PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 230 — № 241 (1968)

237. NICHTLINEARE ZYKLISCHE FUNKTIONALGLEICHUNGSSYSTEME*

Octavian Em. Gheorghiu

D. S. MITRINOVIĆ und S. B. PREŠIĆ [1] haben in ihrer Arbeit von 1962 die allgemeine Lösung, ausgedrückt durch beliebige Funktionen, folgender quadratischen Funktionalgleichung ausgeführt:

$$f(x_1,\, x_2) f(x_3,\, x_4) + f(x_1,\, x_3) f(x_4,\, x_2) + f(x_1,\, x_4) f(x_2,\, x_3) = 0. \tag{1}$$

Die Lösung ist folgende:

$$f(x,\, y) = A(x)\, B(y) - A(y)\, B(x); \tag{2}$$

$x,\, y \in S$; $A(x)$, $B(x)$ — beliebige Funktionen.

Verallgemeinerungen dieser Funktionalgleichung (1) wurden von L. CARLITZ [2], P. VASIĆ [3] usw. studiert.

1. In diesem Paragraphen nehmen wir folgendes nichtlineares zyklisches Funktionalgleichungssystem an, das drei unbekannte Funktionen mit zwei Veränderlichen enthält:

$$\begin{aligned}
& f_{12} \cdot f_{34} + f_{13} \cdot f_{42} + f_{14} \cdot f_{23} \equiv \mathbf{S} f_{12} \cdot f_{34} = 0 \\
& \mathbf{S}\, F_{12} \cdot F_{34} + F_{12} \cdot f_{34}{}^{3+2a} + F_{13} \cdot f_{42}{}^{3+2a} + F_{14} \cdot f_{23}{}^{3+2a} + F_{34} \cdot f_{12}{}^{3+2a} \\
& \qquad + F_{42} \cdot f_{13}{}^{3+2a} + F_{23} \cdot f_{14}{}^{3+2a} + (3+2a) f_{12} \cdot f_{13} \cdot f_{14} \cdot f_{34} \cdot f_{42} \cdot f_{23} \\
& \qquad \times [f_{12}{}^2 \cdot f_{34}{}^2 + f_{12} \cdot f_{13} \cdot f_{34} \cdot f_{42} + f_{13}{}^2 \cdot f_{42}{}^2]^a = 0, \\
& \mathbf{S}\, G_{12} \cdot G_{34} + \mathbf{S}\, G_{12} \cdot [F_{34} + f_{34}{}^{3+2a}]^{3+2b} + (3+2b) \cdot [F_{12} + f_{12}{}^{3+2a}] \\
& \qquad \times [F_{13} + f_{13}{}^{3+2a}] \cdots [F_{23} + f_{23}{}^{3+2a}]\, [(F_{14} + f_{14}{}^{3+2a})^2\, (F_{23} + f_{23}{}^{3+2a})^2 \\
& \qquad - (F_{12} + f_{12}{}^{3+2a})\, (F_{13} + f_{13}{}^{3+2a})\, (F_{34} + f_{34}{}^{3+2a})\, (F_{42} + f_{42}{}^{3+2a})]^b = 0,
\end{aligned} \tag{3}$$

wobei $a \in \{0,\, 1,\, 2\}$; $b \in \{0,\, 1,\, 2\}$ und $x_i \in S$. Die unbekannten Funktionen $f,\, F,\, G : S^2 \to (K;\ +;\ \cdot)$ erfüllen keine Regularitätsbedingung auf der Menge S^2,

* Vorgelegt am 10. Mai 1968 von P. M. Vasić.

aber der Wertevorrat ist ein Schiefkörper mit den Operationen $+$ und $\cdot$. Im System (3) wurden folgende Bezeichnungen verwendet

$$f_{ij}\equiv f(x_i, x_j);\ F_{ij}\equiv F(x_i, x_j);\ G_{ij}\equiv G(x_i, x_j) \qquad (i, j=1, 2, 3, 4).$$

Die erste Funktionalgleichung von (3) ist eigentlich die Gleichung (1), mit der allgemeinen Lösung die in (2) angeführt wurde. Die Funktion $f(x\, y)$, erfüllt die Bedingung

$$f(u, u)\equiv 0;\ f(x, y)+f(y, x)=0. \tag{4}$$

Die Funktionen $F(x, y)$ und $G(x, y)$ erfüllen auch dieselben Bedingungen, was aus der zweiten bzw. dritten Gleichung des Systems (3) hervorgeht indem man $x_1=x_2=x_3=x_4=u\neq 0$ oder nur $x_2=x_3$ annimmt.

In der zweiten Gleichung von (3) hat man $f_{ij}{}^{3+2a}$ und deshalb wird die Funktionalgleichung (1) zur dritten, fünften und siebenten Potenz erhoben und man bekommt:

$$\begin{aligned}
&f_{12}{}^3\cdot f_{34}{}^3+f_{13}{}^3\cdot f_{42}{}^3+f_{14}{}^3\cdot f_{23}{}^3=3f_{12}\cdot f_{13}\cdot f_{14}\cdot f_{34}\cdot f_{42}\cdot f_{23},\\
&f_{12}{}^5\cdot f_{34}{}^5+f_{13}{}^5\cdot f_{42}{}^5+f_{14}{}^5\cdot f_{23}{}^5=\frac{5}{2}f_{12}\cdot f_{13}\cdot f_{14}\cdot f_{34}\cdot f_{42}\cdot f_{23}\\
&\qquad\qquad\times[f_{12}{}^2\cdot f_{34}{}^2+f_{13}{}^2\cdot f_{42}{}^2+f_{14}{}^2\cdot f_{23}{}^2],\\
&f_{12}{}^7\cdot f_{34}{}^7+f_{13}{}^7\cdot f_{42}{}^7+f_{14}{}^7\cdot f_{23}{}^7=\frac{7}{4}f_{12}\cdot f_{13}\cdot f_{14}\cdot f_{34}\cdot f_{42}\cdot f_{23}\\
&\qquad\qquad\times[f_{12}{}^2\cdot f_{34}{}^2+f_{13}{}^2\cdot f_{42}{}^2+f_{14}{}^2\cdot f_{23}{}^2]^2.
\end{aligned}\tag{5}$$

Wendet man die Formeln (5) auf die zweite Funktionalgleichung von (3) an, so erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(F_{12}+f_{12}{}^{3+2a})(F_{34}+f_{34}{}^{3+2a})+(F_{13}+f_{13}{}^{3+2a})(F_{42}+f_{42}{}^{3+2a})\\
&\quad+(F_{14}+f_{14}{}^{3+2a})(F_{23}+f_{23}{}^{3+2a})=0.
\end{aligned}\tag{6}$$

Verfährt man ähnlich mit der Funktionalgleichung (6) wie mit der vorhergehenden letzten Gleichung aus (3), so erhält man folgende entgültige Gleichung:

$$\begin{aligned}
&[G_{12}+(F_{12}+f_{12}{}^{3+2a})^{3+2b}][G_{34}+(F_{34}+f_{34}{}^{3+2a})^{3+2b}]\\
&+[G_{13}+(F_{13}+f_{13}{}^{3+2a})^{3+2b}][G_{42}+(F_{42}+f_{42}{}^{3+2a})^{3+2b}]\\
&+[G_{14}+(F_{14}+f_{14}{}^{3+2a})^{3+2b}][G_{23}+(F_{23}+f_{23}{}^{3+2a})^{3+2b}]=0.
\end{aligned}\tag{7}$$

Wir haben folgenden Satz: Die Funktionalgleichungssysteme (3) mit drei unbekannten Funktionen f, F, G: $S^2\to(K;\ +;\ \cdot)$, mit $a\in\{0, 1, 2\}$ und $b\in\{0, 1, 2\}$ sind äquivalent mit dem aus (1), (6), (7) gebildeten System; die allgemeine Lösung, bestehend aus den beliebigen Funktionen $A(x)$, $B(x)$ $D(x)$, $E(x)$, $M(x)$, $N(x)$ ist folgende:

$$f(x, y)=\begin{vmatrix} A(x) & B(x)\\ A(y) & B(y)\end{vmatrix}, \tag{8}$$

$$F(x, y)=\begin{vmatrix} D(x) & E(x)\\ D(y) & E(y)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} A(x) & B(x)\\ A(y) & B(y)\end{vmatrix}^{3+2a}, \qquad a\in\{0, 1, 2\} \tag{9}$$

$$G(x, y)=\begin{vmatrix} M(x) & N(x)\\ M(y) & N(y)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} D(x) & E(x)\\ D(y) & E(y)\end{vmatrix}^{3+2b}. \qquad b\in\{0, 1, 2\}, \tag{10}$$

2. Die von L CARLITZ [2] angenommen Funktionalgleichung

$$f(x, y, z) f(u, v, w) + f(y, x, u) f(z, v, w) + f(x, y, v) f(z, u, w) + f(y, x, w) f(z, u, v) = 0 \tag{11}$$

hat im Körper der komplexenzahlen Q folgende allgemeine Lösung:

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} A(x) & B(x) & C(x) \\ A(y) & B(y) & C(y) \\ A(z) & B(z) & C(z) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

wobei $A(x)$, $B(x)$, $C(x): Q \to Q$, beliebige komplexe Funktionen sind.

In diesem Paragraphen nehmen wir folgendes System von Funktionalgleichungen mit zwei unbekannten Funktionen

$$f(x, y, z);\ F(x, y, z): Q \times Q \times Q \to Q \text{ an:}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{S} f(x, y, z) f(u, v, w) &\equiv f(x, y, z) f(u, v, w) + f(y, x, u) f(z, v, w) \\ &\quad + f(x, y, v) f(z, u, w) + f(y, x, w) f(z, u, v) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{S} F(x, y, z) F(u, v, w) &+ \mathrm{S} [F(x, y, z) f^3(u, v, w) + F(u, v, w) f^3(x, y, z)] \\ &+ 3 f(x, y, z) f(y, x, u) f(u, v, w) f(z, v, w) \\ &\times [f(x, y, v) f(z, u, w) + f(y, x, w) f(z, u, v)] \\ &+ 3 f(x, y, v) f(y, x, w) f(z, u, w) f(z, u, v) \\ &\times [f(x, y, z) f(u, v, w) + f(y, x, u) f(z, v, w)] = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Die erste Gleichung von (13) ist (11) und hat als allgemeine Lösung (12). Die zweite Gleichung aus (13) wird auf die Form:

$$\mathrm{S} [F(x, y, z) + f^3(x, y, z)] [F(u, v, w) + f^3(u, v, w)] = 0 \tag{14}$$

gebracht, indem man folgende Identität in Betrachtzieht:

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3\, ab (c + d) + 3\, cd (a + b), \qquad \text{wenn } a + b + c + d = 0.$$

Es ergibt sich der Satz: Das Funktionalgleichungssystem (13) mit zwei unbekannten Funktionen f, $F: Q \times Q \times Q \to Q$ ist äquivalent mit dem aus (11), (14) gebildeten System und hat im Körper der komplexen Zahlen folgende allgemeine Lösung:

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} A(x) & B(x) & C(x) \\ A(y) & B(y) & C(y) \\ A(z) & B(z) & C(z) \end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} D(x) & E(x) & H(x) \\ D(y) & E(y) & H(y) \\ D(z) & E(z) & H(z) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A(x) & B(x) & C(x) \\ A(y) & B(y) & C(y) \\ A(z) & B(z) & C(z) \end{vmatrix}^3, \tag{16}$$

bestehend aus sechs beliebigen komplexen Funktionen von einer komplexen Veränderlichen.

3. D. Ž. ĐOKOVIĆ, S. B. PREŠIĆ, R. Ž. ĐORĐEVIĆ und P. M. VASIĆ [4], [5], [6, S. 38], [7] haben die allgemeine stetige Lösung folgender zyklischen Funktionalgleichung untersucht

$$\sum_{i=1}^{m+n} C^{i-1} F_i(x_1+x_2+\cdots+x_m,\ x_{m+1}+x_{m+2}+\cdots+x_{m+n})=0 \qquad (m+n>2)$$

wobei mit "C" die zyklischen Vertauschungen bezeichnet wurde.

Wir nehmen hier nur folgende besondere zyklische Funktionalgleichung an:

$$F_1(x_1,\ x_2+x_3)+F_2(x_2,\ x_3+x_1)=F_3(x_3,\ x_1+x_2). \tag{17}$$

Ihre allgemeine stetige Lösung ist folgende:

$$\begin{aligned} F_1(x, y)&=(2x-y)f(x+y)+g_1(x+y),\\ F_2(x, y)&=(2x-y)f(x+y)+g_2(x+y),\\ F_3(x, y)&=(y-2x)f(x+y)+g_1(x+y)+g_2(x+y), \end{aligned} \tag{18}$$

wobei f, g_1, $g_2: R\to R$ reelle stetige beliebige Funktionen sind.

In diesem Paragraphen lösen wir folgendes Funktionalgleichugssystem:

$$\begin{aligned} &F_{1,n}(x_1,\ x_2+x_3)+nF_{1,n-1}(x_1,\ x_2+x_3)\,F_{2,1}(x_2,\ x_3+x_1)\\ &+\binom{n}{2}F_{1,n-2}(x_1,\ x_2+x_3)\,F_{2,2}(x_2,\ x_3+x_1)\\ &+\binom{n}{3}F_{1,n-3}(x_1,\ x_2+x_3)\,F_{2,3}(x_2,\ x_3+x_1)+\cdots\\ &+\binom{n}{p}F_{1,n-p}(x_1,\ x_2+x_3)\,F_{2,p}(x_2,\ x_3+x_1)+\cdots\\ &+F_{2,n}(x_2,\ x_3+x_1)=F_{3,n}(x_3,\ x_1+x_2),\ \text{für } n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5. \end{aligned} \tag{19}$$

Es enthält 15 unbekannte stetige Funktionen $F_{1,n}$, $F_{2,n}$, $F_{3,n}: R\times R\to R$. Die erste Gleichung des Systems enthält die unbekannten Funktionen $F_{1,1}(x, y)$; $F_{2,1}(x, y)$; $F_{3,1}(x, y)$ die durch (18) ausgedrückt sind, weil diese Gleichung mit der Gleichung (17) zusammenfällt. Zieht man die erste Gleichung des Systems im Betracht, dann erhält die zweite Gleichung die Form:

$$\begin{aligned} &[F_{1,2}(x_1,\ x_2+x_3)-F_{1,1}{}^2(x_1,\ x_2+x_3)]+[F_{2,2}(x_2,\ x_3+x_1)-\\ &-F_{2,1}{}^2(x_2,\ x_3+x_1)]=[F_{3,2}(x_3,\ x_1+x_2)-F_{3,1}{}^2(x_3,\ x_1+x_2)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Sie ist von der Form (17) und ihre allgemeine Lösug ist (18). Zieht man nun die zwei vorgehenden Gleichungen in Betracht, so bekommt die dritte Gleichung des Systems folgende neue Form:

$$\begin{aligned} &[F_{1,3}-3F_{1,2}\cdot F_{1,1}+2F_{1,1}{}^3]+[F_{2,3}-3F_{2,2}\cdot F_{2,1}+2F_{2,1}{}^3]\\ &\qquad=[F_{3,3}-3F_{3,2}\cdot F_{3,1}+2F_{3,1}{}^3]. \end{aligned} \tag{21}$$

Sie hat die Form (17) und daher ist ihre allgemeine Lösung durch (18) ausgedrückt. Verwendet man die oben erwähnten Gleichungen, so kann die vierte Gleichng des Systems unter folgende Form gebracht werden:

$$(22)\quad \begin{aligned}&[F_{1,4}-4F_{1,3}\cdot F_{1,1}+12F_{1,2}\cdot F_{1,1}^2-3F_{1,2}^2-6F_{1,1}^4]\\&+[F_{2,4}-4F_{2,3}\cdot F_{2,1}+12F_{2,2}\cdot F_{2,1}^2-3F_{2,2}^2-6F_{2,1}^4]\\&=[F_{3,4}-4F_{3,3}\cdot F_{3,1}+12F_{3,2}\cdot F_{3,1}^2-3F_{3,2}^2-6F_{3,1}^4].\end{aligned}$$

Man stellt fest, dass sie die Form (17) hat und ihre allgemeine stetige Lösung durch (18) ausgedrückt ist. Ähnlich wird auch die letzte Gleichung des Systems (19) auf die Form (17) gebracht:

$$(23)\quad \begin{aligned}&\sum_{i=1}^{2}[F_{i,5}-5F_{i,4}\cdot F_{i,1}+20F_{i,3}\cdot F_{i,1}^2-60F_{i,2}\cdot F_{i,1}^3+30F_{i,2}^2\cdot F_{i,1}\\&\quad-10F_{i,3}\cdot F_{i,2}+24F_{i,1}^5]=F_{3,5}-5F_{3,4}\cdot F_{3,1}+20F_{3,3}\cdot F_{3,1}^2\\&\quad-60F_{3,2}\cdot F_{3,1}^3+30F_{3,2}^2\cdot F_{3,1}-10F_{3,3}\cdot F_{3,2}+24F_{3,1}^5.\end{aligned}$$

Ihre allgemeine stetige Lösung ist auch durch (18) ausgedrüskt.

Als Schlussfolgerung haben wir den Satz: Das Funktionalgleichungssystem (19) von 5 Gleichungen ung 15 unbekannten Funktionen $F_{i,n}(x, y): R\times R\to R$, wobei $i=1, 2, 3$ und $n=1, 2, 3, 4, 5$ ist äquivalent mit dem System gebildet aus den Gleichungen (17) (20), (21), (22), (23) und ihre allgemeine reelle und stetige Lösung hängt von 15 beliebigen reellen und stetigen Funktionen von einer reellen Veränderlichen ab:

$$(24)\quad \begin{aligned}&F_{i,1}(x, y)=(2x-y)f(x+y)+g_i(x+y)\qquad (i=1, 2),\\&F_{3,1}(x, y)=(y-2x)f(x+y)+g_1(x+y)+g_2(x+y);\end{aligned}$$

$$(25)\quad \begin{aligned}&F_{i,2}(x, y)=(2x-y)\,l(x+y)+h_i(x+y)+F_{i,1}^2(x, y)\qquad (i=1, 2),\\&F_{3,2}(x, y)=(y-2x)\,l(x+y)+h_1(x+y)+h_2(x+y)+F_{3,1}^2(x, y);\end{aligned}$$

$$(26)\quad \begin{aligned}&F_{i,3}(x, y)=(2x-y)\,m(x+y)+k_i(x+y)+3F_{i,2}\cdot F_{i,1}-2F_{i,1}^3\qquad (i=1, 2),\\&F_{3,3}(x,y)=(y-2x)\,m(x+y)+k_1(x+y)+k_2(x+y)+3F_{3,2}\cdot F_{3,1}-2F_{3,1}^3;\end{aligned}$$

$$(27)\quad \begin{aligned}&F_{i,4}(x, y)=(2x-y)\,p(x+y)+u_i(x+y)+4F_{i,3}\cdot F_{i,1}\\&\qquad\qquad -12F_{i,2}\cdot F_{i,1}^2++3F_{i,2}^2+6F_{i,1}^4\qquad (i=1, 2),\\&F_{3,4}(x, y)=(y-2x)\,p(x+y)+u_1(x+y)+u_2(x+y)+4F_{3,3}\cdot F_{3,1}\\&\qquad\qquad -12F_{3,2}\cdot F_{3,1}^2+3F_{3,2}^2+6F_{3,1}^4;\end{aligned}$$

$$(28)\quad \begin{aligned}&F_{i,5}(x\ y)=(2x-y)\,q(x+y)+v_i(x+y)+5F_{i,4}\cdot F_{i,1}-20F_{i,3}\cdot F_{i,1}^2\\&\qquad +60F_{i,2}\cdot F_{i,1}^3-30F_{i,2}^2\cdot F_{i,1}+10F_{i,3}\cdot F_{i,2}-24F_{i,1}^5\qquad (i=1, 2),\\&F_{3,5}(x, y)=(y-2x)\,q(x+y)+v_1(x+y)+v_2(x+y)+5F_{3,4}\cdot F_{3,1}\\&\qquad -20F_{3,3}\cdot F_{3,1}^2+60F_{3,2}\cdot F_{3,1}^3-30F_{3,2}^2\cdot F_{3,1}+10F_{3,3}\cdot F_{3,2}-24F_{3,1}^5.\end{aligned}$$

4. Wir nehmen folgendes zyklisches nichtlineares Funktionalgleichungssystem an:

$$
\begin{aligned}
&F_{1,1}+F_{2,1}=F_{3,1}+F_{4,1};\\
&F_{1,2}+2\,m\,[F_{1,1}+F_{2,1}]^{2m-2}\cdot F_{1,1}\cdot F_{2,1}-m\,(2\,m-3)\,[F_{1,1}+F_{2,1}]^{2m-4}\\
&\times F_{1,1}{}^{2}\cdot F_{2,1}{}^{2}+\frac{m\,(2\,m-4)\,(2\,m-5)}{3}\,[F_{1,1}+F_{2,1}]^{2m-6}\cdot F_{1,1}{}^{3}\cdot F_{2,1}{}^{3}+F_{2,2}\\
&=F_{3,2}+2\,m\,[F_{3,1}+F_{4,1}]^{2m-2}\cdot F_{3,1}\cdot F_{4,1}-m\,(2\,m-3)\,[F_{3,1}+F_{4,1}]^{2m-4}\\
(29)\quad &\times F_{3,1}{}^{2}\cdot F_{4,1}{}^{2}+\frac{m\,(2\,m-4)\,(2\,m-5)}{3}\,[F_{3,1}+F_{4,1}]^{2m-6}\cdot F_{3,1}{}^{3}\cdot F_{4,1}{}^{3}+F_{4,2};\\
&F_{1,3}+(3+2\,a)\,[F_{1,2}-F_{1,1}{}^{2m}]\,[F_{2,2}-F_{2,1}{}^{2m}]\,[F_{1,2}+F_{2,2}-F_{1,1}{}^{2m}-F_{2,1}{}^{2m}]\\
&\times\{[F_{1,2}-F_{1,1}{}^{2m}]^{2}+[F_{1,2}-F_{1,1}{}^{2m}]\cdot[F_{2,2}-F_{2,1}{}^{2m}]+[F_{2,2}-F_{2,1}{}^{2m}]^{2}\}+F_{2,3}\\
&=F_{3,3}+(3+2\,a)\,[F_{3,2}-F_{3,1}{}^{2m}]\,[F_{4,2}-F_{4,1}{}^{2m}]\\
&\times[F_{3,2}+F_{4,2}-F_{3,1}{}^{2m}-F_{4,1}{}^{2m}]\cdot\{[F_{3,2}-F_{3,1}{}^{2m}]^{2}\\
&+[F_{3,2}-F_{3,1}{}^{2m}]\cdot[F_{4,2}-F_{4,1}{}^{2m}]+[F_{4,2}-F_{4,1}{}^{2m}]^{2}\}+F_{4,3};
\end{aligned}
$$

wobei $m=1, 2, 3$ und $a=0, 1, 2$ reelle und ganzzahlige Parameter sind. Wir setzen voraus, dass die unbekannten Funktionen $F_{i,j}(x, y)$: $R\times R\to R$ mit $i=1, 2, 3, 4$ und $j=1, 2, 3$ nur stetig sind, und die Argumente in (29) zyklisch aufeinanderfolgen:

$$
(30)\quad
\begin{aligned}
&F_{1,j}=F_{1,j}\left(\frac{x_1+x_2-2\,x_1x_2}{1-2\,x_1x_2},\ x_3\right);\quad F_{2,j}=F_{2,j}\left(\frac{x_2+x_3-2\,x_2x_3}{1-2\,x_2x_3},\ x_4\right);\\
&F_{3,j}=F_{3,j}\left(\frac{x_3+x_4-2\,x_3x_4}{1-2\,x_3x_4},\ x_1\right);\quad F_{4,j}=F_{4,j}\left(\frac{x_4+x_1-2\,x_1x_4}{1-2\,x_1x_4},\ x_2\right)
\end{aligned}
$$

$(j=1, 2, 3)$.

Damit man die allgemeine reelle und stetig Lösung des Systems (29) bestimmen kann, bringt man durch algeraische Operationen die zweite Gleichung auf folgende Form:

$$
(31)\qquad F_{1,2}-F_{1,1}{}^{2m}+F_{2,2}-F_{2,1}{}^{2m}=F_{3,2}-F_{3,1}{}^{2m}+F_{4,2}-F_{4,1}{}^{2m}\qquad(m=1, 2, 3).
$$

welche offenbar auf die erste Gleichung des Systems (29) gebracht werden kann. Wenn wir von der Form (31) ausgehen, deren Funktionen in der dritten Gleichung von (29) vorkommen, und zieht folgende algebraische Identität in Betracht

$$
(u+v)^{3+2a}=u^{3+2a}+v^{3+2a}+(3+2\,a)\,uv\,(u+v)\,[u^{2}+uv+v^{2}]^{a}\qquad(a=0, 1, 2),
$$

dann erhält die dritte Gleichung von (29) die kanonische Form:

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad &F_{1,3}-(F_{1,2}-F_{1,1}{}^{2m})^{3+2a}+F_{2,3}-(F_{2,2}-F_{2,1}{}^{2m})^{3+2a}\\
&=F_{3,3}-(F_{3,2}-F_{3,1}{}^{2m})^{3+2a}+F_{4,3}-(F_{4,2}-F_{4,1}{}^{2m})^{3+2a}\\
&(m=1, 2, 3;\ a=0, 1,2).
\end{aligned}
$$

Wir haben nun das System (29) auf folgendes äquivalentes System reduziert:

$$F_{1,1}+F_{2,1}=F_{3,1}+{}_{4,1};$$

(33) $$F_{1,2}-F_{1,1}{}^{2m}+F_{2,2}-F_{2,1}{}^{2m}=F_{3,2}-F_{3,1}{}^{2m}+F_{4,2}-F_{4,1}{}^{2m};$$

$$F_{1,3}-(F_{1,2}-F_{1,1}{}^{2m})^{3+2a}+F_{2,3}-(F_{2,2}-F_{2,1}{}^{2m})^{3+2a}$$
$$=F_{3,3}-(F_{3,2}-F_{3,1}{}^{2m})^{3+2a}+F_{4,3}-(F_{4,2}-F_{4,1}{}^{2m})^{3+2a}$$

$(m=1,\ 2,\ 3;\quad a=0,\ 1,\ 2)$.

Um die erste Gleichung zu lösen, führen wir neue Veränderliche [**8**] ein:

(34) $$x_j=f(u_j)=\frac{\operatorname{tg} u_j}{1+\operatorname{tg} u_j},\quad u_j\in\left(-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right);\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

ebenso die neuen Funktionen:

(35)
$$F_{1,1}[f(u_1+u_2),\ f(u_3)]=G_{1,1}(u_1+u_2,\ u_3),$$
$$F_{2,1}[f(u_2+u_3),\ f(u_4)]=G_{2,1}(u_2+u_3,\ u_4),$$
$$F_{3,1}[f(u_3+u_4),\ f(u_1)]=G_{3,1}(u_3+u_4,\ u_1),$$
$$F_{4,1}[f(u_4+u_1),\ f(u_2)]=G_{411}(u_4+u_1,\ u_2),$$

und erhalten

(36) $$G_{1,1}(u_1+u_2,\ u_3)+G_{2,1}(u_2+u_3,\ u_4)=G_{3,1}(u_3+u_4,\ u_1)+G_{4,1}(u_4+u_1,\ u_2).$$

Diese Funktionalgleichung wurde von D. Ž. Đoković in seiner Doktorarbeit [**6**, S. 42] untersucht, deren allgemeine, reelle, stetige Lösung nur von beliebige Konstanten abhängt:

(37)
$$G_{1,1}(u,\ v)=a_1u^2+(a_1-a_2)v^2-2a_2uv+bu+cv+p,$$
$$G_{2,1}(u,\ v)=a_2u^2+(a_1+a_2)v^2+2a_1uv+du+ev+q,$$
$$G_{3,1}(u,\ v)=a_1u^2+(a_1-a_2)v^2-2a_2uv+(c+d)u+(b+c+d-e)v+r,$$
$$G_{4,1}(u,\ v)=a_2u^2+(a_1+a_2)v^2+2a_1uv+(e-d-c)u+(b+d)v+p+q-r.$$

Durch Umkehrung der Substitution (34) und zurückkommend auf die Funktionen $F_{1,1}(x,y)$; $F_{2,1}(x,y)$; $F_{3,1}(x,y)$; $F_{4,1}(x,y)$ erhält man folgende stetige Lösung für die Funktionen der ersten Gleichung (29) oder (33):

(38)
$$F_{1,1}(x,\ y)=a_1\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_1-a_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2$$
$$-2a_2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+b\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}$$
$$+c\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+p,$$
$$F_{2,1}(x,\ y)=a_2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_1+a_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2$$
$$+2a_1\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+d\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}$$
$$+e\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+q,$$

$$F_{3,1}(x, y)=a_1\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_1-a_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2$$

$$-2a_2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+(c+d)\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}$$

$$+(b+c+d-e)\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+r,$$

(38)

$$F_{4,1}(x, y)=a_2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_1+a_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2$$

$$+2a_1\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+(e-d-c)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}$$

$$+(b+d)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+p+q-r,$$

wobei a_1, a_2, b, c, d, e, p, q, r beliebige reelle Konstanten sind und

$$x, y\in(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty).$$

Die zweite Gleichung aus (33) oder die Gleichung (31) ergibt mit Hilfe der Substitutionen

$$H_{1,2}=F_{1,2}-F_{1,1}{}^{2m},\quad H_{2,2}=F_{2,2}-F_{2,1}{}^{2m},\quad H_{3,2}=F_{3,2}-F_{3,1}{}^{2m},\quad H_{4,2}=F_{4,2}-F_{4,1}{}^{2m},$$

eine Funktionalgleichung in H, welche (38) als Lösung hat So erhält man für die Funktionen der zweiten Gleichung aus (29) oder aus (33) folgende Ausdrücke:

$$F_{1,2}(x, y)=a_3\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_3-a_4)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2$$

$$-2a_4\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+b_1\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}$$

$$+c_1\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+p_1+\left[a_1\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2\right.$$

$$+(a_1-a_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2-2a_2\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}$$

(39)

$$\left.+b\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}+c\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+p\right]^{2m},$$

$$F_{2,2}(x, y)=a_4\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_3+a_4)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2$$

$$+2a_3\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+d_1\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}$$

$$+e_1\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+q_1+\left[a_2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2\right.$$

$$+(a_1+a_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2+2a_1\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}$$

$$\left.+d\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}+e\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+q\right]^{2m},$$

$$
\begin{aligned}
F_{3,2}(x,y)&=a_3\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_3-a_4)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2\\
&-2a_4\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+(c_1+d_1)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\\
&+(b_1+c_1+d_1-e_1)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+r_1+\Big[a_1\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2\\
&+(a_1-a_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2-2a_2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\\
&+(c+d)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}+(b+c+d-e)\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+r\Big]^{2m},
\end{aligned}
\tag{39}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{4,2}(x,y)&=a_4\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_3+a_4)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2\\
&+2a_3\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+(e_1-d_1-c_1)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\\
&+(b_1+d_1)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+p_1+q_1-r_1+\Big[a_2\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2\\
&+(a_1+a_2)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2+2a_1\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\\
&+(e-d-c)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}+(b+d)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+p+q-r\Big]^{2m},
\end{aligned}
$$

wobei a_3, a_4, b_1, c_1, d_1, e_1, p_1, q_1, r_1 neben denen aus (38) beliebige reelle Konstanten sind; $m=1, 2, 3$ und $x, y\in(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$.

Die dritte Gleichung aus (33), welche eigentlich die Gleichung (32) ist, wird ähnlich gelöst, und die unbekannten Funktionan haben folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
F_{1,3}(x,y)&=a_5\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_5-a_6)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2\\
&-2a_6\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+b_2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\\
&+c_2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+p_2+\Big[a_3\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2\\
&+(a_3-a_4)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2-2a_4\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\\
&+b_1\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}+c_1\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+p_1\Big]^{3+2\alpha},
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{2,3}(x,y)&=a_6\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2+(a_5+a_6)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2\\
&+2a_5\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+d_2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\\
&+e_2\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+q_2+\Big[a_4\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2\\
&+(a_3+a_4)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2+2a_3\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\\
&+d_1\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}+e_1\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}+q_1\Big]^{3+2\alpha},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{3,3}(x, y) = {} & a_5\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2 + (a_5 - a_6)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2 \\
& - 2a_6 \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1} \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1} + (c_2 + d_2)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1} \\
& + (b_2 + c_2 + d_2 - e_2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1} + r_2 + \left[a_3\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2\right. \\
& + (a_3 - a_4)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2 - 2a_4 \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1} \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1} \\
& \left. + (c_1 + d_1)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1} + (b_1 + c_1 + d_1 - e_1)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1} + r_1\right]^{3+2a},
\end{aligned}
\tag{40}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{4,3}(x, y) = {} & a_6\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2 + (a_5 + a_6)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2 + 2a_5\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1} \\
& \times \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1} + (e_2 - d_2 - c_2)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1} + (b_2 + d_2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1} \\
& + p_2 + q_2 - r_2 + \left[a_4\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1}\right)^2 + (a_3 + a_4)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1}\right)^2\right. \\
& + 2a_3\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1} \cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1} + (e_1 - d_1 - c_1)\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{x-1} \\
& \left. + (b_1 + d_1)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{y-1} + p_1 + q_1 - r_1\right]^{3+2a},
\end{aligned}
$$

wobei die Parameter $a=0$, 1, 2 und a_5, a_6, b_2, c_2, d_2, e_2, p_2, q_2, r_2 neben denen aus (39) beliebige reelle Konstanten sind und $x, y \in R \setminus \{1\}$.

Somit gelangen wur zu folgendem Satz: Die Funktionalgleichungssysteme (29) von drei Gleichungen und 12 unbekannten Funktionen $F_{i,j}(x, y): (R \setminus \{1\})^2 \to R$ mit $i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3$ und $m=1, 2, 3$; $a=0, 1, 2$ ist äquivalent mit dem System (33); ihre allgemeinen reellen und stetigen Lösungen hängen nur von reellen beliebigen Konstanten ab und sind durch (38), (39), (40) ausgedrückt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] D. S. Mitrinović, S. B. Prešić, *Sur une équation fonctionnelle cyclique*, diese Publications № **70—76** (1962), 1—2.

[2] L. Carlitz, *A special functional equation*, diese Publications, № **97—99** (1963), 1—3.

[3] P. M. Vasić, *Équation fonctionnelle d'un certain type de déterminants*, Publications de l'Institut Mathématicue de Belgrade, **2** (16) (1962), 65—70.

[4] D. Ž. Đoković, *Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy*, diese Publica ions, № **61—64** (1961), 21—28.

[5] S. B. Prešić, D. Ž. Đoković, *Sur une équation fonctionnelle*, Bull. Soc. mathématicienes et physicienes de la R. P de Serbie **13** (1961), 149—152.

[6] D. Ž. Đoković, *O nekim klasama cikličnih funkcionalnih jednačina*, diese Publications **114** (1963), Seiten 48.

[7] D. Ž. Đoković, R. Ž. Đorđević, P. M. Vasić, *On a class of functional equation*, Publications de l'Institut Mathématique de Belgrade **6** (20) (1966), 65—76.

[8] Oct. Em. Gheorghiu, *Două ecuații funcționale de typ V. Alaci*, Analele Universitătii din Timișoara, Seria Științe Matematice-Fizice **4** (1966), 155—159.