UNIVERZITET U BEOGRADU

PUBLIKACIJE

ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA

SERIJA:

MATEMATIKA I FIZIKA

№242 (1968)

BEOGRAD

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 242 (1968)

O NEKIM OPŠTIM KLASAMA FUNKCIONALNIH JEDNAČINA*

Radovan R. Janić

SADRŽAJ

---

* Primljeno za štampu 1. septembra 1968. na predlog D. S. Mitrinovića.

SKRAĆENICE

N označava skup prirodnih brojeva, R skup realnih brojeva i C skup kompleksnih brojeva.

$$\Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\} = \begin{vmatrix} H_1(u_1) & H_1(u_2) & \cdots & H_1(u_n) \\ H_2(u_1) & H_2(u_2) & & H_2(u_n) \\ \vdots & & & \\ H_n(u_1) & H_n(u_2) & & H_n(u_n) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

0. UVOD

Ovaj rad sastoji se iz sledećih delova:

0. Uvod;

1. Paraciklične funkcionalne jednačine prve vrste;

2. Neke linearne funkcionalne jednačine koje se svode na CAUCHYEVU funkcionalnu jednačinu;

3. Generalizacije nekih rezultata D. S. MITRINOVIĆA, S. B. PREŠIĆA i P. M. VASIĆA;

4. Neki sistemi kvadratnih funkcionalnih jednačina;

5. Bibliografija.

1. U prvom poglavlju dato je dvanaest teorema koje se odnose na funkcionalne jednačine (1.1.1), (1.1.2) i (1.1.3). Ove teoreme dokazane su u članku **[14]**.

2. U drugom poglavlju, na prvom mestu, posmatrane su dve linearne funkcionalne jednačine (jednačine $\mathbf{L}_1$ i $\mathbf{L}_2$) sa više nepoznatih pravougaonih matričnih funkcija čiji su argumenti kvadratne komutativne realne matrice. Njihovo rešavanje svedeno je na rešavanje CAUCHYEVE matrične funkcionalne jednačine.

U istom poglavlju rešene su još dve linearne funkcionalne jednačine (jednačine $\mathbf{L}_3$ i $\mathbf{L}_4$) čiji su argumenti determinante.

Neki rezultati koji su u vezi sa jednačinom $\mathbf{L}_4$ objavljeni su u članku **[18]**.

3. U ovom poglavlju proučavane su generalizacije nekih kvadratnih funkcionalnih jednačina koje su ranije posmatrali D. S. MITRINOVIĆ, S. B. PREŠIĆ i P. M. VASIĆ. Dobijeni rezultati formulisani su u obliku četiri teoreme.

Neki rezultati koji se odnose na teoremu 3.4.1 objavljeni su u članku **[9]**.

4. U četvrtom poglavlju rešena su tri sistema kvadratnih funkcionalnih jednačina.

Prvi i treći sistem zavise od jednog a drugi od dva realna parametra. U zavisnosti od vrednosti ovih parametara određen je i oblik rešenja odgovarajućeg sistema.

Neki rezultati koji su u vezi sa ovim sistemima objavljeni su u radovima **[19]** i **[20]**.

5. U bibliografiji literatura je podeljena na dva dela. U prvom delu navedeni su članci koji su upotrebljeni pri izradi ovog rada, a u drugom delu nabrojana je ostala korišćena literatura koju nije bilo neophodno citirati u samom radu.

* * *

Osećam prijatnu dužnost da zahvalim profesoru D. S. Mitrinoviću, pre svega zato što me je podstakao i uputio u naučni rad, što je rukovodio izradom ovog rada, za stalni interes i podršku u radu, kao i za niz korisnih saveta i sugestija koje su mi pomogle da ovaj rad dobije konačnu formu.

Isto tako želim da zahvalim docentu P. M. Vasiću za srdačnu i nesebičnu pomoć koju mi je pružio pri izradi ovog rada.

1. PARACIKLIČNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE PRVE VRSTE

1.1. Oznake i objašnjenja

Neka je

1° S neprazan skup;

2° M aditivna ABELOVA grupa;

3° $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(x_i, y_j \in S,\ i, j=1, \ldots, n)$;

$X_i=(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ $(x_{ij} \in S,\ j=1, \ldots, n;\ i=1,2, \ldots,)$,

$$\begin{aligned} Q_i^j X &= Q_i^j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_j) \qquad (i \leqslant j), \\ &= (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_j) \qquad (i>j); \end{aligned}$$

4° C_n ciklični operator definisan pomoću jednakosti

$$C_n Q_i^j X = Q_{i+1}^{j+1} X \quad (Q_{i+1}^{j+1} X = Q_{i+1}^{j+1-n} X \text{ za } j>n-1).$$

Paraciklične linearne funkcionalne jednačine prve i druge vrste prvi je u literaturu uveo D. S. MITRINOVIĆ (videti: **[10]** i **[11]**).

Paraciklične linearne funkcionalne jednačine prve vrste su jednačine oblika

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(C_n^{i-1} Q_1^{p_1} X_1,\ C_n^{i-1} Q_1^{p_2} X_2, \ldots, C_n^{i-1} Q_1^{p_m} X_m\right)=0. \tag{1.1.1}$$

Isto tako, D. S. MITRINOVIĆ dao je jedan metod sa rešavanje ovih jednačina i za neke posebne vrednosti n, m i p_i odredio opšta rešenja tih jednačina.

U ovom poglavlju naći ćemo opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\left(C_n^{i-1} Q_1^{p_1} X_1,\ C_n^{i-1} Q_1^{p_2} X_2, \ldots, C_n^{i-1} Q_1^{p_m} X_m\right)=0, \tag{1.1.2}$$

kao i jednačine (1.1.1) u slučaju kada je $m=2$. U slučaju kada je m proizvoljan prirodan broj odredićemo opšte rešenje jednačine (1.1.1) i (1.1.2) samo kada je $n+1 \geqslant 2 \max(p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

Prvo ćemo rešiti sledeću funkcionalnu jednačinu

$$\sum_{i=1}^{k} f_i\left(C_n^{i-1} Q_1^p X,\ C_n^{i-1} Q_1^q Y\right)=0 \qquad (k \leqslant n), \tag{1.1.3}$$

pa na osnovu toga odrediti opšta rešenja jednačina (1.1.1) i (1.1.2) za $m=2$.

1.2. Funkcionalna jednačina (1.1.3)

Pri određivanju opšteg rešenja jednačine (1.1.3) moramo razlikovati sledećih šest slučajeva (videti: [**14**]):

1° $q<2q-1 \leqslant p=n$,

2° $q<p=n<2q-1$,

3° $q<p<n<2q-1<2p-1$,

4° $q<p<2q-1 \leqslant n<p+q-1<2p-1$,

5° $q<p<p+q-1<n<2p-1$,

6° $q<p<2q-1<2p-1 \leqslant n$.

U članku [**14**] dokazane su sledeće teoreme:

Teorema 1.2.1. — *Ako je $q<2q-1 \leqslant p=n$, opšte rešenje jednačine* (1.1.3) *je*

$$\begin{aligned} f_r\left(Q_1^n X,\ Q_1^q Y\right) &= \sum_{\nu=1}^{\min(k-r,\, q-1)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu\left(Q_{\nu+1}^\nu X,\ Q_{\nu+1}^q Y\right) \\ &+ \sum_{\nu=n-r+1}^{q-1} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu\left(Q_{\nu+1}^\nu X,\ Q_{\nu+1}^q Y\right) \\ &+ \sum_{\nu=q}^{\min(k-r,\, n-q)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu\left(Q_{\nu+1}^\nu X\right) \\ &+ \sum_{\nu=\max(n-r+1,\, q)}^{n-q} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}\left(Q_1^n X\right) \\ &+ \sum_{\nu=n-q+1}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}\left(Q_1^n X,\ Q_1^{q+\nu} Y\right) \\ &+ \sum_{\nu=\max(n-r+1,\, n-q+1)}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}\left(Q_1^n X,\ Q_1^{q+\nu} Y\right) \\ &\qquad (r=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

gde je po definiciji

$$\sum_a^b = 0 \ \text{ za } a>b;\quad Q_{m+n}^\nu = Q_m^\nu;\quad F_{m+n}^\nu = F_m^\nu$$

i F_i^j: $S^{p+q-1} \to M$ proizvoljne funkcije.

Teorema 1.2.2. — *Ako je* $q<p=n<2q-1$, *opšte rešenje jednačine* (1.1.3) *je*

$$
\begin{aligned}
(1.2.2)\quad & f_r(Q_1^n X,\ Q_1^q Y) \\
&= \sum_{\nu=1}^{\min(k-r,\ n-q)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^\nu X,\ Q_{\nu+1}^q Y) \\
&+ \sum_{\nu=n-r+1}^{n-q} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^\nu X,\ Q_{\nu+1}^q Y) \\
&+ \sum_{\nu=n-q+1}^{\min(k-r,\ q-1)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^\nu X,\ Q_{\nu+1}^q Y,\ Q_1^{q+\nu} Y) \\
&+ \sum_{\nu=\max(n-r+1,\ n-q+1)}^{q-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^n X,\ Q_1^{q+\nu} Y,\ Q_{\nu+1}^q Y) \\
&+ \sum_{\nu=q}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^n X,\ Q_1^{q+\nu} Y) \\
&+ \sum_{\nu=\max(n-r+1,\ q)}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^n X,\ Q_1^{q+\nu} Y),
\end{aligned}
$$

gde je $r=1, \ldots, k$ *i* F_i^j: $S^{p+q-1} \to M$ *proizvoljne funkcije.*

Teorema 1.2.3. — *U slučaju kada je* $q<p<n<2q-1<2p-1$, *opšte rešenje jednačine* (1.1.3) *dato je sa*

$$
\begin{aligned}
(1.2.3)\quad & f_r(Q_1^p X,\ Q_1^q Y) \\
&= \sum_{\nu=1}^{\min(n-p,\ k-r)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\ Q_{\nu+1}^q Y) \\
&+ \sum_{\nu=n-r+1}^{n-p} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\ Q_{\nu+1}^q Y) \\
&+ \sum_{\nu=n-p+1}^{\min(k-r,\ n-q)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{\nu+p} X,\ Q_{\nu+1}^q Y) \\
&+ \sum_{\nu=\max(n-p+1,\ n-r+1)}^{n-q} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{\nu+p} X,\ Q_{\nu+1}^q Y) \\
&+ \sum_{\nu=n-q+1}^{\min(k-r,\ q-1)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{\nu+p} X,\ Q_{\nu+1}^q Y,\ Q_1^{\nu+q} Y) \\
&+ \sum_{\nu=\max(n-q+1,\ n-r+1)}^{q-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X,\ Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{\nu+q} Y,\ Q_{\nu+1}^q Y) \\
&+ \sum_{\nu=q}^{\min(k-r,\ p-1)} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X,\ Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{\nu+q} Y) \\
&+ \sum_{\nu=\max(q,\ n-r+1)}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X,\ Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{\nu+q} Y)
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{v=p}^{k-r}(-1)^{n-v}F_{v+r}^{n-v}\left(Q_1^{v+p}X,\ Q_1^{v+q}Y\right)$$

$$+\sum_{v=\max(p,\,n-r+1)}^{n-1}(-1)^{n-v}F_{v+r}^{n-v}\left(Q_1^{v+p}X,\ Q_1^{v+q}Y\right),$$

gde je $r=1,\ \ldots,\ k$ *i* $F_i^j\colon\ S^{p+q-2}\to M$ *proizvoljne funkcije.*

Teorema 1.2.4. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.1.3), *u slučaju kada je* $q<p<2q-1\leqslant n<p+q-1<2p-1$, *dato je sa*

$$f_r\left(Q_1^pX,\ Q_1^qY\right) \tag{1.2.4}$$

$$=\sum_{v=1}^{\min(n-p,\,k-r)}(-1)^{v-1}F_r^v\left(Q_{v+1}^pX,\ Q_{v+1}^qY\right)$$

$$+\sum_{v=n-r+1}^{n-p}(-1)^{v-1}F_r^v\left(Q_{v+1}^pX,\ Q_{v+1}^qY\right)$$

$$+\sum_{v=n-p+1}^{\min(k-r,\,q-1)}(-1)^{v-1}F_r^v\left(Q_{v+1}^pX,\ Q_1^{v+p}X,\ Q_{v+1}^qY\right)$$

$$+\sum_{v=\max(n-p+1,\,n-r+1)}^{q-1}(-1)^{v-1}F_r^v\left(Q_{v+1}^pX,\ Q_1^{v+p}X,\ Q_{v+1}^qY\right)$$

$$+\sum_{v=q}^{\min(k-r,\,n-q)}(-1)^{v-1}F_r^v\left(Q_{v+1}^pX,\ Q_1^{v+p}X\right)$$

$$+\sum_{v=\max(n-v+1,\,q)}^{n-q}(-1)^{n-v}F_{v+r}^{n-v}\left(Q_1^{v+p}X,\ Q_{v+1}^pX\right)$$

$$+\sum_{v=n-q+1}^{\min(k-r,\,p-1)}(-1)^{n-v}F_{v+r}^{n-v}\left(Q_1^{v+p}X,\ Q_{v+1}^pX,\ Q_1^{v+q}Y\right)$$

$$+\sum_{v=\max(n-q+1,\,n-r+1)}^{p-1}(-1)^{n-v}F_{v+r}^{n-v}\left(Q_1^{v+p}X,\ Q_{v+1}^pX,\ Q_1^{v+q}Y\right)$$

$$+\sum_{v=p}^{k-r}(-1)^{n-v}F_{v+r}^{n-v}\left(Q_1^{v+p}X,\ Q_1^{v+q}Y\right)$$

$$+\sum_{v=\max(p,\,n-r+1)}^{n-1}(-1)^{n-v}F_{v+r}^{n-v}\left(Q_1^{v+p}X,\ Q_1^{v+q}Y\right),$$

gde je $r=1,\ \ldots,\ k$ *i* $F_i^j\colon\ S^{p+q-2}\to M$ *proizvoljne funkcije.*

Teorema 1.2.5. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.1.3), *u slučaju kada je* $q<p<p+q-1<n<2p-1$, *dato je formulom*

$$f_r\left(Q_1^pX,\ Q_1^qY\right) \tag{1.2.5}$$

$$=\sum_{v=1}^{\min(q-1,\,k-r)}(-1)^{v-1}F_r^v\left(Q_{v+1}^pX,\ Q_{v+1}^qY\right)$$

$$+\sum_{\nu=n-r+1}^{q-1}(-1)^{\nu-1}F_r^\nu(Q_{\nu+1}^p X,\ Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+\sum_{\nu=q}^{\min(k-r,\ n-p)}(-1)^{\nu-1}F_r^\nu(Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+\sum_{\nu=\max(q,\ n-r+1)}^{n-p}(-1)^{\nu-1}F_r^\nu(Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+\sum_{\nu=n-p+1}^{\min(k-r,\ n-p)}(-1)^{\nu-1}F_r^\nu(Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-p+1,\ n-r+1)}^{p-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p} X,\ Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+\sum_{\nu=p}^{\min(k-r,\ n-q)}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+\sum_{\nu=\max(p,\ n-r+1)}^{n-q}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+\sum_{\nu=n-q+1}^{k-r}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p} X,\ Q_1^{\nu+q} Y)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-q+1,\ n-r+1)}^{n-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p} X,\ Q_1^{\nu+q} Y),$$

gde je $r=1,\ldots,k$ *i* $F_i^j\colon S^{p+q-2}\to M$ *proizvoljne funkcije.*

1.3. Funkcionalna jednačina (1.1.2)

Stavljajući u jednačini (1.1.3) $k=n$ dobija se funkcionalna jednačina (1.1.2). Prema tome, ako se u (1.2.1), (1.2.2), (1.2.3), (1.2.4) i (1.2.5) stavi $k=n$, dobija se opšte rešenje jednačine (1.1.2) u posmatranim slučajevima. Tako, na primer, ako se u (1.2.3) stavi $k=n$, dobija se da je opšte rešenje funkcionalne jednačine (1.1.2), u slučaju kada je $q<p<n<2q-1<2p-1$, dato formulom

$$f_r(Q_1^p X,\ Q_1^q Y)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-p}(-1)^{\nu-1}F_r^\nu(Q_{\nu+1}^p X,\ Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+\sum_{\nu=n-p+1}^{n-q}(-1)^{\nu-1}F_r^\nu(Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{p+\nu} X,\ Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+\sum_{\nu=n-q+1}^{\min(n-r,\ q-1)}(-1)^{\nu-1}F_r^\nu(Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{p+\nu} X,\ Q_{\nu+1}^q Y,\ Q_1^{q+\nu} Y)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-q+1,\ n-r+1)}^{q-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{p+\nu} X,\ Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{q+\nu} Y,\ Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+\sum_{\nu=q}^{p-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{p+\nu}X,\ Q_{\nu+1}^{p}X,\ Q_1^{q+\nu}Y)$$

$$+\sum_{\nu=p}^{n-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{p+\nu}X,\ Q_1^{q+\nu}Y),$$

gde je $r=1,\ldots,n$ i F_i^j proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

Međutim, u prethodnom odeljku nije ispitivan slučaj kada je $q<p<2q-1<2p-1\leqslant n$, pa u ovom slučaju treba naknadno odrediti opšte rešenje jednačine (1.1.2). No, kako je to već napred rečeno, ovde ćemo formulisati rezultat koji se odnosi na slučaj znatno opštiji od ovoga. Naime važi sledeća:

Teorema 1.3.1. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.1.2), *u slučaju kada je* $n+1\geqslant 2\max(p_1,\ldots,p_m)\,(m\geqslant 2)$, *dato je formulom*

$$\begin{aligned}(1.3.1)\qquad & f_r(Q_1^{p_1}X_1,\ Q_1^{p_2}X_2,\ \ldots,\ Q_1^{p_m}X_m)\\ &=F_r(Q_1^{p_1-1}X_1,\ Q_1^{p_2-1}X_2,\ \ldots,\ Q_1^{p_m-1}X_m)\\ &\quad -F_{r+1}(Q_2^{p_1}X_1,\ Q_2^{p_2}X_2,\ \ldots,\ Q_2^{p_m}X_m),\end{aligned}$$

gde je $r=1,\ldots,n$; $F_{n+1}\equiv F_1$ *i* F_i *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* M.

Dokaz ove teoreme je analogan dokazu teoreme 2 iz članka **[13]** pa ga zato ovde nećemo dati.

1.4. Funkcionalna jednačina (1.1.1)

Pre nego što pređemo na ispitivanje funkcionalne jednačine (1.1.1), uvešćemo sledeću pretpostavku:

Za grupu M pretpostavlja se da u njoj jednačina $sZ=A$ $(Z,A\in M)$, za $s\leqslant n$ $(s\in N)$, ima jedinstveno rešenje $Z=\frac{1}{s}A$.

Pod ovom pretpostavkom, za $m=2$, važe sledećih pet teorema.

Teorema 1.4.1. — *Ako je* $q<2q-1<p=n$, *opšte rešenje jednačine* (1.1.1), *je*

$$f(Q_1^nX,\ Q_1^qY)=F_0(Q_1^nX,\ Q_1^{q-1}Y)-F_0(Q_2^1X,\ Q_2^qY),$$

gde je F_0 *proizvoljna funkcija sa vrednostima u* M.

Teorema 1.4.2. — *Ako je* $q<p=n<2q-1$, *opšte rešnnje jednačine* (1.1.1), *je*

$$\begin{aligned}&f(Q_1^nX,\ Q_1^qY)\\ &=F_0(Q_1^nX,\ Q_1^{q-1}Y)-F_0(Q_2^1X,\ Q_2^qY)\\ &\quad+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2q-n}{2}\right]}\{F_\nu(Q_{n-q+\nu+1}^{\nu+1}X,\ Q_1^{\nu}Y,\ Q_{n-q+\nu+1}^{q}Y)\\ &\qquad -F_\nu(Q_1^nX,\ Q_{q-\nu+1}^{q}Y,\ Q_1^{2q-\nu-n}Y)\},\end{aligned}$$

gde su F_i $\left(i=0,\ 1,\ \ldots,\ \left[\frac{2q-n}{2}\right]\right)$ *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* M.

Teorema 1.4.3. — *U slučaju kada je* $q<p<n<2q-1<2p-1$, *opšte rešenje jednačine* (1.1.1) *dato je sa*

$$
\begin{aligned}
& f(Q_1^p X,\ Q_1^q Y) \\
& \quad = F_0(Q_1^{p-1} X,\ Q_1^{q-1} Y) - F_0(Q_2^p X,\ Q_2^q Y) \\
& \quad + \sum_{\nu=1}^{p-q} \{F_\nu(Q_1^\nu X,\ Q_{n-p+\nu+1}^p X,\ Q_{n-p+\nu+1}^q Y) \\
& \qquad - F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X,\ Q_1^{2p-n-\nu} X,\ Q_1^{p+q-n-\nu} Y)\} \\
& \quad + \sum_{\nu=p-q+1}^{\left[\frac{2p-n}{2}\right]} \{F_\nu(Q_1^\nu X,\ Q_{n-p+\nu+1}^p X,\ Q_1^{\nu-p+q} Y,\ Q_{n-p+\nu+1}^q Y) \\
& \qquad - F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X,\ Q_1^{2p-n-\nu} X,\ Q_{p-\nu+1}^q Y,\ Q_1^{p+q-n-\nu} Y)\},
\end{aligned}
$$

gde su $F_i\left(i=0,\ 1,\ \ldots,\left[\frac{2p-n}{2}\right]\right)$ *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* M.

Teorema 1.4.4. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.1.1), *u slučaju kada je* $q<p<2q-1\leqslant n\leqslant p+q-1<2p-1$ *dato je sa*

$$
\begin{aligned}
& f(Q_1^p X,\ Q_1^q Y) \\
& \quad = F_0(Q_1^{p-1} X,\ Q_1^{q-1} Y) - F_0(Q_2^p X,\ Q_2^q Y) \\
& \quad + \sum_{\nu=1}^{p+q-n-1} \{F_\nu(Q_1^\nu X,\ Q_{n-p+\nu+1}^p X,\ Q_{n-p+\nu+1}^q Y) \\
& \qquad - F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X,\ Q_1^{2p-n-\nu} X,\ Q_1^{p+q-n-\nu} Y)\} \\
& \quad + \sum_{\nu=p+q-n}^{\left[\frac{2p-n}{2}\right]} \{F_\nu(Q_1^\nu X,\ Q_{n-p+\nu+1}^p X) \\
& \qquad - F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X,\ Q_1^{2p-n-\nu} X)\}.
\end{aligned}
$$

gde su $F_i\left(i=0,\ 1,\ \ldots,\left[\frac{2p-n}{2}\right]\right)$ *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* M.

Teorema 1.4.5. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.1.1), *u slučaju kada je* $q<p<p+q-1<n<2p-1$, *dato je formulom*

$$
\begin{aligned}
& f(Q_1^p X,\ Q_1^q Y) \\
& \quad = F_0(Q_1^{p-1} X,\ Q_1^{q-1} Y) - F_0(Q_2^p X,\ Q_1^q Y) \\
& \quad + \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2p-n}{2}\right]} \{F_\nu(Q_1^\nu X,\ Q_{n-p+\nu+1}^p X) - F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X,\ Q_1^{2p-n-\nu} X)\},
\end{aligned}
$$

gde su $F_i\left(i=0,1,\ \ldots,\left[\frac{2p-n}{2}\right]\right)$ *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* M.

Kao i u prethodnom odeljku i ovde ćemo posebno posmatrati slučaj kada je $q<p<2p-1<2p-1\leqslant n$. Naime posmatraćemo slučaj koji znatno opštiji od ovoga. Važi

Teorema 1.4.6. — *Ako je* $n+1\geqslant 2\max(p_1, \ldots, p_m)$ $(m\geqslant 2)$, *opšte rešenje jednačine* (1.1.1) *je*

$$\begin{aligned} f(Q_1^{p_1}X_1, Q_1^{p_2}X_2, \ldots, Q_1^{p_m}X_m) \\ = F(Q_1^{p_1-1}X_1, Q_1^{p_2-1}X_2, \ldots, Q_1^{p_m-1}X_m) \\ -F(Q_2^{p_1}X_1, Q_1^{p_2}X_2, \ldots, Q_2^{p_m}X_m)+A, \end{aligned}$$

gde je F proizvoljna funkcija sa vrednostima u M i A proizvoljan element iz M za koji je $nA=0$.

Dokazi teorema 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5 i 1.4.6 dati su takođe u članku [**14**].

2. NEKE LINEARNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE KOJE SE SVODE NA CAUCHYEVU FUNKCIONALNU JEDNAČINU

2.1. Funkcionalna jednačina L_1

Funkcionalnu jednačinu

$$(2.1.1)\qquad F(x_1y_2-x_2y_1,\ x_3y_4-x_4y_3)=G(x_1y_3-x_3y_1,\ x_2y_4-x_4y_2) + H(x_1y_4-x_4y_1,\ x_3y_2-x_2y_3),$$

gde su x_i, y_j $(i, j=1, 2, 3, 4)$ kvadratne komutativne matrice reda (n, n) i F, G i H proizvoljne matrične funkcije reda (m, s), zvaćemo: *funkcionalna jednačina* L_1.

Za funkcionalnu jednačinu L_1 dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 2.1.1. — *Opšte merljivo rešenje funkcionalne jednačine* L_1 *dato je formulama*

$$F(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}z_{ij}+A+B,$$

$$G(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}z_{ij}+A,$$

$$H(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij}z_{ij}+B,$$

gde su K_{ij}, A, B *proizvoljne konstantne matrice reda* (m, s) *i* z_{ij} *elementi matrice* $\|z_{ij}\|=Z=X\cdot Y$.

Dokaz. Ako se u jednačini L_1 stavi $x_1=u$, $x_3=v$, $x_2=x_4=y_1=y_3=0$ (0 — nula matrica), $y_2=y_4=I$ (I — jedinična matrica), dobija se

$$(2.1.2)\qquad H(u, v)=F(u, v)-A,$$

gde je uvedena oznaka $A=G(0, 0)$.

Ako stavimo $x_1=u$, $x_4=-v$, $x_2=x_3=y_1=y_4=0$, $y_2=y_3=I$, iz jednačine L_1 dobijamo

$$(2.1.3)\qquad G(u, v)=F(u, v)-B,$$

pri čemu je $B=H(0, 0)$.

Zamenjujući (2.1.2) i (2.1.3) u (2.1.1), jednačina $\mathbf{L}_1$ svodi se na

$$(2.1.4) \qquad F(x_1 y_2 - x_2 y_1,\ x_3 y_4 - x_4 y_3) = F(x_1 y_3 - x_3 y_1,\ x_2 y_4 - x_4 y_2) + F(x_1 y_4 - x_4 y_1,\ x_3 y_2 - x_2 y_3) - A - B.$$

Ako se uvede nova matrična funkcija E, smenom

$$(2.1.5) \qquad E(u, v) = F(u, v) - A - B,$$

jednačina (2.1.4) postaje

$$(2.1.6) \qquad E(x_1 y_2 - x_2 y_1,\ x_3 y_4 - x_4 y_3) = E(x_1 y_3 - x_3 y_1,\ x_2 y_4 - x_4 y_2) + E(x_1 y_4 - x_4 y_1,\ x_3 y_2 - x_2 y_3).$$

Ako se u (2.1.6) stavi $x_i = y_j = 0$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$, dobija se da funkcija E ima osobinu $E(0,0) = 0$.

Stavljajući $x_1 = u$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = I$, iz (2.1.6) imamo $E(u, 0) = 0$.

Najzad, za $x_1 = x_2 = x_4 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $x_3 = I$, $y_4 = u$, jednačina (2.1.6) daje $E(0, u) = 0$.

Koristeći prethodne rezultate i stavljajući $x_1 = u$, $x_2 = y_3 = I$, $y_1 = y_2 = 0$, $y_4 = v$, x_3, x_4 proizvoljni, jednačina (2.1.6) svodi se na

$$(2.1.7) \qquad E(u, v) = -E(uv, -I).$$

Uvodeći novu funkciju g smenom

$$(2.1.8) \qquad g(x) = E(x, -I),$$

i stavljajući zatim $x_1 = y_2 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = y_1 = I$, $y_3 = X$, $y_4 = -Y$, iz jednačine (2.1.6) dobija se Cauchyeva funkcionalna jednačina

$$(2.1.9) \qquad g(X + Y) = g(X) + g(Y).$$

Opšte merljivo rešenje jednačine (2.1.9) je

$$(2.1.10) \qquad g(X) = \sum_{i, j = 1}^{n} K_{ij} x_{ij},$$

gde su K_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ proizvoljne konstantne matrice reda (m, s) i x_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ elementi matrice $\| x_{ij} \| = X$.

Na osnovu (2.1.7), (2.1.8) i (2.1.10) dobijamo

$$(2.1.11) \qquad E(X, Y) = \sum_{i, j = 1}^{n} K_{ij} z_{ij},$$

gde su z_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ elementi matrice $\| z_{ij} \| = Z = X \cdot Y$.

Na osnovu (2.1.2), (2.1.3), (2.1.5) i (2.1.11) dobijamo

$$
\begin{aligned}
&F(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A+B, \\
(2.1.12) \qquad &G(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A, \\
&H(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+B,
\end{aligned}
$$

pri čemu K_{ij} i z_{ij} imaju ista značenja kao u (2.1.11).

Obrnuto tvrđenje može se proveriti zamenom funkcija F, G i H iz (2.1.12) u (2.1.1), na čemu se nećemo zadržavati.

2.2. Funkcionalna jednačina L_2

Funkcionalnu jednačinu

$$
\begin{aligned}
(2.2.1) \qquad & F_0(x_1 y_2-x_2 y_1,\ z_2 t_3-z_3 t_2)+F_1(x_1 z_2-x_2 z_1,\ y_2 t_3-y_3 t_2) \\
&+F_2(x_1 t_2-x_2 t_1,\ y_3 z_2-y_2 z_3)+F_3(z_2 t_1-z_1 t_2,\ x_2 y_3-x_3 y_2) \\
&+F_4(y_1 t_2-y_2 t_1,\ x_2 z_3-x_3 z_2)+F_5(y_2 z_1-y_1 z_2,\ x_2 t_3-x_3 t_2)=0,
\end{aligned}
$$

gde su x_i, y_i, z_i, $t_i\,(i=1, 2, 3)$ komutativne kvadratne matrice reda (n, n) i $F_j\,(j=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ proizvoljne matrične funkcije reda (m, s), zvaćemo: *funkcionalna jednačina* L_2.

Za funkcionalnu jednačinu L_2 dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 2.2.1. — *Opšte merljivo rešenje funkcionalne jednačine* L_2 *dato je formulama*

$$
(2.2.2) \qquad F_0(X, Y)=-\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_0,
$$

$$
(2.2.3) \qquad F_r(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_r \quad (r=1, 2, 3, 4, 5),
$$

gde su $K_{ij}\,(i, j=1, \ldots, n)$ *proizvoljne konstantne matrice reda* (m, s), z_{ij} *elementi matrice* $\|z_{ij}\|=Z=X\cdot Y$ *i* $A_r\,(r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ *konstantne matrice reda* (m, s) *za koje je* $A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=0$.

Dokaz. Ako se sve promenljive x_i, y_i, z_i, t_i $(i=1, 2, 3)$ zamene sa u, iz jednačine (2.2.1) dobija se

$$
(2.2.4) \qquad A_0+A_1+A_2+A_3+A_4+A_5=0,
$$

gde smo uveli oznake $F_i(0, 0)=A_i$ $(i=0, 1, 2, 3, 4, 5)$.

Stavljajući $x_1=X$, $z_3=-Y$, $y_2=t_2=I$ (I — jedinična matrica) i zamenjujući sve ostale promenljive sa 0 (0 — nula matrica), iz jednačine (2.2.1) dobija se

$$
(2.2.5) \qquad F_0(X, Y)+F_2(X, Y)+A_1+A_3+A_4+A_5=0.
$$

Ako se stavi $x_1 = -X$, $y_3 = Y$, $z_2 = t_2 = -I$, i ako se ostale promenljive zamene sa 0, jednačina (2.2.1) svodi se na

$$F_1(X, Y) + F_2(X, -Y) + A_0 + A_3 + A_4 + A_5 = 0. \tag{2.2.6}$$

Za $x_2 = -z_2 = I$, $y_3 = Y$, $t_1 = -X$, a ako se sve ostale promenljive zamene sa 0, jednačina (2.2.1) daje

$$F_2(X, -Y) + F_3(X, Y) + A_0 + A_1 + A_4 + A_5 = 0. \tag{2.2.7}$$

Stavljajući $x_2 = y_2 = -I$, $z_3 = -Y$, $t_1 = X$ i zamenjujući sve ostale promenljive sa 0, iz (2.2.1) nalazimo

$$F_2(X, -Y) + F_4(X, Y) + A_0 + A_1 + A_3 + A_5 = 0. \tag{2.2.8}$$

Ako se stavi $x_3 = Y$, $y_1 = X$, $z_2 = -I$, $t_2 = I$ i ako se sve ostale promenljive zamene sa 0, jednačina (2.2.1) postaje

$$F_4(X, Y) + F_5(X, -Y) + A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 0. \tag{2.2.9}$$

Iz (2.2.5), (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8) i (2.2.9) dobijamo

$$\begin{aligned}
F_0(X, Y) &= -F_2(X, Y) - A_1 - A_3 - A_4 - A_5,\\
F_1(X, Y) &= -F_2(X, -Y) - A_0 - A_3 - A_4 - A_5,\\
F_3(X, Y) &= -F_2(X, -Y) - A_0 - A_1 - A_4 - A_5,\\
F_4(X, Y) &= -F_2(X, -Y) - A_0 - A_1 - A_3 - A_5,\\
F_5(X, Y) &= F_2(X, Y) - A_2 + A_5.
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Na osnovu (2.2.10) i (2.2.4), jednačina (2.2.1) postaje

$$\begin{aligned}
&F_2(x_1 y_2 - x_2 y_1,\ z_2 t_3 - z_3 t_2) + F_2(x_1 z_2 - x_2 z_1,\ t_2 y_3 - t_3 y_2)\\
&- F_2(x_1 t_2 - x_2 t_1,\ z_2 y_3 - z_3 y_2) + F_2(t_1 z_2 - t_2 z_1,\ y_2 x_3 - y_3 x_2)\\
&+ F_2(y_1 t_2 - y_2 t_1,\ z_2 x_3 - z_3 x_2) - F_2(z_1 y_2 - z_2 y_1,\ x_2 t_3 - x_3 t_2) - 2A_2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Ako se uvede nova funkcija F smenom

$$F(X, Y) = F_2(X, Y) - A_2, \tag{2.2.12}$$

jednačina (2.2.11) postaje

$$\begin{aligned}
&F(x_1 y_2 - x_2 y_1,\ z_2 t_3 - z_3 t_2) + F(x_1 z_2 - x_2 z_1,\ t_2 y_3 - t_3 y_2)\\
&- F(x_1 t_2 - x_2 t_1,\ z_2 y_3 - z_3 y_2) + F(t_1 z_2 - t_2 z_1,\ y_2 x_3 - y_3 x_2)\\
&+ F(y_1 t_2 - y_2 t_1,\ x_3 z_2 - x_2 z_3) - F(z_1 y_2 - z_2 y_1,\ x_2 t_3 - x_3 t_2) = 0.
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Ako se u (2.2.13) sve promenljive zamene sa u, dobija se

$$F(0, 0) = 0. \tag{2.2.14}$$

Stavljajući $x_1 = X$, $y_2 = z_2 = I$, $t_3 = Y$, i zamenjujući sve ostale promenljive sa 0, na osnovu (2.2.14), iz (2.2.13) dobijamo

$$F(X,\ Y) + F(X,\ -Y) = 0,$$

odakle

(2.2.15) $$F(X,\ -Y) = -F(X,\ Y).$$

Na osnovu (2.2.15), jednačina (2.2.13) svodi se na

(2.2.16) $$\begin{aligned} &F(x_1 y_2 - x_2 y_1,\ z_2 t_3 - z_3 t_2) + F(x_1 z_2 - x_2 z_1,\ t_2 y_3 - t_3 y_2) \\ &+ F(x_1 t_2 - x_2 t_1,\ y_2 z_3 - y_3 z_2) + F(t_1 z_2 - t_2 z_1,\ y_2 x_3 - y_3 x_2) \\ &+ F(y_1 t_2 - y_2 t_1,\ z_2 x_3 - z_3 x_2) + F(z_1 y_2 - z_2 y_1,\ t_2 x_3 - t_3 x_2) = 0. \end{aligned}$$

Jednačinu (2.2.16) posmatrajmo je O. EM. GHEORGHIU (videti: [**15**]) i dokazao da funkcija F, pored osobina (2.2.14) i (2.2.15) ima i sledeće osobine

$$F(X,\ 0) = 0,\quad F(0,\ Y) = 0,\quad F(-X,\ Y) = -F(X,\ Y).$$

Koristeći gore navedene osobine funkcije F i stavljajući u

(2.2.16) $x_1 = u$, $z_2 = v$, $y_2 = t_3 = I$, $y_1 = z_1 = t_1 = x_2 = t_2 = x_3 = y_3 = z_3 = 0$, dobija se

(2.2.17) $$F(u,\ v) = -F(uv,\ -I) = G(uv).$$

Uvodeći funkciju G u jednačinu (2.2.16) i stavljajući zatim

$$x_2 = y_2 = z_2 = t_2 = I,\quad x_3 - y_3 = x_3 - z_3 = x_3 - t_3 = I,$$

dobija se za funkciju G sledeća matrična funkcionalna jednačina:

(2.2.18) $$G(t_1 - z_1) + G(z_1 - y_1) + G(y_1 - t_1) = 0.$$

Ako se u (2.2.18) stavi $y_1 = 0$, $z_1 = -Y$, $t_1 = X$ i iskoriste osobine funkcije F, pa prema (2.2.17), i funkcije G, dobija se CAUCHYEVA funkcionalna jednačina

(2.2.19) $$G(X + Y) = G(X) + G(Y).$$

U radu [**15**] tvrdi se da je opšte neprekidno, ograničeno, merljivo itd. rešenje jednačine (2.2.19) dato formulom

(2.2.20) $$G(X) = A \cdot X \cdot B,$$

gde je A proizvoljna konstantna matrica reda $(m,\ n)$ i B proizvoljna konstantna matrica reda $(n,\ s)$.

Funkcija (2.2.20) jeste rešenje jednačine (2.2.19), međutim to nije opšte merljivo rešenje. Opšte merljivo rešenje dato je formulom (videti: [**16**]):

(2.2.21) $$G(X) = \sum_{i,\,j=1}^{n} K_{ij} x_{ij},$$

gde su K_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ proizvoljne konstantne matrice reda $(m,\ s)$ i x_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ elementi matrice $\| x_{ij} \| = X$.

Sada, koristeći (2.2.21) i (2 2.17), dobijamo da je

$$F(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}, \tag{2.2.22}$$

pri čemu su $z_{ij}\,(i, j=1, \ldots, n)$ elementi matrice $\| z_{ij} \| = Z = X \cdot Y$.

Kako je, na osnovu (2.2.12),

$$F_2(X, Y)=F(X, Y)+A_2, \quad F_2(X, -Y)=-F(X, Y)+A_2,$$

to na osnovu (2.2.22), (2.2.4) i (2.2.10) nalazimo da je

$$\begin{aligned} F_0(X, Y) &= -\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_0, \\ F_1(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_1, \\ F_2(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_2, \\ F_3(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_3, \\ F_4(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_4, \\ F_5(X, Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_5. \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Obrnuto tvrđenje može se proveriti direktnom zamenom funkcija (2.2.23) u jednačini (2.2.1).

Time je teorema 2.2.1 dokazana.

2.3. Funkcionalna jednačina L_3

Posmatrajmo funkcionalnu jednačinu

$$\begin{aligned} & F_0(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, x_{nn}), \Delta(y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{nn})) \\ & = F_1(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, y_{1n}), \Delta(x_{n1}, y_{22}, \ldots, y_{nn})) \\ & + F_2(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, y_{2n}), \Delta(y_{11}, x_{n2}, y_{33}, \ldots, y_{nn})) \\ & + \cdots \\ & + F_i(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, y_{in}), \Delta(y_{11}, \ldots, y_{i-1,\,i-1}, x_{ni}, \\ & \qquad y_{i+1,\,i+1}, \ldots, y_{nn})) \\ & + \cdots \\ & + F_n(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, y_{nn}), \Delta(_{11}, \ldots, y_{n-1,\,n-1}, x_{nn})), \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

koju ćemo zvati: *funkcionalna jednačina* $\mathbf{L}_3$.

Sve funkcije koje se ovde pojavljuju su realne funkcije realnih promenljivih. Za funkcionalnu jednačinu $\mathbf{L}_3$ dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 2.3.1. — *Opšte neprekidno rešenje jednačine* $\mathbf{L}_3$ *dato je formulama*

$$F_0(u, v) = Cuv + \sum_{i=1}^{n} A_i, \tag{2.3.2}$$

$$F_r(u, v) = Cuv + A_r \quad (r = 1, \ldots, n), \tag{2.3.3}$$

gde su A_i $(i = 1, \ldots, n)$ *i* C *proizvoljne realne konstante.*

Dokaz. Ako sve promenljive x_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, y_{rk} $(r, k = 1, \ldots, n)$ osim $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}$ i $y_{i+1,1}, y_{i+2,2}, \ldots, y_{i+n,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$, zamenimo sa 0 i ako promenljive $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}$ i $y_{i+1,1}, y_{i+2,2}, \ldots, y_{i+n,n}$ $(i = 1, \ldots, n)$ izaberemo tako da bude

$$x_{11}\, x_{22} \cdots x_{n-1,\, n-1} = x,\ x_{nn} = 1;\ y_{i+n,\, n} = 1,\ y_{i+1,1}\, y_{i+2,2} \cdots y_{i+n-1,\, n-1} = (-1)^s y$$

(s— broj inverzija permutacije $(i+1, i+2, \ldots, i+n)$), iz jednačine (2.3.1) dobija se

$$F_0(x, y) = F_i(x, y) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_j \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{2.3.4}$$

pri čemu je uvedena oznaka $A_i = F_i(0, 0)$.

Ako se funkcije F_r $(r = 1, \ldots, n)$, određene sa (2.3.4), zamene u jednačini (2.3.1), dobija se

$$\begin{aligned} &F_0(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\, n-1}, x_{nn}), \Delta(y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{nn})) \\ &= F_0(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\, n-1}, y_{1n}), \Delta(x_{n1}, y_{22}, \ldots, y_{nn})) \\ &+ F_0(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\, n-1}, y_{2n}), \Delta(y_{11}, x_{n2}, y_{33}, \ldots, y_{nn})) \\ &+ \cdots \\ &+ F_0(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\, n-1}, y_{in}), \Delta(y_{11}, \ldots, y_{i-1,\, i-1}, x_{ni}, \\ &\qquad y_{i+1,\, i+1}, \ldots, y_{nn})) \\ &+ \cdots \\ &+ F_0(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\, n-1}, y_{nn}), \Delta(y_{11}, \ldots, y_{n-1,\, n-1}, x_{nn})) \\ &-(n-1) \sum_{i=1}^{n} A_i. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Ako se uvede nova funkcija F smenom

$$F(u, v) = F_0(u, v) - \sum_{i=1}^{n} A_i, \tag{2.3.6}$$

jednačina (2.3.5) svodi se na

$$\begin{aligned} &F(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\, n-1}, x_{nn}), \Delta(y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{nn})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\, n-1}, y_{in}), \Delta(y_{11}, \ldots, y_{i-1,\, i-1}, x_{ni}, \\ &\qquad y_{i+1,\, i+1}, \ldots, y_{nn})). \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Ako se u jednačini (2.3.7) sve promenljive x_{ij}, y_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ zamene sa u, dobija se (videti: [17]) $F(0, 0)=0$.

Za $x_{ii}=1$ $(i=1, \ldots, n-1)$, $x_{nn}=u$, $x_{ij}=0$ $(i\neq j)$, $y_{rk}=0$ $(r, k=1, \ldots, n)$, jednačina (2.3.7) svodi se na $F(u, 0)=0$.

Međutim, za $y_{n-i,\, n-i}=1$ $(i=1, \ldots, n-1)$, $y_{nn}=u$, $y_{ij}=0$, $(i\neq j)$, $x_{rk}=0$ $(r,\ k=1, \ldots, n)$, jednačina (2.3.7) svodi se na $F(0, u)=0$.

Najzad, stavljajući $x_{ii}=1$ $(i=1, \ldots n-2)$, $y_{n-j+1,j}=1$ $(j=1, \ldots n-2)$, $x_{n-1,n-1}=X_1$, $x_{n-1,n}=Y_1$, $x_{n,n-1}=X_2$, $x_{nn}=Y_2$, $y_{1,n-1}=X_3$, $y_{1n}=Y_3$, $y_{2,n-1}=X_4$, $y_{2n}=Y_4$, i zamenjujući sve ostale promenljive sa nulom, na osnovu prethodnih osobina funkcije F, jednačina (2.3.7) dobija oblik koji glasi

$$\begin{aligned} &F(X_1 Y_2-X_2 Y_1, X_3 Y_4-X_4 Y_3) \\ &\quad = F(X_1 Y_3-X_3 Y_1,\ X_2 Y_4-X_4 Y_2)+F(X_1 Y_4-X_4 Y_1,\ X_3 Y_2-X_2 Y_3). \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Stavljajući u poslednjoj jednačini $X_1=u$, $X_2=Y_3=1$, $Y_1=Y_2=0$, $Y_4=v$, i koristeći $F(0, u)=0$, dobijamo

$$F(u,\ v)=-F(uv,\ -1)=G(uv). \tag{2.3.9}$$

Uvodeći u (2.3.8) funkciju G određenu sa (2.3.9) i stavljajući zatim $X_1=Y_2=0$, $X_2=X_3=X_4=Y_1=1$, $Y_3=x$, $Y_4=-y$, dobija se za funkciju G CAUCHYEVA funkcionalna jednačina

$$G(x+y)=G(x)+G(y),$$

čije je opšte neprekidno rešenje

$$G(t)=Ct, \tag{2.3.10}$$

gde je C proizvoljna realna konstanta.

Na osnovu (2.3.10), (2.3.9), (2.3.6) i (2.3.4), dobijamo

$$\begin{aligned} &F_i(u, v)=Cuv+A_i \quad (i=1, \ldots, n), \\ &F_0(u, v)=Cuv+\sum_{r=1}^{n} A_r, \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

gde su A_j $(j=1, \ldots, n)$ i C proizvoljne realne konstante.

Posmatrajmo sada identitet

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & & x_{n-1,n} & 0 & 0 & & 0 \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} & x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \\ y_{11} & y_{12} & & y_{1n} & y_{11} & y_{12} & & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & & y_{2n} & y_{21} & y_{22} & & y_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} & y_{n1} & y_{n2} & & y_{nn} \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{2.3.12}$$

Ako se determinanta identiteta (2.3.12) razvije po LAPLACEOVOM pravilu i tako dobijenom identitetu doda i oduzme zbir $\sum_{i=1}^{n} A_i$, zaključuje se da su funkcije (2.3.11) zaista rečenje jednačine $\mathbf{L}_3$.

Ovim je teorema 2.3.1 u potpunosti dokazana.

2.4. Funkcionalna jednačina $\mathbf{L}_4$

Neka je

$$\Delta(x_{i1}, x_{i+1,2}, \ldots, x_{i+k-2,k-1}, x_{rk}, x_{i+k,k+1}, \ldots, x_{n+i-1,n})$$

$$= \begin{vmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} \\ x_{i+1,1} & x_{i+1,2} & & x_{i+1,n} \\ \vdots & & & \\ x_{i+k-2,1} & x_{i+k-2,2} & & x_{i+k-2,n} \\ x_{r1} & x_{r2} & & x_{rn} \\ x_{i+k,1} & x_{i+k,2} & & x_{i+k,n} \\ \vdots & & & \\ x_{n+i-1,1} & x_{n+i-1,2} & & x_{n+i-1,n} \end{vmatrix},$$

i θ_{ij} operator koji je definisan na sledeći način:

$$\theta_{n,rn+j} F(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta(x_{rn+1,1}, \ldots, x_{rn+j-1,j-1},$$
$$x_{rn+j,j}, x_{rn+j+1,j+1}, \ldots, x_{(r+1)n,n}), \ldots, \Delta(x_{(m-1)n+1,1}, \ldots, x_{mn,n}))$$
$$= F(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,n-1}, x_{rn+j,n}), \ldots, \Delta(x_{rn+1,1}, \ldots, x_{rn+j-1,j-1},$$
$$x_{nj}, x_{rn+j+1,j+1}, \ldots, x_{(r+1)n,n}), \ldots, \Delta(x_{(m-1)n+1,1}, \ldots, x_{mn,n})).$$

Funkcionalnu jednačinu

$$\alpha F(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta(x_{(m-1)n+1,1}, \ldots, x_{mn,n})) \tag{2.4.1}$$
$$= \sum_{r=n+1}^{mn} \theta_{n,r} F(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta(x_{(m-1)n+1,1}, \ldots, x_{mn,n}))$$

($F: R^m \to R$; $\alpha \in R$), zvaćemo: *fukcionalna jednačina* $\mathbf{L}_4$.

Dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 2.4.1. — *Opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* $\mathbf{L}_4$, *u slučaju* $\alpha = m-1$, *je*

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m) = Cu_1 u_2 \ldots u_m. \tag{2.4.2}$$

Ako je $\alpha = n(m-1)$, *njeno opšte rešenje je*

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m) = const. \tag{2.4.3}$$

U svim ostalim slučajevima opšte rešenje je

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m) \equiv 0. \tag{2.4.4}$$

Konstanta C, koja se pojavljuje u opštem rešenju, je proizvoljna realna konstanta.

Dokaz. U slučaju $\alpha = m-1$, teorema 2.4.1 dokazana je u članku [**18**]. Zato ćemo odmah preći na dokaz teoreme 2.4.1 za $\alpha = n(m-1)$. Lako se proverava da je konstanta jedno rešenje jednačine (2.4.1) ako je $\alpha = n(m-1)$. Sada ćemo dokazati obrnuto, tj. da je svako rešenje jednačine (2.4.1) za $\alpha = n(m-1)$, konstanta.

Ako stavimo $x_{ni+1,1} = u_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, $x_{nk+j,j} = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1;$ $j = 2, 3, \ldots, n)$, jednačina (2.4.1) svodi se na

$$n(m-1) F(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (m-1) F(u_1, u_2, \ldots, u_m) + (n-1)(m-1) F(0, 0, \ldots, 0),$$

odakle

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m) = F(0, 0, \ldots, 0) = \text{const}.$$

Za $x_{ij} = u$ $(i = 1, \ldots, mn;\ j = 1, \ldots, n)$, iz jednačine (2.4.1), dobijamo

$$n(m-1) F(0, 0, \ldots, 0) = n(m-1) F(0, 0, \ldots, 0),$$

odakle zaključujemo da $F(0, 0, \ldots, 0)$ može biti i različito od nule.

Time je teorema 2.4.1 dokazana i za $\alpha = n(m-1)$.

Pređimo sada na slučaj kada je $\alpha \neq m-1$ i $\alpha \neq n(m-1)$.

Stavljajući $x_{ij} = u$ $(i = 1, \ldots, mn;\ j = 1, \ldots, n)$, iz jednačine (2.4.1) dobijamo

$$\alpha F(0, 0, \ldots, 0) = n(m-1) F(0, 0, \ldots, 0).$$

Kako je $\alpha \neq n(m-1)$, zaključujemo da mora biti

$$F(0, 0, \ldots, 0) = 0. \tag{2.4.5}$$

Ako stavimo $x_{ni+1,1} = u_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, $x_{nk+j,j} = 1$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1;$ $j = 2, 3, \ldots, n)$, jednačina (2.4.1) svodi se na

$$[\alpha-(m-1)] F(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (n-1)(m-1) F(0, 0, \ldots, 0). \tag{2.4.6}$$

Kako je $\alpha \neq m-1$, na osnovu (2.4.5) i (2.4.6) dobijamo

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m) \equiv 0.$$

Ovim je teorema 2.4.1 dokazana i za $\alpha \neq m-1$ i $\alpha \neq n(m-1)$.

Prema tome, teorema 2.4.1 je u potpunosti dokazana.

3. GENERALIZACIJE NEKIH REZULTATA D. S. MITRINOVIĆA, S. B. PREŠIĆA I P. M. VASIĆA

3.1. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_1$

Posmatrajmo funkcionalnu jednačinu

(3.1.1) $$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}\ x_2) + \cdots + F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}\ x_{2n-1}) = 0$$

koja je ciklična po promenljivim $x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$.

Funkcionalnu jednačinu (3.1.1), gde je

(3.1.2) $$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) &= \{f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4) + \cdots + f(x_{2k-1}, x_{2k})\} \\ &\times \{f(x_{2k+1}, x_{2n}) + f(x_{2k+2}, x_{2n-1}) + \cdots + f(x_{k+n}, x_{k+n+1})\} \end{aligned}$$

zvaćemo: *jednačina* **F**.

Za jednačinu **F**, D. S. Mitrinović, S. B. Prešić i P. M. Vasić dokazali su sledeći rezultat (videti: [**1**]):

Teorema 3.1.1. — *Opšte rešenje jednačine* **F** *je*

(3.1.3) $$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u) \qquad za\ n = 2,$$

(3.1.4) $$f(u, v) = g(u) - g(v) \qquad za\ n > 2,$$

gde su $g, h\colon R \to R$ proizvoljne funkcije.

Funkcionalnu jednačinu (3.1.1), gde je

(3.1.5) $$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) &= \{f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4) + \cdots + f(x_{2k-1}, x_{2k})\} \\ &\times \sum_{j=0}^{n-k-1} A_j f(x_{2k+j+1}, x_{2n-j}), \end{aligned}$$

$f\colon C^2 \to C$; $A_j \in C$ $(j = 0, 1, \ldots, n-k-1)$ takvi da je

(3.1.6) $$\sum_{j=0}^{n-k-1} A_j \neq 0,$$

zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_1$.

Za jednačinu $\mathbf{F}_1$ dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 3.1.2. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* $\mathbf{F}_1$, *u slučaju* $n>2$, *dato je formulama*

$$f(u, v)=g(u)-g(v); \tag{3.1.7}$$

ili

$$f(u, v)=g(u)\,h(v)-g(v)\,h(u), \tag{3.1.8}$$

gde su g, h: $C \to C$ *proizvoljne funkcije.*

Dokaz. D. S. Mitrinović, S. B. Prešić i P. M. Vasić (videti: **[1]**, **[5]** i [7]) dokazali su da je funkcija (3.1.7) jedno rešenje jednačine $\mathbf{F}_1$.

Sada ćemo dokazati obrnuto, tj. da svako rešenje jednačine $\mathbf{F}_1$ ima oblik (3.1.7) ili (3.1.8).

Ako se u jednačini $\mathbf{F}_1$ sve promenljive x_i $(i=1, 2, \ldots, 2n)$ zamene sa u, na osnovu (3.1.6), dobija se

$$f(u, u)=0. \tag{3.1.9}$$

Za svako netrivijalno rešenje jednačine $\mathbf{F}_1$ postoji bar jedan par brojeva a, b takvih da je

$$f(a, b)\neq 0. \tag{3.1.10}$$

S obzirom na to da je $n>2$, razlikovaćemo sledeća tri slučaja:

$$1^\circ\quad k=1, \qquad 2^\circ\quad 1<k<n-1, \qquad 3^\circ\quad k=n-1.$$

Prvi slučaj: $k=1$. Na osnovu uslova (3.1.6) postoji bar jedan koeficijent $A_0, A_1, \ldots, A_r, \ldots, A_{n-2}$ koji je različit od nule. Neka je $A_r(\neq 0)$ koeficijent čiji je indeks najmanji.

Ako zmenimo, u slučaju kada je $0\leqslant 2r\leqslant n-3$, sve promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ osim x_2, x_{r+3}, x_{2n-r} sa a, i ako stavimo $x_2=b$, $x_{r+3}=u$, $x_{2n-r}=v$, jednačina $\mathbf{F}_1$ svodi se na jednačinu

$$\begin{aligned} A_r[f(a, b)\,f(u, v)+f(a, b)\,f(a, u)+f(b, a)\,f(a, v)]&\\ +A_{2r+1}[f(a, u)\,f(a, v)+f(u, a)\,f(a, v)]&=0. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Ako u (3.1.11) stavimo $v=a$ dobijamo $f(a, u)=-f(u, a)$, pa se na osnovu toga (3.1.11) svodi na

$$f(u, v)=g(u)-g(v),$$

gde smo stavili $g(u)=f(u, a)$.

Međutim, ako u jednačini $\mathbf{F}_1$, u slučaju kada je $2r>n-3$ i $3r\neq 2n-4$, sve promenljive $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ osim x_2, x_{r+3}, x_{2n-r} zamenimo sa a, i ako stavimo $x_2=b$, $x_{r+3}=u$, $x_{2n-r}=v$, dobijemo jednačinu

$$\begin{aligned} A_r[f(a, b)\,f(u, v)+f(a, b)\,f(a, u)+f(b, a)\,f(a, v)]&\\ +A_{2n-2r-4}[f(a, u)\,f(a, v)+f(a, u)\,f(v, a)]&=0. \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Za $v=a$ (3.1.12) daje $f(a, u)=-f(u, a)$ pa na osnovu toga (3.1.12) postaje

$$f(u, v)=g(u)-g(v),$$

gde je $g(u)=f(u, a)$.

Neka je sada $3r=2n-4$ i neka pored koeficijenata A_r, koji je različit od nule, postoji i koeficijent $A_s(s>r)$ koji je takođe različit od nule. Tada, stavljajući $x_2=b$, $x_{s+3}=u$, $x_{2n-s}=v$, i zamenjujući sve ostale promenljive sa a, jednačina $\mathbf{F}_1$ postaje

$$\text{(3.1.13)} \qquad A_s[f(a, b)\, f(u, v)+f(a, b)\, f(a, u)+f(b, a)\, f(a, v)]$$
$$+A_{2n-2s-4}[f(a, u)\, f(a, v)+f(a, u)\, f(v, a)]=0.$$

Stavljajući $v=a$ iz (3.1.13) dobijamo $f(a, u)=-f(u, a)$ i na osnovu toga (3.1.13) se svodi na

$$f(u, v)=g(u)-g(v),$$

gde smo stavili $g(u)=f(u, a)$.

Međutim, ako su svi koeficijenti $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ osim A_r jednaki nuli, tada se, zamenjujući u jednačini $\mathbf{F}_1$ sve promenljive $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ osim x_2, x_{r+3}, x_{2n-r} sa a i stavljajući $x_2=b$, $x_{r+3}=u$, $x_{2n-r}=v$, jednačina $\mathbf{F}_1$ svodi na

$$\text{(3.1.14)} \qquad A_r[f(a, b)\, f(u, v)+f(a, u)\, f(v, b)+f(a, v)\, f(b, u)]=0.$$

Ako se u (3.1.14) stavi $v=b$ biće

$$\text{(3.1.15)} \qquad f(b, u)=-f(u, b).$$

Na osnovu (3.1.15) iz (3.1.14) dobija se

$$f(u, v)=g(u)\, h(v)-g(v)\, h(u),$$

pri čemu je $g(u)=f(a, u)$, $h(u)=f(b, u)/f(a, b)$.

Drugi slučaj: $1<k<n-1$. U ovom slučaju iz uslova (3.1.6) zaključujemo da bar jedan od koeficijenata $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, A_{n-k-1}$ mora biti različit od nule. Neka je $A_r(\neq 0)$, kao i u prethodnom slučaju, koeficijenat čiji je indeks najmanji. Razlikovaćemo sledeće tri mogućnosti

$$a)\ r=0, \qquad b)\ 0<r<n-k-1, \qquad c)\ r=n-k-1.$$

U slučaju kada je $r=0$ (tj. $A_0\neq 0$), ako se stavi $x_4=x_5=\cdots=x_{2n}=x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=u$, iz jednačine $\mathbf{F}_1$ dobija se $f(a, u)=-f(u, a)$. Stavljajući $x_5=x_6=\cdots=x_{2n}=x_1=a$, $x_2=u$, $x_3=v$, $x_4=b$, jednačina $\mathbf{F}_1$ dobija oblik koji glasi

$$\text{(3.1.16)} \qquad A_0[f(b, a)\, f(u, v)+f(b, a)\, f(a, u)+f(a, b)\, f(a, v)]$$
$$+A_0[f(a, u)\, f(a, v)+f(a, u)\, f(v, a)]$$
$$+A_1[f(b, a)\, f(a\ u)+f(a, b)\, f(a, u)]=0.$$

Na osnovu $f(a, u)=-f(u, a)$, (3.1.16) postaje

$$f(u, v)=g(u)-g(v),$$

gde je $g(u)=f(u, a)$.

Zamenjujući, u slučaju kada je $0<r<n-k-1$, sve promenljive $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ osim x_2 i x_{r+3} sa a i stavljajući $x_2=b$, $x_{r+3}=u$, jednačina $\mathbf{F}_1$ svodi se na

$$A_r f(a, b)\, [f(a, u)+f(u, a)]=0,$$

odakle

$$f(a, u) = -f(u, a). \tag{3.1.17}$$

Ako se pak sve promenljive $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ osim x_2, x_3, x_{r+4} zamene sa a i ako se stavi $x_2 = u$, $x_3 = v$, $x_{r+4} = b$, jednačina $\mathbf{F}_1$ dobija oblik koji glasi

$$\begin{aligned} A_{r+1}[f(a, b) f(a, u) + f(b, a) f(a, u)] \\ + A_r[f(b, a) f(u, v) + f(b, a) f(a, u) + f(a, b) f(a, v)] = 0. \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Na osnovu (3.1.17) i (3.1.18) dobija se

$$f(u, v) = g(u) - g(v),$$

pri čemu je uvedena oznaka $g(u) = f(u, a)$.

Najzad, u slučaju $r = n - k - 1$, stavljajući $x_2 = b$, $x_{n-k+3} = v$, $x_{n-k+2} = u$ i zamenjujući sve ostale promenljive sa a, jednačina $\mathbf{F}_1$ svodi se na jednačinu

$$\begin{aligned} A_{n-k-1} f(a, b) [f(u, v) + f(a, u) + f(v, a)] \\ + A_{n-k-1} f(b, a) [f(a, v) + f(v, a)] = 0. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Iz (3.1.19) za $v = a$ dobija se $f(a, u) = -f(u, a)$, pa na osnovu toga (3.1.19) postaje

$$f(u, v) = g(u) - g(v),$$

pri čemu je $g(u) = f(u, a)$.

Treći slučaj: $k = n - 1$. U ovom slučaju imamo

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\ & \quad = \{f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4) + \cdots + f(x_{2n-3}, x_{2n-2})\} A_0 f(x_{2n-1}, x_{2n}). \end{aligned}$$

Iz uslova (3.1.6) sleduje $A_0 \neq 0$. Jednačina $\mathbf{F}_1$ može se tada podeliti sa A_0, pa se u tom slučaju dobija funkcionalna jednačina čije je opšte rešenje (videti: [**2**]):

$$f(u, v) = g(u) - g(v),$$

gde je g proizvoljna funkcija.

Prema tome teorema 3.1.2 je dokazana.

Primedba. Ako je $\sum_{j=0}^{n-k-1} A_j = 0$, funkcija (3.1.7) je rešenje jednačine $\mathbf{F}_1$, ali ostaje otvoreno pitanje opštosti tog rešenja.

3.2. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_2$

Funkcionalnu jednačinu (3.1.1), gde je

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\ & \quad = \{f(x_1, x_2) - f(x_4, x_3) + \cdots - f(x_{2k-2}, x_{2k-3}) + f(x_{2k-1}, x_{2k})\} \\ & \quad \times \sum_{j=0}^{n-k-1} A_j f(x_{2k+j+1}, x_{2n-j}) \qquad \text{za } k \text{ neparno,} \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$$= \{f(x_1, x_2) - f(x_4, x_3) + \cdots + f(x_{2k-3}, x_{2k-2}) - f(x_{2k}, x_{2k-1})\}$$

$$\times \sum_{j=0}^{n-k-1} A_j f(x_{2k+j+1}, x_{2n-j}) \qquad \text{za } k \text{ parno,}$$

f: $C^2 \to C$; $A_j \in C$ $(j = 0, 1, \ldots, n-k-1)$ takvi da je

$$\sum_{j=0}^{n-k-1} A_j \neq 0, \tag{3.2.2}$$

zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_2$.

Teorema 3.2.1. — *Opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_2$ *u slučaju* $k = 2m-1$ *dato je formulama*

$$f(u, v) = g(u) - g(v), \tag{3.2.3}$$

ili

$$f(u\ v) = g(u)\,h(v) - g(v)\,h(u). \tag{3.2.4}$$

U slučaju $k = 2m$ *opšte rešenje ove jednačine je jedna konstanta ili funkcija* (3.2.3).

Funkcija g *i* h: $C \to C$, *koje se pojavljuju u opštim rešenjima su proizvoljne funkcije.*

Dokaz. Potražimo prvo opšte rešenje jednačine $\mathbf{F}_2$ u slučaju $k = 2m-1$. Stavljajući $x_i = u$ $(i = 1, \ldots, 2n)$, iz jednačine $\mathbf{F}_2$ dobijamo

$$f(u, u) = 0. \tag{3.2.5}$$

Za $x_1 = x_{2n} = u$, $x_j = v$ $(j = 2, \ldots, 2n-1)$, na osnovu (3.2.5) jednačina $\mathbf{F}_2$ svodi se na

$$\sum_{j=0}^{n-k-1} A_j [f^2(u, v) + f(u, v) f(v, u)] = 0, \tag{3.2.6}$$

ili, na osnovu uslova (3.2.2),

$$f^2(u, v) + f(u, v) f(v, u) = 0. \tag{3.2.7}$$

Permutovanjem u i v, poslednja jednakost postaje

$$f^2(v, u) + f(u, v) f(v, u) = 0. \tag{3.2.8}$$

Sabiranjem (3.2.7) i (3.2.8) dolazimo do

$$[f(u, v) + f(v, u)]^2 = 0,$$

tj.

$$f(v, u) = -f(u, v). \tag{3.2.9}$$

Koristeći se relacijom (3.2.9), jednačinu $\mathbf{F}_2$ možemo svesti na jednačinu $\mathbf{F}_1$, čije je opšte rešenje, prema teoremi 3.1.2, dato formulama

$$f(u, v) = g(u) - g(v), \tag{3.2.10}$$

ili

$$f(u, v) = g(u)\,h(v) - g(v)\,h(u). \tag{3.2.11}$$

Budući da funkcije (3.2.10) i (3.2.11) zadovoljavaju jednačinu $\mathbf{F}_2$ (proverava se kao u slučaju jednačine $\mathbf{F}_1$), teorema 3.2.1 je dokazana za slučaj $k=2m-1$.

Sada ćemo preći na dokaz teoreme 3.2.1 za slučaj $k=2m$.

Sve funkcije f: $C^2 \to C$ možemo podeliti na dve klase:

Klasa K_1 svih funkcija f za koje važi $f(u,u) \equiv 0$;

Klasa K_2 svih funkcija f za koje važi $f(u,u) \not\equiv 0$.

Potražimo prvo opšte rešenje jednačine $\mathbf{F}_2$ za slučaj $k=2m$ u klasi funkcija K_1.

Stavljajući $x_1=x_{2n}=u$, $x_j=v\,(j=2, \ldots, 2n-1)$, na osnovu pretpostavke $f(u,u) \equiv 0$, iz jednačine $\mathbf{F}_2$ dobijamo relaciju (3.2.6), odakle, na osnovu uslova (3.2.2), dolazimo do (3.2.7). Permutujući promenljive u i v, iz (3.2.7) dobijamo (3.2.8). Sabiranjem (3.2.7) i (3.2.8) dobijamo (3.2.9), tako da se u ovom slučaja jednačina $\mathbf{F}_2$ svodi na jednačinu $\mathbf{F}_1$. Prema tome, opšte rešenje jednačine $\mathbf{F}_2$ za slučaj $k=2m$ u klasi funkcija K_1 dato je formulom (3.2.10).

Potražimo sada opšte rešenje jednačine $\mathbf{F}_2$ u klasi funkcija K_2. Budući da je tada $f(u,u) \not\equiv 0$, postoji bar jedan broj $c\,(c \in C)$, takav da je $f(c,c) \neq 0$.

Za $x_1=u$, $x_i=c$ $(i=2, \ldots, 2n)$, jednačina $\mathbf{F}_2$ svodi se na

$$f(u, c)=\alpha, \tag{3.2.12}$$

gde smo stavili $f(c, c)=\alpha$.

Stavljajući $x_1=u$, $x_2=v$, $x_i=c$ $(i=3, \ldots, 2n)$ i koristeći (3.2.12), iz jednačine $\mathbf{F}_2$ dobijamo

$$\sum_{j=0}^{n-k-1} A_j f(c,c)\,[f(u,v)-f(c,v)]=0,$$

odakle, na osnovu uslova (3.2.2)

$$f(u,v)=f(c,v). \tag{3.2.13}$$

Ako se u (3.2.13) stavi $u=v$ dobija se $f(v,v)=f(c,v)$, što zajedno sa (3.2.13) daje

$$f(u,v)=f(v,v)=f(c,v). \tag{3.2.14}$$

Na osnovu uslova (3.2.2) među koeficijentima $A_0, A_1, \ldots, A_r, \ldots, A_{n-k-1}$ postoji bar jedan koji je različit od nule. Neka je $A_r\,(\neq 0)$ koeficijent čiji je indeks najmanji.

Ako u jednačini $\mathbf{F}_2$, sve promenljive $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ osim x_2 i x_{r+3} zamenimo sa c i ako stavimo $x_2=x_{r+3}=u$, na osnovu (3.2.12) i (3.2.14), dobijamo

$$A_r[f(c, u)-f(c, c)]^2=0,$$

odakle

$$f(c, u)=\alpha. \tag{3.2.15}$$

Na osnovu (3.2.15) iz (3.2.13) dobijamo

$$f(u, v)=\alpha. \tag{3.2.16}$$

Ovim je teorema 3.2.1 dokazana.

Primedba. Funkcije (3.2.3) i (3.2.16) su rešenja jednačine $\mathbf{F}_2$ i u slučaju kada je

$$\sum_{j=0}^{n-k-1} A_j = 0,$$

ali ostaje otvoreno pitanje opštosti tih rešenja.

3.3. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_3$

Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}$ ako je $n=2$ glasi

(3.3.1) $$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) = 0.$$

Njeno opšte rešenje prema teoremi 3.1.1 je (videti takođe: [**8**])

$$f(u, v) = H(u)\, K(v) - H(v)\, K(u).$$

Ovde ćemo dati jednu generalizaciju jednačine (3.3.1).

Funkcionalnu jednačinu

(3.3.2) $$f(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3) = 0$$

$f\colon C^2 \to C$, zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_3$.

Za jednačinu $\mathbf{F}_3$ dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 3.3.1. — *Opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_3$ *dato je formulama*

(3.3.3) $$f(u, v) = K_1(u)\, H_2(v) - K_2(u)\, H_1(v),$$

(3.3.4) $$g(u, v) = H_1(u)\, H_2(v) - H_1(v)\, H_2(u),$$

gde su $H_1, H_2, K_1, K_2\colon C \to C$ *proizvoljne funkcije.*

Dokaz. Trivijalno rešenje jednačine $\mathbf{F}_3$ sadržano je u formulama (3.3.3) i (3.3.4). Za svako netrivijalno rešenje postoje bar dva para brojeva (a, b) i (c, d) $(a, b, c, d \in C)$ takvi da je $f(a, b) \neq 0$ i $g(c, d) \neq 0$.

Ako u jednačini $\mathbf{F}_3$ stavimo $x_1 = a$, $x_2 = x_3 = x_4 = b$, dobijamo $f(a, b)\, g(b, b) = 0$, tj.

(3.3.5) $$g(b, b) = 0.$$

Stavljajući $x_1 = a$, $x_2 = x_3 = b$, $x_4 = u$, jednačina $\mathbf{F}_3$, na osnovu (3.3.5) svodi se na $g(b, u) + g(u, b) = 0$, odakle

(3.3.6) $$g(b, u) = -g(u, b).$$

Za $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = u$, $x_4 = v$, jednačina $\mathbf{F}_3$ postaje

(3.3.7) $$f(a, b)\, g(u, v) + f(a, u)\, g(v, b) + f(a, v)\, g(b, u) = 0.$$

Uvodeći oznake $f(a, u)/f(a, b) = H_1(u)$, $g(b, u) = H_2(u)$, na osnovu (3.3.6) i (3.3.7) dobijamo

(3.3.8) $$g(u, v) = H_1(u)\, H_2(v) - H_1(v)\, H_2(u).$$

Ako sada stavimo $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = c$, $x_4 = d$, iz jednačine $\mathbf{F}_3$, na osnovu (3.3.8), dobijamo

(3.3.9) $$f(u, v) = K_1(u)\, H_2(v) - H_1(v)\, K_2(u),$$

gde smo uveli oznake

$$K_1(u)=\frac{H_1(c)f(u,d)-H_1(d)f(u,c)}{g(c,d)},\quad K_2(u)=\frac{H_2(c)f(u,d)-H_2(d)f(u,c)}{g(c,d)}.$$

Ovim je teorema 3.3.1 dokazana.

3.4 Funkcionalna jednačina F_4

U radu [6] P. M. VASIĆ je dokazao da funkcionalna jednačina

$$\begin{aligned}&f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)f(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\ &\quad=f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1})f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\ &\quad+f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\ &\quad+\cdots\\ &\quad+f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n)\end{aligned}$$

ima opšte rešenje dato sa

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n)=\Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\}$$

gde su H_i $(i=1, \ldots, n)$: $C\to C$ proizvoljne funkcije.

U ovom odeljku daćemo jednu generalizaciju ovog rezultata P. M. VASIĆA.

Neka je $\theta_{i,j}$ operator koji vrši razmenu argumenata na i-tom i j-om mestu u funkciji F, tj. neka je

$$\begin{aligned}&\theta_{i,j}F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)\\ &\quad=F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Posmatrajmo funkcionalnu jednačinu

(3.4.1) $$\begin{aligned}&\alpha F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{kn})\\ &\quad=\sum_{r=n+1}^{kn}\theta_{n,r}F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{kn}),\end{aligned}$$

gde je

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{kn})=\prod_{i=0}^{k-1}f(x_{ni+1}, x_{ni+2}, \ldots, x_{ni+n})$$

(f: $C^n\to C$, α parametar iz C) koju ćemo zvati: *jednačina* F_4.

Za jednačinu F_4 nismo mogli da dobijemo opšte rešenje u slučaju $\alpha=r(k-1)$ $(r=2, \ldots, n-1)$. Rezultati koje smo dobili u vezi ove jednačine sadržani su u sledećoj teoremi.

Teorema 3.4.1. — *Opšte rešenje jednačine* F_4 *u slučaju* $\alpha=k-1$ *je*

(3.4.2) $$f(u_1, u_2, \ldots, u_n)=\Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\}.$$

Ako je $\alpha=n(k-1)$, *njeno opšte rešenje dato je sa*

(3.4.3) $$f(u_1, u_2, \ldots, u_n)=K(u_1)K(u_2)\cdots K(u_n);$$

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \equiv 0. \tag{3.4.4}$$

Za $\alpha \neq r(k-1)$ $(r=1, \ldots, n)$ *opšte rešenje je* (3.4.4).

Funkcije K, H_i $(i=1, \ldots, n)$: $C \to C$ *koje se pojavljuju u opštim rešenjima su proizvoljne funkcije.*

Dokaz. U slučaju $\alpha = k-1$, teorema 3.4.1 dokazana je u članku [9]. Zato ćemo odmah preći na dokaz teoreme 3.4.1 za $\alpha = n(k-1)$. Podelimo sve funkcije f: $C^n \to C$ na dve klase: Klasu K_1 u kojoj je $f(u, \ldots, u) \neq 0$ i klasu K_2 u kojoj je $f(u, \ldots, u, u) \equiv 0$.

Za funkcije iz klase K_1 postoji bar jedan broj $a (a \in C)$, takav da je $f(a, a, \ldots, a) \neq 0$.

Ako u jednačini $\mathbf{F}_4$ stavimo $x_{n+i} = u$ a ostale promenljive zamenimo sa a dobijamo

$$f(a, \ldots, a, u, a, \ldots, a) = f(a, a, \ldots, a, u). \tag{3.4.5}$$

Stavljajući $x_{n+i} = u$, $x_{n+j} = v$ $(j > i)$ i zamenjujući sve ostale promenljive sa a, iz jednačine $\mathbf{F}_4$, na osnovu (3.4.5), dobijamo

$$f(a, \ldots, a, u, \ldots, v, \ldots, a) = \frac{f(a, a, \ldots, a, u) f(a, a, \ldots, a, v)}{f(a, a, \ldots, a)}. \tag{3.4.6}$$

Pretpostavimo da je

$$f(a, \ldots, u_1, \ldots, a, u_2, \ldots, a, \ldots, u_k, a, \ldots, a) = \frac{\prod_{i=1}^{k} f(a, a, \ldots, a, u_i)}{f(a, a, \ldots, a)^{k-1}}. \tag{3.4.7}$$

Ako se stavi $x_{n+i_1} = u_1$, $x_{n+i_2} = u_2, \ldots, x_{n+i_k} = u_k$, $x_{n+i_{k+1}} = u_{k+1}$, i ako se ostale promenljive zamene sa a, jednačina $\mathbf{F}_4$ svodi se na

$$\begin{aligned} &kf(a, \ldots, a) f(a, \ldots, u_1, \ldots, a, u_2, \ldots, \ldots, u_k, a, \ldots, u_{k+1}, \ldots, a) \\ &= f(a, \ldots, a, u_1) f(a, \ldots, a, \ldots, u_2, \ldots, \ldots, u_k, \ldots, u_{k+1}, \ldots, a) \\ &+ f(a, \ldots, a, u_2) f(a, \ldots, u_1, \ldots, a, \ldots, \ldots, u_k, \ldots, u_{k+1}, \ldots, a) \\ &+ \cdots \\ &+ f(a, \ldots, a, u_{k+1}) f(a, \ldots, u_1, \ldots, u_2, \ldots, \ldots, u_k, \ldots, a, \ldots, a). \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke (3.4.7), iz (3.4.8) sleduje da je

$$f(a, \ldots, u_1, \ldots, u_2, \ldots, \ldots, u_k, \ldots, u_{k+1}, \ldots) = \frac{\prod_{i=1}^{k+1} f(a, a, \ldots, a, u_i)}{f(a, a, \ldots, a)^k}. \tag{3.4.9}$$

Prema tome dokazali smo matematičkom indukcijom da važi formula (3.4.9) za svako $k < n$.

Stavljajući $x_i=a$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $x_{n+j}=u_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ $x_{2n+s}=a$ $(s=1, \ldots, n(k-2))$, iz jednačine $\mathbf{F}_4$ dobija se

(3.4.10) $$nf(a, a, \ldots, a)f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$=f(a, \ldots, a, u_1)f(a, u_2, u_3, \ldots, u_n)$$
$$+f(a, \ldots, a, u_2)f(u_1, a, u_3, u_4, \ldots, u_n)$$
$$+\cdots$$
$$+f(a, \ldots, a, u_n)f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, a).$$

Na osnovn (3.4.9), (3.4.10) se svodi na

(3.4.11) $$f(u_1, u_2, \ldots, u_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n} f(a, a, \ldots, a, u_i)}{f(a, a, \ldots, a)^{n-1}}.$$

Uvodeći oznaku $f(a, \ldots, a, u)/\sqrt[n]{f(a, a, \ldots, a)^{n-1}}=K(u)$, dobijamo da funkcija f u slučaju $\alpha=n(k-1)$ zaista ima oblik (3.4.3).

Potražimo sada opšte rešenje funkcionalne jednačine $\mathbf{F}_4$ u klasi K_2. Dokazaćemo prvo sledeću lemu:

Lema 3.4.2. — *Ako je bar jedna od promenljivih* $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ *jednaka* u_n, *tada je*

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\equiv 0.$$

***Dokaz leme* 3.4.2.** Neka je $E_{n-1}=(1, 2, \ldots, n-1)$ i S_m jedan podskup skupa E_{n-1}, koji sadrži m elemenata $(1\leqslant m\leqslant n-1)$.

U klasi funkcija K_2 važi $f(u_n, u_n, \ldots, u_n)\equiv 0$.

Pretpostavimo da je

(3.4.12) $$f(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, u_n)=0,$$

gde je

$$v_i=u_n \qquad (i\in S_m),$$
$$=y_i \qquad (i\in E_{n-1}\setminus S_m).$$

Dokazaćemo da je tada i

(3.4.13) $$f(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, u_n)\equiv 0$$

gde je

$$w_i=u_n \qquad (i\in S_{m-1}),$$
$$=y_i \qquad (i\in E_{n-1}\setminus S_{m-1}).$$

Zamenjujući $x_{nm+i}=x_i$ $(m=0, 1, \ldots, k-1)$ u jednačini $\mathbf{F}_4$ i stavljajuć $x_i=w_i$, na osnovu pretpostavke (3.4.12) dobijamo

$$(k-1)(n-m)[f(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, u_n]^k=0,$$

odakle, budući da je $k\geqslant 2$, $m<n$, dobijamo (3.4.13). Prema tome, lema 3.4.2 je dokazana indukcijom.

Stavljajući $x_{nm+i} = u_i$ $(m=0, 1, \ldots, k-1)$ i vodeći računa o dokazanoj lemi, iz jednačine $\mathbf{F}_4$ dobijamo

$$(k-1)(n-1)[f(u_1, u_2, \ldots, u_n)]^k = 0.$$

Budući da je $k>1$ i $n>1$, odavde neposredno dobijamo da funkcija f u klasi funkcija K_2 ima oblik (3.4.4).

Lako se proverava direktnom zamenom u jednačini $\mathbf{F}_4$ da funkcije (3.4.3) i (3.4.4) zadovoljavaju jednačinu $\mathbf{F}_4$ u slučaju $\alpha = n(k-1)$.

Time je teorema dokazana i za slučaj $\alpha = n(k-1)$.

Pređimo sada na dokaz teoreme u slučaju $\alpha \neq r(k-1)$ $(r=1, \ldots, n)$. I u ovom slučaju važi lema 3.4.2.

Stavljajući $x_{nm+i} = x_i$ $(m=0, 1, \ldots, k-1)$ i vodeći računa o gore pomenutoj lemi, iz jednačine $\mathbf{F}_4$ dobijamo

$$[\alpha-(k-1)][f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^k = 0.$$

Kako je $\alpha \neq k-1$, odavde neposredno dobijamo tvrđenje teoreme za slučaj $\alpha \neq r(k-1)$ $(r=1, 2, \ldots, n)$.

Prema tome, teorema 3.4.1 je u potpunosti dokazana.

Primedba. Funkcija

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_s(u_s)\} \prod_{i=s+1}^{n} H_1(u_i), \tag{3.4.14}$$

gde je $s = n-r+1$, H_i $(i=1, \ldots, n-r+1)$ proizvoljne kompleksne funkcije, je rešenje jednačine $\mathbf{F}_4$ ako je $\alpha = r(k-1)$. Ali ostaje otvoreno pitanje opštosti ovog rešenja.

Ima jednačina čija su opšta rešenja data sa (3.4.14). Posmatrajmo funkcionalnu jednačinu

$$\begin{aligned} 2f(x_1, x_2, x_3)\,f(x_4, x_5, x_6) &= f(x_1, x_2, x_4)\,f(x_3, x_5, x_6) \\ &+ f(x_1, x_2, x_5)\,f(x_4, x_3, x_6) + f(x_1, x_2, x_6)\,f(x_4, x_5, x_3). \end{aligned} \tag{3.4.15}$$

Dokazaćemo da ova jednačina ima opšte rešenje oblika (3.4.14).

Za $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = u$, iz (3.4.15) dobija se $f(u, u, u) = 0$.

Ako se stavi $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = u$, $x_3 = x_6 = v$ jednačina (3.4.15) svodi se na

$$2f^2(u, u, v) = f^2(u, u, v),$$

odakle je

$$f(u, u, v) = 0.$$

Za svako netrivijalno rešenje jednačine (3.4.15) postoje bar tri kompleksna broja a, b, c takva da je $f(a, b, c) \neq 0$.

Stavljajući $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_4 = x_5 = c$, $x_3 = u$, $x_6 = v$, na osnovu prethodnih rezultata, iz (3.4.15) dobijamo

$$f(u, c, v) = -f(c, u, v).$$

Za $x_1=a,\ x_2=b,\ x_3=c,\ x_4=u,\ x_5=v,\ x_6=w$ imamo

$$2f(a,\ b,\ c)\,f(u,\ v,\ w)=f(a,\ b,\ u)\,f(c,\ v,\ w)-f(a,\ b,\ v)\,f(c,\ u,\ w)+f(a,\ b,\ w)\,f(u,\ v,\ c). \tag{3.4.16}$$

Ako se u (3.4.16) stavi $w=c$, dobija se

$$f(a,\ b,\ c)\,f(u,\ v,\ c)=f(a,\ b,\ u)\,f(c,\ v,\ c)-f(a,\ b,\ v)\,f(c,\ u,\ c).$$

Ako se pak stavi $u=c$, dobija se

$$f(a,\ b,\ c)\,f(c,\ v,\ w)=f(a,\ b,\ w)\,f(c,\ v,\ c),$$

pa na osnovu toga (3.4.16) postaje

$$f(u,\ v,\ w)=H_1(u)\,H_2(v)\,H_1(w)-H_1(v)\,H_2(u)\,H_1(w),$$

pri čemu su uvedene oznake

$$\frac{f(a,\ b,\ u)}{f(a,\ b,\ c)}=H_1(u),\quad f(c,\ u,\ c)=H_2(u).$$

Dakle, imamo

$$f(u,\ v,\ w)=\Delta\{H_1(u),\ H_2(v)\}\,H_1(w).$$

Isto tako za $r=n$ funkcija (3.4.14) svodi se na (3.4.3). Ako se uzme da je

$$\prod_{i=n+1}^{n} H_1(x_i)=1,$$

tada se (3.4.14), za $r=1$, svodi na (3.4.2).

Sve ovo sugerira da se postavi sledeća hipoteza:

Hipoteza 3.4.1. — *Opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_4$, *u slučaju* $\alpha=r(k-1)$ $(r=1,\ldots,n)$ *dato je formulom* (3.4.14).

4. NEKI SISTEMI KVADRATNIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

4.1. Sistem funkcionalnih jednačina S_1

Neka je

$$\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\
&\qquad = \{f(x_1, x_2)+f(x_3, x_4)+\cdots+f(x_{2k-1}, x_{2k})\} \\
&\qquad \times \{f(x_{2k+1}, x_{2n})+f(x_{2k+2}, x_{2n-1})+\cdots+f(x_{k+n}, x_{k+n+1})\}; \\
&G(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\
&\qquad = \{g(x_1, x_2)+g(x_3, x_4)+\cdots+g(x_{2k-1}, x_{2k})\} \\
&\qquad \times \{g(x_{2k+1}, x_{2n})+g(x_{2k+2}, x_{2n-1})+\cdots+g(x_{k+n}, x_{k+n+1})\}; \\
&H(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\
&\qquad = \{f(x_1, x_2)+f(x_3, x_4)+\cdots+f(x_{2k-1}, x_{2k})\} \\
&\qquad \times \{g(x_{2k+1}, x_{2n})+g(x_{2k+2}, x_{2n-1})+\cdots+g(x_{k+n}, x_{k+n+1})\}; \\
&K(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\
&\qquad = \{g(x_1, x_2)+g(x_3, x_4)+\cdots+g(x_{2k-1}, x_{2k})\} \\
&\qquad \times \{f(x_{2k+1}, x_{2n})+f(x_{2k+2}, x_{2n-1})+\cdots+f(x_{k+n}, x_{k+n+1})\};
\end{aligned}$$

gde su f, g: $R^2 \rightarrow R$, proizvoljne funkcije i $n > 2$.

Sistem funkcionalnih jednačina

$$\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})+F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots \\
&\quad +F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1})+\operatorname{sgn}\alpha\{G(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\
&\quad +G(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots+G(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1})\}=0, \\
&H(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})+H(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots \\
&\quad +H(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1})+K(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\
&\quad +K(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots+K(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1})=0,
\end{aligned}$$

gde je α realan broj, zvaćemo: *sistem* $\mathbf{S}_1$.

Za sistem $\mathbf{S}_1$ dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 4.1.1. — *Opšte rešenje sistema* $\mathbf{S}_1$ *dato je formulama*

$$f(u, v) = p(u) - p(v), \tag{4.1.1}$$

$$g(u, v) = q(u) - q(v), \tag{4.1.2}$$

gde su p *i* q *proizvoljne realne funkcije.*

Dokaz. Razlikovaćemo tri slučaja:

1° $\alpha < 0$, 2° $\alpha = 0$, 3° $\alpha > 0$.

Prvi slučaj: $\alpha < 0$. U ovom slučaju sistem $\mathbf{S}_1$ glasi

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) + F(x_1, x_3, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots \\ &\quad + F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1}) - G(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \\ &\quad - G(x_1, x_3, \ldots, x_{2n}, x_2) - \cdots - G(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1}) = 0, \\ &H(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) + H(x_1, x_3, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots \\ &\quad + H(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1}) + K(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \\ &\quad + K(x_1, x_3, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots + K(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1}) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Ako se u sistemu (4.1.3) promenljive x_i $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ zamene sa u, dobija se

$$f^2(u, u) - g^2(u, u) = 0, \ 2f(u, u)\, g(u, u) = 0,$$

odakle je

$$f(u, u) = 0; \ g(u, u) = 0. \tag{2.1.4}$$

Za svako netrivijalno rešenje sistema (4.1.3) postoji bar jedan par realnih brojeva a, b takvih da je $f(a, b) \neq 0$.

Neka je $k = 1$. Ako se izvrši supstitucija $x_5 = x_6 = \cdots = x_{2n} = x_1 = x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = u$, na osnovu (4.1.4) sistem (4.1.3) postaje

$$\begin{aligned} &f(a, b)\,[f(u, a) + f(a, u)] - g(a, b)\,[g(u, a) + g(a, u)] = 0, \\ &g(a, b)\,[f(u, a) + f(a, u)] + f(a, b)\,[g(u, a) + g(a, u)] = 0. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Kako je

$$f^2(a, b) + g^2(a, b) \neq 0,$$

iz (4.1.5) sleduje

$$f(a, u) = -f(u, a), \ g(a, u) = -g(u, a). \tag{4.1.6}$$

Stavljajući u sistemu (4.1.3) $x_5 = x_6 = \cdots = x_{2n} = x_1 = a$, $x_2 = v$, $x_3 = b$, $x_4 = u$ na osnovu (4.1.4) i (4.1.6), dobija se

$$\begin{aligned} &f(a, b)\,[f(u, v) - f(u, a) + f(v, a)] \\ &\qquad\qquad - g(a, b)\,[g(u, v) - g(u, a) + g(v, a)] = 0, \\ &g(a, b)\,[f(u, v) - f(u, a) + f(v, a)] \\ &\qquad\qquad + f(a, b)\,[g(u, v) - g(u, a) + g(v, a)] = 0, \end{aligned}$$

odakle

$$f(u, v)-f(u, a)+f(v, a)=0,$$
$$g(u, v)-g(u, a)+g(v, a)=0,$$

tj.

(4.1.7)
$$f(u, v)=p(u)-p(v),$$
$$g(u, v)=q(u)-q(v),$$

gde su uvedene oznake $p(u)=f(u, a)$, $q(u)=g(u, a)$.

Posmatrajmo sada slučaj kada je $1<k<n-1$. Za $x_4=x_5=\cdots=x_{2n}=$ $=x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=u$, sistem (4.1.3) postaje

$$f(a, b)[f(a, u)+f(u, a)]-g(a, b)[g(a, u)+g(u, a)]=0,$$
$$g(a, b)[f(a, u)+f(u, a)]+f(a, b)[g(a, u)+g(u, a)]=0,$$

tj.

(4.1.8)
$$f(a, u)=-f(u, a), \; g(a, u)=-g(u, a).$$

Stavljajući $x_5=x_6=\cdots=x_{2n}=x_1=a$, $x_2=u$, $x_3=v$, $x_4=b$, na osnovu (4.1.4) i (4.1.8) sistem (4.1.3) dobija sledeći oblik

(4.1.9)
$$f(a, b)[f(u, v)-f(u, a)+f(v, a)]$$
$$-g(a, b)[g(u, v)-g(u, a)+g(v, a)]=0,$$
$$g(a, b)[fu, v)-f(u, a)+f(v, a)]$$
$$+f(a, b)[g(u, v)-g(u, a)+g(v, a)]=0.$$

Iz (4.1.9), zbog $f^2(a, b)+g^2(a, b)\neq 0$, dobijamo

(4.1.10)
$$f(u, v)=p(u)-p(v),$$
$$g(u, v)=q(u)-q(v),$$

pri čemu je $p(u)=f(u, a)$, $q(u)=g(u, a)$.

Najzad, posmatrajmo slučaj kada je $k=n-1$. Ako sve promenljive x_1, $x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$, osim x_2 i x_{2n}, zamenimo sa a, i ako stavimo $x_2=u$, $x_{2n}=b$, sistem (4.1.3) svodi se na

(4.1.11)
$$f(a, b)[f(a, u)+f(u, a)]-g(a, b)[g(a, u)+g(u, a)\}=0,$$
$$g(a, b)[f(a, u)+f(u, a)]+f(a, b)[g(a, u)+g(u, a)]=0.$$

Iz (4.1.11) imamo

(4.1.12)
$$f(a, u)=-f(u, a), \; g(a, u)=-g(u, a).$$

Ako se u sistemu (4.1.3) izvrži supstitucija $x_3=x_4=\cdots=x_{2n-2}=x_1=a$, $x_2=v$, $x_{2n-1}=b$, $x_{2n}=u$, na osnovu (4.1.12), dobija se

(4.1.13)
$$f(a, b)[f(u, v)-f(u, a)+f(v, a)]$$
$$-g(a, b)[g(u, v)-g(u, a)+g(v, a)]=0,$$
$$g(a, b)[f(u, v)-f(u, a)+f(v, a)]$$
$$+f(a, b)[g(u, v)-g(u, a)+g(v, a)]=0.$$

Iz (4.1.13) nalazi se

$$f(u, v) = p(u) - p(v), \quad g(u, v) = q(u) - q(v), \tag{4.1.14}$$

pri čemu su uvedene oznake $p(u) = f(u, a)$, $q(u) = g(u, a)$.

Prema tome, dokazali smo teoremu 4.1.1 u slučaju kada je $\alpha < 0$.

Drugi slučaj: $\alpha = 0$. U ovom slučaju sistem $\mathbf{S}_1$ svodi se na

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) \\ &\qquad + \cdots + F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1}) = 0, \\ &H(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) + H(x_1, x_3, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots \\ &+ H(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1}) + K(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \\ &+ K(x_1, x_3, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots + K(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1} = 0. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Opšte rešenje prve jednačine sistema (4.1.15) je (videti: **[1]** i **[2]**):

$$f(u, v) = p(u) - p(v), \tag{4.1.16}$$

pri čemu je $p(u) = f(u, a)$.

Ako se u drugoj jednačini sistema (4.1.15) stavi $x_1 = b$ a sve ostale promenljive x_i $(i = 2, 3, \ldots, 2n)$ zamene sa a (a, b realni brojevi, takvi da je $f(a, b) \neq 0$), dobija se

$$f(a, b)\, g(a, a) = 0,$$

odakle

$$g(a, a) = 0. \tag{4.1.17}$$

I sada ćemo razlikovati tri slučaja:

$$a)\ k = 1; \qquad b)\ 1 < k < n - 1; \qquad c)\ k = n - 1.$$

U slučaju kada je $k = 1$, stavljajući $x_5 = x_6 = \cdots = x_{2n} = x_1 = a$, $x_2 = v$, $x_3 = b$, $x_4 = u$, druga jednačina sistema (4.1.15), na osnovu (4.1.16) i (4.1.17), postaje

$$\begin{aligned} &f(a, b)\, g(u, v) + f(a, b)\, g(a, u) + f(b, a)\, g(a, v) \\ &+ g(a, b) f(u, v) + g(a, b) f(a, u) + g(b, a) f(a, v) \\ &+ f(a, v)\, g(a, u) + f(a, v)\, g(u, a) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.18}$$

Ako se u (4.1.18) stavi $v = a$, na osnovu (4.1.17), dobija se $g(a, u) = -g(u, a)$, pa se na osnovu toga (4.1.18) svodi na

$$g(u, v) = q(u) - q(v),$$

gde smo uveli oznaku $q(u) = g(u, a)$.

Ako, u slučaju kada je $1<k<n-1$, sve promenljive $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ osim x_2 i x_3 zamenimo sa a, i ako stavimo $x_2=b$, $x_3=u_1$, druga jednačina sistema (4.1.15) postaje

$$f(a, b)[g(a, u)+g(u, a)]=0,$$

odakle $g(a, u)=-g(u, a)$. Za $x_5=x_6=\cdots=x_{2n}=x_1=a$, $x_2=u$, $x_3=v$, $x_4=b$, na osnovu $g(a, u)=-g(u, a)$ i (4.1.16), druga jednačina sistema (4.1.15) dobija sledeći oblik

$$g(u, v)=q(u)-q(v),$$

gde je $q(u)=g(u, a)$.

U slučaju $k=n-1$, za $x_3=x_4=\cdots=x_{2n-1}=x_1=a$, $x_2=u$, $x_{2n}=b$, na osnovu (4.1.16), iz druge jednačine sistema (4.1.15) dobija se

$$g(a, u)=-g(u, a).$$

Stavljajući $x_3=x_4=\cdots=x_{2n-2}=x_1=a$, $x_2=v$, $x_{2n-1}=b$, $x_{2n}=u$, na osnovu (4.1.16) i $g(a, u)+g(u, a)=0$, iz druge jednačine sistema (4.1.15) nalazimo da je

$$g(u, v)=q(u)-q(v),$$

pri čemu smo stavili $q(u)=g(u, a)$.

Dakle, teorema 4.1.1 je dokazana i u slučaju kada je $\alpha=0$.

Treći slučaj: $\alpha>0$. U ovom slučaju sistem $\mathbf{S}_1$ glasi

$$\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n})+F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots\\
&\quad+F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1})+G(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n})\\
&\quad+G(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots+G(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1})=0,\\
&H(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n})+H(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots\\
&\quad+H(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1})+K(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n})\\
&\quad+K(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots+K(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1})=0.
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Uvodeći nove funkcije s i t pomoću formula

$$\begin{aligned}
s(u, v)&=f(u, v)+g(u, v),\\
t(u, v)&=f(u, v)-g(u, v),
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

sistem (4.1.19) postaje

$$\begin{aligned}
&S(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n})+S(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots\\
&\quad+S(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1})+T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n})\\
&\quad+T(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots+T(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1})=0,\\
&S(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n})+S(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)+\cdots\\
&\quad+S(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1})-T(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n})\\
&\quad-T(x_1, x_3\, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2)-\cdots-T(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-1})=0,
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

gde smo uveli oznake

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$$
$$= \{s(x_1, x_2) + s(x_3, x_4) + \cdots + s(x_{2k-1}, x_{2k})\}$$
$$\times \{s(x_{2k+1}, x_{2n}) + s(x_{2k+2}, x_{2n-1}) + \cdots + s(x_{k+n}, x_{k+n+1})\};$$

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$$
$$= \{t(x_1, x_2) + t(x_3, x_4) + \cdots + t(x_{2k-1}, x_{2k})\}$$
$$\times \{t(x_{2k+1}, x_{2n}) + t(x_{2k+2}, x_{2n-1}) + \cdots + t(x_{k+n}, x_{k+n+1})\}.$$

Upoređujući jednačine sistema (4.1.21), nalazimo

$$\begin{aligned} &S(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) + S(x_1, x_3, x_4, \dots, x_{2n}, x_2) \\ &\qquad + \cdots + S(x_1, x_{2n}, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0, \\ &T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) + T(x_1, x_3, x_4, \dots, x_{2n}, x_2) \\ &\qquad + \cdots + T(x_1, x_{2n}, x_2, \dots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

Opšte rešenje sistema (4.1.22) je (videti: [1] i [2]):

$$\begin{aligned} s(u, v) &= m(u) - m(v), \\ t(u, v) &= h(u) - h(v), \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

gde su m i h proizvoljne realne funkcije.

Na osnovu (4.1.20) i (4.1.23) dobijamo

$$f(u, v) = p(u) - p(v),$$
$$g(u, v) = q(u) - q(v),$$

pri čemu su uvedene oznake

$$p(u) = \frac{1}{2}[m(u) + h(u)], \quad q(u) = \frac{1}{2}[m(u) - h(u)].$$

Ovim je teorema 4.1.1 dokazana i u slučaju kada je $\alpha > 0$.

Time je teorema 4.1.1 u potpunosti dokazana.

4.2. Sistem funkcionalnih jednačina S_2

L. Carlitz u svom radu [3] *A special functional equation* posmatrao je funkcionalnu jednačinu

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) f(x_4, x_5, x_6) + f(x_2, x_1, x_4) f(x_3, x_5, x_6) \\ + f(x_1, x_2, x_5) f(x_3, x_4, x_6) + f(x_2, x_1, x_6) f(x_3, x_4, x_5) = 0. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

gde je f: $C^3 \to C$.

U navedenom radu on je dokazao sledeći rezultat:

Teorema 4.2.1. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (4.2.1) *glasi*

$$f(u, v, w) = \Delta \{H_1(u), H_2(v), H_3(w)\}, \tag{4.2.2}$$

gde su $H_i (i = 1, 2, 3)$: $C \to C$, *proizvoljne funkcije.*

Sistem funkcionalnih jednačina

$$\begin{aligned}
& f(x_1, x_2, x_3) f(x_4, x_5, x_6) + f(x_2, x_1, x_4) f(x_3, x_5, x_6) \\
& + f(x_1, x_2, x_5) f(x_3, x_4, x_6) + f(x_2, x_1, x_6) f(x_3, x_4, x_5) \\
& + \alpha \{g(x_1, x_2, x_3) g(x_4, x_5, x_6) + g(x_2, x_1, x_4) g(x_3, x_5, x_6) \\
& + g(x_1, x_2, x_5) g(x_3, x_4, x_6) + g(x_2, x_1, x_6) g(x_3, x_4, x_5)\} = 0, \\
& f(x_1, x_2, x_3) g(x_4, x_5, x_6) + f(x_2, x_1, x_4) g(x_3, x_5, x_6) \\
& + f(x_1, x_2, x_5) g(x_3, x_4, x_6) + f(x_2, x_1, x_6) g(x_3, x_4, x_5) \\
& + g(x_1, x_2, x_3) f(x_4, x_5, x_6) + g(x_2, x_1, x_4) f(x_3, x_5, x_6) \\
& + g(x_1, x_2, x_5) f(x_3, x_4, x_6) + g(x_2, x_1, x_6) f(x_3, x_4, x_5) \\
& + \beta \{g(x_1, x_2, x_3) g(x_4, x_5, x_6) + g(x_2, x_1, x_4) g(x_3, x_5, x_6) \\
& + g(x_1, x_2, x_5) g(x_3, x_4, x_6) + g(x_2, x_1, x_6) g(x_3, x_4, x_5)\} = 0
\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

(f, g: $R^3 \to R$, α, $\beta \in R$ date konstante), zvaćemo: *sistem* $\mathbf{S}_2$.

Ako uvedemo funkciju h relacijom

$$h(u, v, w) = f(u, v, w) + \frac{\beta}{2} g(u, v, w), \tag{4.2.4}$$

sistem jednačina (4.2.3) svodi se na

$$\begin{aligned}
& h(x_1, x_2, x_3) h(x_4, x_5, x_6) + h(x_2, x_1, x_4) h(x_3, x_5, x_6) \\
& + h(x_1, x_2, x_5) h(x_3, x_4, x_6) + h(x_2, x_1, x_6) h(x_3, x_4, x_5) \\
& + \left(\frac{\beta^2}{4} + \alpha\right) \{g(x_1, x_2, x_3) g(x_4, x_5, x_6) + g(x_2, x_1, x_4) g(x_3, x_5, x_6) \\
& + g(x_1, x_2, x_5) g(x_3, x_4, x_6) + g(x_2, x_1, x_6) g(x_3, x_4, x_5)\} = 0, \\
& h(x_1, x_2, x_3) g(x_4, x_5, x_6) + h(x_2, x_1, x_4) g(x_3, x_5, x_6) \\
& + h(x_1, x_2, x_5) g(x_3, x_4, x_6) + h(x_2, x_1, x_6) g(x_3, x_4, x_5) \\
& + g(x_1, x_2, x_3) h(x_4, x_5, x_6) + g(x_2, x_1, x_4) h(x_3, x_5, x_6) \\
& + g(x_1, x_2, x_5) h(x_3, x_4, x_6) + g(x_2, x_1, x_6) h(x_3, x_4, x_5) = 0.
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Razlikovaćemo sledeća tri slučaja:

$$1^\circ\ \frac{\beta^2}{4}+\alpha=-p^2,\quad 2^\circ\ \frac{\beta^2}{4}+\alpha=0,\quad 3^\circ\ \frac{\beta^2}{4}+\alpha=p^2\quad (p>0),$$

Prvi slučaj: $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=-p^2$. U ovom slučaju sistem (4.2.5) glasi

$$\begin{aligned}
&h(x_1, x_2, x_3)h(x_4, x_5, x_6)+h(x_2, x_1, x_4)h(x_3, x_5, x_6)\\
&+h(x_1, x_2, x_5)h(x_3, x_4, x_6)+h(x_2, x_1, x_6)h(x_3, x_4, x_5)\\
&-\{k(x_1, x_2, x_3)k(x_4, x_5, x_6)+k(x_2, x_1, x_4)k(x_3, x_5, x_6)\\
&+k(x_1, x_2, x_5)k(x_3, x_4, x_6)+k(x_2, x_1, x_6)k(x_3, x_4, x_5)\}=0,\\
&h(x_1, x_2, x_3)k(x_4, x_5, x_6)+h(x_2, x_1, x_4)k(x_3, x_5, x_6)\\
&+h(x_1, x_2, x_5)k(x_3, x_4, x_6)+h(x_2, x_1, x_6)k(x_3, x_4, x_5)\\
&+k(x_1, x_2, x_3)h(x_4, x_5, x_6)+k(x_2, x_1, x_4)h(x_3, x_5, x_6)\\
&+k(x_1, x_2, x_5)h(x_3, x_4, x_6)+k(x_2, x_1, x_6)h(x_3, x_4, x_5)=0,
\end{aligned}\tag{4.2.6}$$

pri čemu smo uveli oznaku

$$k(u, v, w)=pg(u, v, w).\tag{4.2.7}$$

Stavljajući $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=x_6=u$, sistem (4.2.6) svodi se na

$$h^2(u, u, u)-k^2(u, u, u)=0,\quad h(u, u, u)k(u, u, u)=0,$$

odakle

$$h(u, u, u)=0,\quad k(u, u, u)=0.\tag{4.2.8}$$

Za $x_1=x_2=x_3=x_4=u$, $x_5=x_6=v$, sistem (4.2.6) daje

$$h^2(u, u, v)-k^2(u, u, v)=0,\quad h(u, u, v)k(u, u, v)=0,$$

odakle dobijamo

$$h(u, u, v)=0,\quad k(u, u, v)=0.\tag{4.2.9}$$

Ako stavimo $x_1=x_4=x_5=x_6=u$, $x_2=x_3=v$, iz (4.2.6) nalazimo

$$\begin{aligned}
&2h^2(v, u, u)+h(u, v, u)h(v, u, u)\\
&\qquad -2k^2(v, u, u)-k(u, v, u)k(v, u, u)=0,\\
&4h(v, u, u)k(v, u, u)+h(u, v, u)k(v, u, u)\\
&\qquad +h(v, u, u)k(u, v, u)=0.
\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

Međutim, stavljajući u (4.2.6) $x_1=x_3=v$, $x_2=x_4=x_5=x_6=u$, biće

$$\begin{aligned}
&h^2(v, u, u)+2h(v, u, u)h(u, v, u)\\
&\qquad -k^2(v, u, u)-2k(v, u, u)k(u, v, u)=0,\\
&h(u, v, u)k(v, u, u)+h(v, u, u)k(v, u, u)\\
&\qquad +h(v, u, u)k(u, v, u)=0.
\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

Upoređujući (4.2.10) i (4.2.11) nalazimo da je

$$h^2(v, u, u)-k^2(v, u, u)=0, \quad h(v, u, u)k(v, u, u)=0,$$

odakle dobijamo

$$h(v, u, u)=0, \quad k(v, u, u)=0. \tag{4.2.12}$$

Smenom $x_1=x_4=v$, $x_2=x_3=x_5=x_6=u$, sistem (4.2.6) svodi se na

$$h^2(u, v, u)-k^2(u, v, u)=0, \quad h(u, v, u)k(u, v, u)=0,$$

tj.

$$h(u, v, u)=0, \quad k(u, v, u)=0. \tag{4.2.13}$$

Za svako netrivijalno rešenje sistema (4.2.6) postoje bar tri realna broja a, b, c takva da je $h(a, b, c)\neq 0$.

Ako u (4.2.6) stavimo $x_1=u$, $x_2=v$, $x_3=a$, $x_4=b$, $x_5=x_6=c$, na osnovu (4.2.8), (4.2.9), (4.2.12) i (4.2.13) dobijamo

$$h(u, v, c)=-h(v, u, c), \quad k(u, v, c)=-k(v, u, c). \tag{4.2.14}$$

Koristeći (4.2.14), sistem (4.2.6), za $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=x_6=c$, $x_4=u$, $x_5=v$, daje

$$h(u, v, c)=h(c, u, v), \quad k(u, v, c)=k(c, u, v). \tag{4.2.15}$$

Najzad, stavljajući $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=x_5=c$, $x_4=u$, $x_6=v$, sistem (4.2.6) svodi se na

$$h(c, u, v)=-h(u, c, v), \quad k(c, u, v)=-k(u, c, v). \tag{4.2.16}$$

Na osnovu (4.2.14), (4.2.15) i (4.2.16), ako se stavi $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$, $x_4=u$, $x_5=v$, $x_6=w$, sistem (4.2.6) daje

$$\begin{aligned} h(u, v, w)=q\{&H_1(u)F(v, w)-H_1(v)F(u, w)+H_1(w)F(u, v)\\ &-K_1(u)G(v, w)+K_1(v)G(u, w)-K_1(w)G(u, v)\}\\ +r\{&H_1(u)G(v, w)-H_1(v)G(u, w)+H_1(w)G(u, v)\\ &+K_1(u)F(v, w)-K_1(v)F(u, w)+K_1(w)F(u, v)\}, \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

$$\begin{aligned} k(u, v, w)=q\{&H_1(u)G(v, w)-H_1(v)G(u, w)+H_1(w)G(u, v)\\ &+K_1(u)F(v, w)-K_1(v)F(u, w)+K_1(w)F(u, v)\}\\ +r\{&H_1(u)F(v, w)-H_1(v)F(u, w)+H_1(w)F(u, v)\\ &-K_1(u)G(v, w)+K_1(v)G(u, w)-K_1(w)G(u, v)\}, \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

pri čemu su uvedene oznake

$$\begin{gathered} H_1(u)=h(a, b, u), \quad K_1(u)=k(a, b, u),\\ F(u, v)=h(u, v, c), \quad G(u, v)=k(u, v, c),\\ q=\frac{h(a,b,c)}{h^2(a,b,c)+k^2(a,b,c)}, \quad r=\frac{k(a,b,c)}{h^2(a,b,c)+k^2(a,b,c)}. \end{gathered} \tag{4.2.19}$$

Za $x_1 = x_4 = c$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_5 = u$, $x_6 = v$, sa oznakama (4.2.19), sistem (4.2.6) svodi se na

$$
\begin{aligned}
&F(x, y)F(u, v)+F(x, u)F(v, y)+F(x, v)F(y, u)\\
&\quad -G(x, y)G(u, v)-G(x, u)G(v, y)-G(x, v)G(y, u)=0,\\
&F(x, y)G(u, v)+F(x, u)G(v, y)+F(x, v)G(y, u)\\
&\quad +G(x, y)F(u, v)+G(x, u)F(v, y)+G(x, v)F(y, u)=0.
\end{aligned}
\tag{4.2.20}
$$

Opšte rešenje sistema (4.2.20) dato je formulama (videti: [4] i [5]):

$$
\begin{aligned}
F(u, v)&=\Delta\{H_1(u),\ qH_3'(v)+rK_3'(v)\}+\Delta\{K_2(u),\ rH_3'(v)-qK_3'(v)\}\\
G(u, v)&=\Delta\{K_2(u),\ qH_3'(v)+rK_3'(v)\}+\Delta\{H_2(u),\ qK_3'(v)-rH_3'(v)\}.
\end{aligned}
\tag{4.2.21}
$$

Na osnovu (4.2.4), (4.2.7), (4.2.17), (4.2.18) i (4.2.21) doijamo

$$
\begin{aligned}
&2pf(u, v, w)\\
&=\Delta\{H_1(u),\ H_2(v),\ (2p+\beta)H_3(w)\}\\
&-\Delta\{K_1(u),\ K_2(v),\ 2pH_3(w)+\beta K_3(w)\}\\
&+\Delta\{H_1(u),\ K_2(v),\ 2pK_3(w)-\beta H_3(w)\}\\
&+\Delta\{K_1(u),\ H_2(v),\ 2pK_3(w)-\beta H_3(w)\},
\end{aligned}
\tag{4.2.22}
$$

$$
\begin{aligned}
&pg(u, v, w)\\
&=\Delta\{K_1(u),\ K_2(v),\ K_3(w)\}-\Delta\{H_1(u),\ H_2(v),\ H_3(w)\}\\
&+\Delta\{K_1(u),\ H_2(v),\ H_3(w)\}+\Delta\{H_1(u),\ K_2(v),\ H_3(w)\},
\end{aligned}
\tag{4.2.23}
$$

sa sledećim oznakama

$$H_3(u)=(q^2-r^2)H_3'(u)+2qrK_3'(u),\quad K_3(u)=(r^2-q^2)K_3'(u)+2qrH_3'(u).$$

Funkcije f i g date formulama (4.2.22) i (4.2.23) zaista su rešenja sistema S_2. Prema tome, u slučaju $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=-p^2\,(p>0)$, formulama (4.2.22) i (4.2.23) određene su sve funkcije f i g koje su rešenja sistema S_2. Funkcije H_i, K_j $(i, j=1, 2, 3)$ koje se u tim rešenjima pojavljuju su proizvoljne funkcije koje $R\to R$.

Drugi slučaj: $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=0$. U ovom slučaju prva jednačina sistema (4.2.5) postaje

$$
\begin{aligned}
&h(x_1, x_2, x_3)h(x_4, x_5, x_6)+h(x_2, x_1, x_4)h(x_3, x_5, x_6)\\
&\quad +h(x_1, x_2, x_5)h(x_3, x_4, x_6)+h(x_2, x_1, x_6)h(x_3, x_4, x_5)=0.
\end{aligned}
$$

Opšte rešenje ove jednačine, prema teoremi 4.2.1 je

$$h(u, v, w)=\Delta\{H_1(u),\ H_2(v),\ H_3(w)\}\quad (H_i\ (i=1,\ 2,\ 3)\colon R\to R), \tag{4.2.24}$$

gde su

$$H_1(u) = \frac{h(a, b, u)}{h(a, b, c)}, \quad H_2(u) = \frac{h(a, u, c)}{h(a, b, c)}, \quad H_3(u) = h(b, u, c)$$

proizvoljne funkcije i a, b, c ($a, b, c \in R$) tri realna broja takva da je $h(a, b, c) \neq 0$.

Ako stavimo $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = c$, $x_3 = u$, $x_6 = v$, druga jednačina sistema (4.2.5) daje

$$h(u, c, v)\, g(c, c, c) = 0. \tag{4.2.25}$$

Koristeći relaciju $h(u, c, v) = -h(u, v, c)$ (koja sleduje iz (4.2.24)) i stavljajući $u = a$, $v = b$, iz (4.2.25) dobijamo $g(c, c, c) = 0$.

Za $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = x_4 = x_5 = c$, $x_6 = u$, druga jednačina sistema (4.2.5) svodi se na $g(c, c, u) = 0$.

Ako se stavi $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = x_5 = x_6 = c$, $x_4 = u$, ista jednačina daje $g(u, c, c) = 0$.

Najzad, supstitucija $x_1 = x_4 = x_5 = c$, $x_2 = u$, $x_3 = a$, $x_6 = b$, svodi drugu jednačinu sistema (4.2.5) na $g(c, u, c) = 0$.

Stavljajući u drugoj jednačini sistema (4.2.5) $x_1 = u$, $x = v$, $x_3 = a$, $x_4 = b$, $x_5 = x_6 = c$, na osnovu prethodnih rezultata, dobijamo

$$g(u, v, c) = -g(v, u, c). \tag{4.2.26}$$

Za $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = x_6 = c$, $x_4 = u$, $x_5 = v$, ista jednačina daje

$$g(u, v, c) = g(c, u, v). \tag{4.2.27}$$

Isto tako, na osnovu prethodnih rezultata, za $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = x_5 = c$, $x_4 = u$, $x_6 = v$, druga jednačina sistema (4.2.5) svodi se na

$$g(c, u, v) = -g(u, c, v). \tag{4.2.28}$$

Stavljajući $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = u$, $x_5 = v$, $x_6 = w$, na osnovu (4.2.26), (4.2.27) i (4.2.28), druga jednačina sistema (4.2.5) postaje

$$\begin{aligned} h(a, b, c)\{g(u, v, w) - H_1(u)\, g(v, w, c) + H_1(v)\, g(u, w, c) \\ - H_1(w)\, g(u, v, c)\} + g(a, b, c)\, h(u, v, w) - g(a, b, u)\, h(v, w, c) \\ + g(a, b, v)\, h(u, w, c) - g(a, b, w)\, h(u, v, c) = 0. \end{aligned} \tag{4.2.29}$$

Za $x_1 = x_4 = c$, $x_2 = x$, $x_3 = y$, $x_5 = u$, $x_6 = v$, i sa oznakama (4.2.19), sistem (4.2.5) svodi se na

$$F(x, y)\, F(u, v) + F(x, u)\, F(v, y) + F(x, v)\, F(y, u) = 0,$$

$$\begin{aligned} F(x, y)\, G(u, v) + F(x, u)\, G(v, y) + F(x, v)\, G(y, u) \\ + G(x, y)\, F(u, v) + G(x, u)\, F(v, y) + G(x, v)\, F(y, u) = 0. \end{aligned}$$

Rešenje ovog sistema dato je formulama (videti: **[4]** i **[5]**)

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \Delta\{H_2(u),\ H_3(v)\}, \\ G(u, v) &= \Delta\{K_2(u),\ H_3(v)\} + \Delta\{H_2(u),\ K_3'(v) - kH_3(v)\}, \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

pri čemu je

$$K_2(u)=\frac{g(a,\,u,\,c)}{h(a,\,b,\,c)},\quad K_3'(u)=g(b,\,u,\,c),\quad k=\frac{g(a,\,b,\,c)}{h(a,\,b,\,c)}.$$

Na osnovu (4.2.29) i (4.2.30) dobijamo

$$\begin{aligned}(4.2.31)\qquad g(u,\,v,\,w)=&\,\Delta\{H_1(u),\,H_2(v),\,H_3(w)\}\\ &+\Delta\{H_1(u),\,K_2(v),\,H_3(w)\}\\ &+\Delta\{K_1(u),\,H_2(v),\,H_3(w)\},\end{aligned}$$

gde je $K_3(u)=K_3'(u)-2kH_3(u)$, $K_1(u)=\dfrac{g(a,\,b,\,u)}{h(a,\,b,\,c)}$.

Na osnovu (4.2.4), (4.2.24) i (4.2.31) imamo

$$\begin{aligned}(4.2.32)\qquad f(u,\,v,\,w)=&\,\Delta\{H_1(u),\,H_2(v),\,H_3(w)-\frac{\beta}{2}K_3(w)\}\\ &-\frac{\beta}{2}\Delta\{H_1(u),\,K_2(v),\,H_3(w)\}\\ &-\frac{\beta}{2}\Delta\{K_1(u),\,H_2(v),\,H_3(w)\}.\end{aligned}$$

Funkcije (4.2.31) i (4.2.32) zaista su rešenja sistema $\mathbf{S}_2$.

Dakle, opšte rešenje sistema $\mathbf{S}_2$ u slučaju $\beta^2+4\alpha=0$ dato je obrascima (4.2.31) i (4.2.32) gde su $H_i,\,K_j$ $(i,\,j=1,\,2,\,3)$: $R\to R$, proizvoljne funkcije i $k\in R$ proizvoljna konstanta.

Treći slučaj: $\dfrac{\beta^2}{4}+\alpha=p^2\,(p>0)$. Uvodeći nove funkcije M i N pomoću formula

$$(4.2.33)\qquad M(u,\,v,\,w)=h(u,\,v,\,w)+pg(u,\,v,\,w),\quad N(u,\,v,\,w)=h(u,\,v,\,w)-pg(u,\,v,\,w)$$

sistem (4.2.5) postaje

$$(4.2.34)\qquad \begin{aligned}&M(x_1,\,x_2,\,x_3)\,M(x_4,\,x_5,\,x_6)+M(x_2,\,x_1,\,x_4)\,M(x_3,\,x_5,\,x_6)\\ &\quad+M(x_1,\,x_2,\,x_5)\,M(x_3,\,x_4,\,x_6)+M(x_2,\,x_1,\,x_6)\,M(x_3,\,x_4,\,x_5)\\ &\quad+N(x_1,\,x_2,\,x_3)\,N(x_4,\,x_5,\,x_6)+N(x_2,\,x_1,\,x_4)\,N(x_3,\,x_5,\,x_6)\\ &\quad+N(x_1,\,x_2,\,x_5)\,N(x_3,\,x_4,\,x_6)+N(x_2,\,x_1,\,x_6)\,N(x_3,\,x_4,\,x_5)=0,\\ &M(x_1,\,x_2,\,x_3)\,M(x_4,\,x_5,\,x_6)+M(x_2,\,x_1,\,x_4)\,M(x_3,\,x_5,\,x_6)\\ &\quad+M(x_1,\,x_2,\,x_5)\,M(x_3,\,x_4,\,x_6)+M(x_2,\,x_1,\,x_6)\,M(x_3,\,x_4,\,x_5)\\ &\quad-N(x_1,\,x_2,\,x_3)\,N(x_4,\,x_5,\,x_6)-N(x_2,\,x_1,\,x_4)\,N(x_3,\,x_5,\,x_6)\\ &\quad-N(x_1,\,x_2,\,x_5)\,N(x_3,\,x_4,\,x_6)-N(x_2,\,x_1,\,x_6)\,N(x_3,\,x_4,\,x_5)=0.\end{aligned}$$

Upoređujući jednačine sistema (4.2.34), nalazimo

$$(4.2.35)\qquad \begin{aligned}&M(x_1,\,x_2,\,x_3)\,M(x_4,\,x_5,\,x_6)+M(x_2,\,x_1,\,x_4)\,M(x_3,\,x_5,\,x_6)\\ &\quad+M(x_1,\,x_2,\,x_5)\,M(x_3,\,x_4,\,x_6)+M(x_2,\,x_1,\,x_6)\,M(x_3,\,x_4,\,x_5)=0,\\ &N(x_1,\,x_2,\,x_3)\,N(x_4,\,x_5,\,x_6)+N(x_2,\,x_1,\,x_4)\,N(x_3,\,x_5,\,x_6)\\ &\quad+N(x_1,\,x_2,\,x_5)\,N(x_3,\,x_4,\,x_6)+N(x_2,\,x_1,\,x_6)\,N(x_3,\,x_4,\,x_5)=0.\end{aligned}$$

Opšte rešenje ovog sistema, na osnovu teoreme 4.2.1 je

$$
\begin{aligned}
&M(u, v, w) = \Delta\{H_1(u), H_2(v), H_3(w)\},\\
(4.2.36)\qquad &\\
&N(u, v, w) = \Delta\{K_1(u), K_2(v), K_3(w)\},
\end{aligned}
$$

gde su H_i, K_j $(i, j = 1, 2, 3)$ proizvoljne realne funkcije.

Na osnovu (4.2.4), (4.2.33) i (4.2.36), nalazimo da je

$$
(4.2.37)\qquad 4pf(u, v, w) = (2p-\beta)\Delta\{H_1(u), H_2(v), H_3(w)\} + (2p+\beta)\Delta\{K_1(u), K_2(v), K_3(w)\},
$$

$$
(4.2.38)\qquad 2pg(u, v, w) = \Delta\{H_1(u), H_2(v), H_3(w)\} - \Delta\{K_1(u), K_2(v), K_3(w)\}.
$$

Funkcije (4.2.37) i (4.2.38) su rešenja sistema (4.2.3).

Prema tome, opšte rešenje sistema S_2, u slučaju $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = p^2$ $(p > 0)$, dato je formulama (4.2.37) i (4.2.38) pri čemu su H_i, K_j $(i, j = 1, 2, 3)$: $R \to R$, proizvoljne funkcije.

Na osnovu izloženog imamo sledeći rezultat:

Teorema 4.2.2. — *Opšte rešenje sistema* S_2 *određeno je sledećim formulama:*

1° (4.2.22), (4.2.23) *u slučaju* $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = -p^2$ $(p > 0)$,

2° (4.2.31), (4.2.32) *u slučaju* $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = 0$,

3° (4.2.37), (4.2.38) *u slučaju* $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = p^2\,(p > 0)$;

H_i, H_j $(i, j = 1, 2, 3): R \to R$ *su proizvoljne funkcije,* $k\,(k \in R)$ *proizvoljna konstanta.*

4.3. Sistem funkcionalnih jednačina S_3

U radu [**6**], P. M. Vasić dokazao je sledeći rezultat:

Teorema 4.3.1. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine*

$$
\begin{aligned}
(4.3.1)\qquad & f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) f(x_{n+1}\, x_{n+2}, \ldots, x_{2n})\\
&= f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&+ f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}) f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n})\\
&+ \cdots\\
&+ f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n}) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n),
\end{aligned}
$$

dato je sa

$$
(4.3.2)\qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\}
$$

gde su H_i $(i = 1, \ldots, n): C \to C$ *proizvoljne funkcije.*

Sistem funkcionalnih jednačina

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}) f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) - \cdots \\
&\quad - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n}) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n) \\
&\quad + \operatorname{sgn} \alpha \{ g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad - g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) g(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad - g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}) g(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) - \cdots \\
&\quad - g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n}) g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n) \} = 0, \\
(4.3.3) \qquad &f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) g(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots x_{2n}) \\
&\quad - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}) g(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) - \cdots \\
&\quad - f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n}) g(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n) \\
&\quad + g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad - g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}) f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\
&\quad - g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2}) f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) - \cdots \\
&\quad - g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{2n}) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n) = 0,
\end{aligned}
$$

gde je α realna konstanta; $x_i \in S$ $(i = 1, \ldots, 2n)$; $f, g: S^n \to C$, S proizvoljan neprazan skup, zvaćemo: *sistem* $\mathbf{S}_3$.

U članku [**20**] dokazan je sledeći rezultat:

Teorema 4.3.2. — *Opšte rešenje sistema* $\mathbf{S}_3$ *u slučaju* $\alpha < 0$ *dato je formulama*

$$
\begin{aligned}
f(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \Delta \{H_1(u_1), \ldots, H_n(u_n)\} + \Delta \{K_1(u_1), \ldots, K_n(u_n)\}, \\
g(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= i(\Delta \{K_1(u_1), \ldots, K_n(u_n)\} - \Delta \{H_1(u_1), \ldots, H_n(u_n)\}).
\end{aligned}
$$

Ako je $\alpha > 0$, *njegovo opšte rešenje dato je sa*

$$
\begin{aligned}
f(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \Delta \{H_1(u_1), \ldots, H_n(u_n)\} + \Delta \{K_1(u_1), \ldots, K_n(u_n)\}, \\
g(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \Delta \{H_1(u_1), \ldots, H_n(n_n)\} - \Delta \{K_1(u_1), \ldots, K_n(u_n)\},
\end{aligned}
$$

Za $\alpha = 0$ *opšte rešenje je*

$$
\begin{aligned}
f(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \Delta \{H_1(u_1), H_2(u_2), \ldots, H_n(u_n)\} \\
g(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= \Delta \{K_1(u_1), H_2(u_2), H_3(u_3), \ldots, H_n(u_n)\} \\
&\quad + \Delta \{H_1(u_1), K_2(u_2), H_3(u_3), \ldots, H_n(u_n)\} + \cdots \\
&\quad + \Delta \{H_1(u_1), \ldots, H_{n-1}(u_{n-1}), K_n(u_n)\}.
\end{aligned}
$$

Funkcije H_i, K_j $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$: $S \to C$ *koje se pojavljuju u opštim rešenjima su proizvoljne funkcije.*

5. BIBLIOGRAFIJA

5.1. Citirani radovi

[1] D. S. MITRINOVIĆ, S. B. PREŠIĆ et P. M. VASIĆ, *Sur deux équations fonctionnelles cycliques non linéaires*, Bulletien de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. S. de Serbie **15** (1963), 3—6.

[2] D. S. MITRINOVIĆ et S. B. PREŠIĆ, *Sur une équation fonctionnelle cyclique non linéaire*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris **254** (1962), 611—613.

[3] L. CARLITZ, *A special functional equation*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № **97** (1963), 1—3.

[4] P. M. VASIĆ, *Sur un système d'équations fonctionnelles*, Glasnik Matematičko-fizički i astronomski (2) **18** (1963), 229—233.

[5] P. M. VASIĆ, *O nekim kvadratnim funkcionalnim jednačinama*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № **131** (1964), 1—55.

[6] P. M. VASIĆ, *Equation fonctionnelle d'un certain type de déterminants*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade **2** (16) (1962), 65—70.

[7] D. S. MITRINOVIĆ et P. M. VASIĆ, *Quelques équations fonctionnelles non linéaires à proprietés curieuses*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade **3** (17) (1963), 105—114.

[8] D. S. MITRINOVIĆ et S. B. PREŠIĆ, *Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika № **70** (1962), 1—2.

[9] P. M. VASIĆ et R. R. JANIĆ, *Sur un équation fonctionnelle k-tieme degre*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade **8** (22) (1968), 124—129.

[10] D. S. MITRINOVIĆ, *Equations fonctionnelles linéaires paracycliquesde première espèce*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade **3** (17) (1963), 115—128.

[11] D. S. MITRINOVIĆ, *Sur les équations fonctionnelles linéaires paracycliques de seconde espèce*, Glasnik Matematičko-fizički i astronomski (2) **18** (1963), 177—181.

[12] P. M. VASIĆ et R. Ž. ĐORĐEVIĆ, *Sur l'équation fonctionnelle cyclique généralisée*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika № **136** (1965), 33—38.

[13] D. Ž. ĐOKOVIĆ, *Generalisation of a result of Aczél, Ghermanescu and Hosszú*, Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, vol **9**, ser. A, fasc. 1—2, 1964, 51—59.

[14] P. M. VASIĆ, R. R. JANIĆ et R. Ž. ĐORĐEVIĆ, *Sur les équations fonctionnelles linéaires paracycliques de première espèce*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika № **137** (1965), 39—50.

[15] O. EM. GHEORGHIU, *Sur une équation fonctionnelle matricielle*, Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris **256** (1963), 3562—3563.

[16] A. KUWAGAKI, *Sur l'équation fonctionnelle de Cauchy pour les matrices*, Journal of the Mathematical Society of Japan **14** (1962), 359—366.

[17] P. M. VASIĆ et R. R. JANIĆ, *Sur une équation fonctionnelle où interviennent les déterminants*, Matematički vesnik **4** (19) (1967), 325—328.

[18] P. M. VASIĆ et R. R. JANIĆ, *Sur une équation fonctionnelle linéaire*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika № **205** (1967), 21—24.

[19] R. R. JANIĆ, *Sur un système d'équations fonctionnelles*, Matematički vesnik **2** (17) (1965), 63—68.

[20] R. R. JANIĆ, *Sur un système d'équations fonctionnelles qui généralisé une équation de P. M. Vasić*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade **6** (20) (1966), 107—114.

5.2. Ostala literatura

[1] J. ACZÉL, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, New York 1966.

[2] M. GHERMANESCU, *Ecuatii functionale*, Bucuresti 1960.

[3] M. KUCZMA, *A Survey of the Theory of Functional Equations*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika №. **130** (1964), 1—64.

[4] D. S. MITRINOVIĆ i D. Ž. ĐOKOVIĆ, *Ciklične funkcionalne jednačine*, Matematička biblioteka №. 22: Izabrana poglavlja iz matematike II, Beograd 1962, p. 5—23.

[5] D. S. MITRINOVIĆ i D. Ž. ĐOKOVIĆ, *Neki nerešeni problemi u teoriji funkcionalnih jednačina*, Matematička biblioteka №. 25: Neki nerešeni problemi u matematici, Beograd 1963, p. 153—168.

[6] O. EM. GHEORGHIU, *Sur un système d'équations fonctionnelles qui généralise l'équation fonctionnelle de D. S. Mitrinović, étudiée aussi par J. Aczél*, Publikacije Elektrotehničkog fakultcta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika №. **37** 1960.

Summary

ON SOME GENERAL CLASSES OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Radovan R. Janić

This paper contains the following chapters:

0. Introduction;

1. Paracyclic functional equations of the first kind;

2. Some linear functional equations which reduce to CAUCHY's functional equation;

3. Generalizations of some results obtained by D. S. MITRINOVIĆ, S. B. PREŠIĆ and P. M. VASIĆ;

4. Some systems of quadratic functional equations;

5. Bibligraphy.

1. In the first chapter we consider paracyclic functional equations of the first kind with one or more unknown functions.

Let

1° S be a non-empty set;

2° M be an additive ABELIAN group;

3° $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})\ (x_{ij} \in S,\ j = 1, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots)$,

$$Q_i^j X_r = Q_i^j (x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rn})$$
$$= (x_{ri}, x_{r,i+1}, \dots, x_{rj}) \qquad (i \leqslant j),$$
$$= (x_{ri}, x_{r,i+1}, \dots, x_{rn}, x_{r1}, \dots, x_{rj}) \qquad (i > j);$$

4° C_n be a cyclic operator defined by the equalities

$$C_n Q_i^j X_r = Q_{i+1}^{j+1} X_r \qquad (Q_{i+1}^{j+1} X_r = Q_{i+1}^{j+1-n} X_r \text{ for } j \geqslant n).$$

The paracyclic functional equations of the first kind have the form

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(C_n^{i-1} Q_1^{p_1} X_1, C_n^{i-1} Q_1^{p_2} X_2, \dots, C_n^{i-1} Q_1^{p_m} X_m) = 0,$$

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(C_n^{i-1} Q_1^{p_1} X_1, C_n^{i-1} Q_1^{p_2} X_2, \dots, C_n^{i-1} Q_1^{pm} X_m) = 0.$$

These equations were introduced by D. S. MITRINOVIĆ who has also given their general solution for some special values of m, n and p_i.

In this paper equations (1) and (2) are completely solved only for $m=2$. Their general solution is given for $m>2$ only when $n+1 \geqslant 2 \max(p_1, p_2, \ldots, p_m)$.

The equation (1) is solved under the additional condition that the equation $sZ=A$ $(A, Z \in M)$, for every $s \leqslant n (s \in N)$, has the unique solution $Z=\frac{1}{s} A$.

All the obtained results are formulated in the twelve theorems, and some of them are established in the paper **[14]**, too.

2. In the second chapter we consider linear functional equations, whose arguments are matrices or determinants, which reduce to CAUCHY's functional equation. All the functions, occuring in this chapter, are real functions of real variables or real matrix-functions.

The first equation treated here is

$$\begin{aligned} (3) \qquad F(x_1 y_2-x_2 y_1, x_3 y_4-x_4 y_3) &= G(x_1 y_3-x_3 y_1, x_2 y_4-x_4 y_2) \\ &+ H(x_1 y_4-x_4 y_1, x_3 y_2-x_2 y_3), \end{aligned}$$

where x_i, y_j $(i, j=1, 2, 3, 4)$ are real commutative $n \times n$ matrices, and F, G, H are real $m \times s$ matrix-functions.

This equation (equation $\mathbf{L}_1$) has, as is proved in this paper, the general measurable solution of the form

$$F(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A+B,$$

$$G(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A,$$

$$H(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+B,$$

where K_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$, A, B are arbitrary real constant $m \times s$ matrices, and z_{ij} $(i, j=1, \ldots, n)$ are the elements of the matrix $\|z_{ij}\|=Z=X \cdot Y$.

Another equation (equation $\mathbf{L}_2$) examined in this chapter has the form

$$\begin{aligned} (4) \qquad & F_0(x_1 y_2-x_2 y_1, z_2 t_3-z_3 t_2)+F_1(x_1 z_2-x_2 z_1, y_2 t_3-y_3 t_2) \\ &+F_2(x_1 t_2-x_2 t_1, y_3 z_2-y_2 z_3)+F_3(z_2 t_1-z_1 t_2, x_2 y_3-x_3 y_2) \\ &+F_4(y_1 t_2-y_2 t_1, x_2 z_3-x_3 z_2)+F_5(y_2 z_1-y_1 z_2, x_2 t_3-x_3 t_2)=0, \end{aligned}$$

where x_i, y_i, z_i, t_i $(i=1, 2, 3)$ are real commutative $n \times n$ matrices, and $F_r (r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$ are real $m \times s$ matrix-functions.

We have proved that the general measurable solution of the equation (4) is given by:

$$F_0(X, Y)=-\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_0,$$

$$F_r(X, Y)=\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} z_{ij}+A_r \quad (r=1, 2, 3, 4, 5),$$

where z_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ are elements of the matrix $\| z_{ij} \| = Z = X \cdot Y$, K_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ are arbitrary real constant $m \times s$ matrices and A_k $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ are real constant $m \times s$ matrices, satisfying the condition

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 0.$$

We have also considered the following equation (equation $\mathbf{L}_3$):

$$\begin{aligned}
(5) \qquad & F_0 (\Delta (x_{11}, \ldots, x_{n-1, n-1}, x_{nn}), \Delta (y_{11}, y_{22}, \ldots, y_{nn})) \\
& = F_1 (\Delta (x_{11}, \ldots, x_{n-1, n-1}, y_{1n}), \Delta (x_{n1}, y_{22}, y_{33}, \ldots, y_{nn})) \\
& + F_2 (\Delta (x_{11}, \ldots, x_{n-1, n-1}, y_{2n}), \Delta (y_{11}, x_{n2}, y_{33}, \ldots, y_{nn})) \\
& + \cdots \\
& + F_i (\Delta (x_{11}, \ldots, x_{n-1, n-1}, y_{in}), \Delta (y_{11}, \ldots, y_{i-1, i-1}, x_{ni}, y_{i+1, i+1}, \ldots, y_{nn})) \\
& + \cdots \\
& + F_n (\Delta (x_{11}, \ldots, x_{n-1, n-1}, y_{nn}), \Delta (y_{11}, \ldots, y_{n-1, n-1}, x_{nn})),
\end{aligned}$$

where $F_i \colon R^2 \to R$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ $(n > 2)$ are unknown functions.

We have proved that this functional equation has a general continuous solution given by

$$F_0 (u, v) = Cuv + \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad F_r (u, v) = Cuv + A_r \quad (r = 1, \ldots, n),$$

where A_i $(i = 1, \ldots, n)$ and C are arbitrary real constants.

Some results concerning this equation are published in the paper **[17]**.

Finally, we have considered the following equation (equation $\mathbf{L}_4$):

$$\begin{aligned}
(6) \qquad & \alpha F (\Delta (x_{11}, \ldots, x_{n-1, n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta (x_{(m-1) n+1, 1}, \ldots, x_{mn, n})) \\
& = \sum_{n=r+1}^{mn} \theta_{n, r} F (\Delta (x_{11}, \ldots, x_{n-1, n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta (x_{(m-1) n+1, 1}, \ldots, x_{m, nn}))
\end{aligned}$$

where $F \colon R^m \to R$, $\alpha \in R$ and $\theta_{n,r}$ is an operator which interchanges the places of the last row of the first determinant with the rows of the other determinants which appear in the function F.

This equation is a certain generalization of the equation $\mathbf{L}_3$.

We have provod that if $\alpha = m - 1$, then the equation (6) has the general continuous solution

$$F (u_1, u_2, \ldots, u_m) = C u_1 u_2 \cdots u_m,$$

where C is an arbitrary constant.

If $\alpha = n (m - 1)$, its general solution is a constant.

In all other cases the equation has only the trivial solution:

$$F (u_1, u_2, \ldots, u_m) \equiv 0.$$

The results concerning the equation $\mathbf{L}_4$, for the case $\alpha = m - 1$, have already been published in the paper **[18]**.

3. In the third chapter we giwe certain generalizations of some results obtained by D. S. Mitrinović, S. B. Prešić and P. M. Vasić.

In the first part of this chapter we give three generalizations of the functional equation (equation **F**):

(7) $$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots + F(x_1, x_{2n}, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}) = 0,$$

where the funktion F is of the form

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \{f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4) + \cdots + f(x_{2k-1}, x_{2k})\} \times \{f(x_{2k+1}, x_{2n}) + f(x_{2k+2}, x_{2n-1}) + \cdots + f(x_{k+n}, x_{k+n+1})\}$$

(f: $R^2 \to R$, $n \geqslant 2$).

D. S. Mitrinović, S. B. Prešić and P. M. Vasić [1] have prevod that the general solution of this equation is given by:

(8) $$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u) \qquad \text{for } n = 2,$$

(9) $$f(u, v) = g(u) = g(v) \qquad \text{for } n > 2,$$

where g, $h: R \to R$ are arbitrary functions.

The first generalization of the equation **F** is the functional equation (7) where the function F is defined by:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \{f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4) + \cdots + f(x_{2k-1}, x_{2k})\} \times \sum_{j=0}^{n+k-1} A_j f(x_{2k+j+1}, x_{2n-j}).$$

This functional equation (equation $\mathbf{F}_1$) has for $\sum_{j=0}^{n-k-1} A_j \neq 0$, $n > 2$ the following general solution, which depends on the nature of the coefficients A_j,

(10) $$f(u, v) = g(u) - g(v),$$

or

(11) $$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u),$$

where g, h are arbitrary complex functions.

We obtain the second generalization of the equation **F** by putting in (7):

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = \{f(x_1, x_2) - f(x_4, x_3) + \cdots - f(x_{2k-2}, x_{2k-3}) + f(x_{2k-1}, x_{2k})\} \times \sum_{j=0}^{n-k-1} A_j f(x_{2k+j+1}, x_{2n-j}) \qquad \text{for } k \text{ odd},$$

$$= \{f(x_1, x_2) - f(x_4, x_3) + \cdots + f(x_{2k-3}, x_{2k-2}) - f(x_{2k}, x_{2k-1})\} \times \sum_{j=0}^{n-k-1} A_j f(x_{2k+j+1}, x_{2n-j}) \qquad \text{for } k \text{ even}.$$

We have proved that in the case of $\sum_{j=0}^{n-k-1} A_j \neq 0$, $n > 2$, this equation (equation $\mathbf{F}_2$) has the general solution of the form (10) or (11) for $k = 2m-1$, while for $k = 2m$ the general solution is (10) or a constant.

The third generalization concerns the functional equation **F** for $n=2$. The equation (equation $\mathbf{F}_3$)

$$(12)\qquad f(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3) = 0$$

($f, g: C^2 \to C$) reduces to the equation **F** if $g \equiv f$. The general solution of (12) is

$$f(u, v) = K_1(u)\, H_2(v) - H_1(v)\, K_2(u),$$
$$g(u, v) = H_1(u)\, H_2(v) = H_1(v)\, H_2(u),$$

where $H_1, H_2, K_1, K_2: C \to C$ are arbitrary functions.

The last generalization in this chapter concerns the equation

$$\begin{aligned}(13)\qquad & f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) f(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n}) \\ & = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+1}) f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n}) \\ & + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+2}) f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, x_{n+4}, \dots, x_{2n}) \\ & + \cdots \\ & + f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{2n}) f(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-1}, x_n).\end{aligned}$$

P. M. Vasić [6] has proved that the general solution of (13) is

$$(14)\qquad f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Delta\{H_1(u_1),\ H_2(u_2), \dots, H_n(u_n)\},$$

where H_i $(i=1, \dots, n): C \to C$ are arbitrary functions.

In this paper the author considered the equation (equation $\mathbf{F}_4$)

$$\begin{aligned}(15)\qquad & \alpha F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{kn-1}, x_{kn}) \\ & = \sum_{r=n+1}^{kn} \theta_{n,r} F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{kn}),\end{aligned}$$

where $\theta_{i,j}$ is an operator which interchanges the arguements which appear on the i-th or j-th place in the function F, and

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{kn-1}, x_{kn}) = \prod_{i=0}^{k-1} f(x_{ni+1}, x_{ni+2}, \dots, x_{ni+n}),$$

($f: C^n \to C$; $\alpha \in C$). This equation reduces to the equation (13) for $k=2$ and $\alpha=1$. The equation $\mathbf{F}_4$ is solved for $\alpha \neq r(k-1)$ $(r=2, 3, \dots, n-1)$. The general solution of the equation $\mathbf{F}_4$, for $\alpha = k-1$, is the function (14).

The general solution for $\alpha = n(k-1)$ is given by

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = K(u_1)\, K(u_2) \cdots K(u_n),$$

or

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv 0,$$

where K is an arbitrary function.

For $\alpha \neq r(k-1)$ $(r=1, \dots, n)$ the equation $\mathbf{F}_4$ has only the trivial solution

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) \equiv 0.$$

The function

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Delta\{H_1(u_1), H_2(u_2), \dots, H_s(u_s)\} \prod_{i=s+1}^{n} H_1(u_i),$$

where $s=n-r+1$ and H_i $(i=1, \ldots, n-r+1)$ are arbitrary complex functions, is a solution of the equation $\mathbf{F}_4$ for $\alpha=r(k-1)$, $(r=2, \ldots. n-1)$ but the question of generality of this solution still remaines unsolved.

The results concerning the equation $\mathbf{F}_4$ for $\alpha=k-1$ have been published in **[9]**.

4. In this chapter three systems of quadratic functional equations are solved. Every one of these systems contains one functional equation, the general solution of which is known.

The first system (system $\mathbf{S}_1$) contains a real parametar α, but the general solution does not depend on α. This system contains the equation **F**.

The second system (system $\mathbf{S}_2$) contains two real parameters α and β and has three types of solutions depending on whether $\beta^2+4\alpha$ is positive, negative or zero.

This system contains the equation examined by L. CARLITZ **[3]**.

The third system (system $\mathbf{S}_3$) contains a real parameter and has three types of solutions, too. It contains the equation (13).

Some of the results in connection with the systems $\mathbf{S}_2$ and $\mathbf{S}_3$ are contained in **[19]** and **[20]**.

5. The Bibliography is divided in the two parts: *a*) Quoted papers; *b*) Other literature used in this paper.

* * *

I wish to express sincere thanks to Professor D. S. MITRINOVIĆ who has given me encouragement and stimulation. His suggestions and remarks have been of much assistence in the preparation of this paper.

I am also gratefull to Dr P. M. VASIĆ for his sincere and unselfish help.