3).

Cas $n=3$. L'équation (1) a la forme

$$z=f_0(x)y^3+f_1(x)y^2+f_2(x)y+f_3(x) \qquad (f_0\neq 0), \tag{12}$$

où les coefficients f_0, f_1, f_2, f_3 doivent satisfaire aux conditions

$$f_2'-\frac{1}{3}\frac{f_1}{f_0}\left(2f_1'-\frac{f_0'}{f_0}f_1\right)=0, \tag{13}$$

$$f_3''-\frac{1}{3}\frac{f_1}{f_0}\left(f_2''-\frac{1}{3}\frac{f_1}{f_0}\left(f_1''-\frac{1}{3}\frac{f_1}{f_0}f_0''\right)\right)=0. \tag{14}$$

Parmi les fonctions f_0, f_1, f_2, f_3 deux d'entre elles peuvent être des fonctions différentiables arbitraires. Si ce sont f_0 et f_1, alors l'équation (13) donne f_2 et ensuite l'équation (14) fournit f_3.

Cas $n=4$. Les conditions (10) pour ce cas sont

$$2f_2'-\frac{2}{3}\frac{f_0'}{f_0}f_2-\frac{1}{2}\frac{f_1}{f_0}\left(3f_1-2\frac{f_0'}{f_0}\right)=0, \tag{15}$$

$$f_3'-\frac{1}{6}\frac{f_2}{f_0}\left(3f_1-2\frac{f_0'}{f_0}f_1\right)=0, \tag{16}$$

$$f_3''-\frac{1}{6}\left(f_1''-\frac{1}{2}\frac{f_0''}{f_0}f_1\right)\frac{f_2}{f_0}-\frac{1}{2}\left(f_2''-\frac{1}{6}\frac{f_0''}{f_0}f_2-\frac{1}{2}\left(f_1''-\frac{1}{2}\frac{f_0''}{f_0}\right)\right)=0, \tag{17}$$

$$f_4''-\frac{1}{6}\left(f_2''-\frac{1}{6}\frac{f_0''}{f_0}f_2-\frac{1}{2}\left(f_1''-\frac{1}{2}\frac{f_0''}{f_0}f_1\right)\right)=0. \tag{18}$$

Une des fonctions f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 peut être considérée comme arbitraire. Cependant, la résolution de ce système est assez compliquée.

Cas $n=5$. L'équation (1) dans ce cas est

$$z=f_0(x)y^4+f_1(x)y^3+f_2(x)y^2+f_3(x)y+f_4(x) \qquad (f_0\neq 0).$$

Ce cas est plus compliqué que le dernier, car

$$M_2=0,\quad M_3=0,\quad M_4=0,\quad N_3=0,\quad N_4=0,\quad N_5=0$$

est un système de six équations différentielles avec six fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_5$.

Cette Note se rattache à l'article [1].

Ce qui précède présente une intérêt, étant donné que l'équation différentielle (3) est bien étudiée (voir: [2] — [8]).

REFERENCES

[1] D. S. Mitrinović, *Recherches sur les lignes asymptotiques*, Bull. Acad. Sci. Math. Nat. A Sci. Math.-Phys. (Belgrade), **4** (1938), 105—120.

[2] N. Alexéief, *Sur l'intégration de l'équation* $Ay'^2+Byy'+Cy^2+Dy'+Ey+F=0$, C. R. Sci. Paris **87** (1878), 641—643.

[3] G. Hamel, *Transformationstheorie der quadratischen Differentialgleichung erster Ordnung* $Ay'^2+2Byy'+Cy^2+2Dy'+2Ey+F=0$, Sitzungsberichte Berl. Math. Gesellschaft **33** (1934), 65—95.

[4] D. S. Mitrinović, *Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre*, Publ. Math. Université de Belgrade **5** (1936), 10—22.

[5] D. S. Mitrinović, *Sur l'équation différentielle des lignes asymptotiques*, Publ. Math. Université de Belgrade **3** (1934), 175—178.

[6] D. S. Mitrinović, *Asymptotiques d'une classe des surfaces*, Bull. Acad. Roy. Belgique, Classe des sciences (5) **22** (1936), 948—950.

[7] D. S. Mitrinović, *Asymptotiques d'une classe de surfaces et équations différentielles lineaires du second ordre s'y rattachant*, Bull. Acad. Roy. Belgique, Classe des Sciences (5) **22** (1936), 1047—1049.

[8] R. Godeau et D. S. Mitrinović, *Sur certaines surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures*, Mathesis **51** (1937), 115—116.