PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 210 — № 228 (1968)

219. DOPUNE KAMKEOVOM DELU. XIII. O KRITERIJUMIMA INTEGRABILNOSTI RICCATIEVE JEDNAČINE

D. S. Mitrinović i *P. M. Vasić*

(Primljeno 5. januara 1968)

0. U članku [**2**], pored ostalog rezimirali smo rezultate iz članka [**1**]. U ovoj Noti, kao i u nekoliko narednih koje će izići pod istim naslovom, pokazaćemo kako su mnogi kriterijumi o integrabilnosti Riccatieve jednačine, publikovani posle objavljivanja članka [**1**], samo partikularni slučajevi stavova iz [**1**]. Pri analiziranju ovih kriterijuma nećemo se držati hronološkog reda. Naravno, ovde će biti obuhvaćeni i kriterijumi o integrabilnosti linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda, s obzirom da se one jednostavnim transformacijama svode na Riccatievu jednačinu.

S obzirom da su neki kriterijumi dati za Riccatievu jednačinu u kanoničnom obliku a neki za Riccatievu jednačinu u opštem obliku, pomenućemo dva načina pomoću kojih se Riccatieva jednačina može svesti na kanonični oblik (videti, na primer, [**1**]). Transformacije koje ćemo koristiti podesne su, između ostalog, i zbog toga što se ne menja nezavisno promenljiva, već samo funkcija.

Prvi način. Riccatieva jednačina

$$\frac{dY}{dx}=A(x)\,Y^2+B(x)\,Y+C(x) \tag{0.1}$$

smenom funkcije

$$Y=-\frac{y}{A}-\frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A^2}+\frac{B}{A}\right) \tag{0.2}$$

svodi se na kanonični oblik

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{1}{4}B^2+\frac{1}{4}\left(\frac{A'}{A}\right)^2-\frac{1}{2}B'+\frac{1}{2}B\frac{A'}{A}-\frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A}\right)'-AC. \tag{0.3}$$

Drugi način. Riccatieva jednačina (0.1) smenom funkcije

$$\frac{1}{Y}=\frac{y}{C}+\frac{1}{2}\left(\frac{C'}{C^2}-\frac{B}{C}\right) \tag{0.4}$$

svodi se na kanonični oblik

$$\frac{dy}{dx}+y^2=\frac{1}{4}B^2+\frac{1}{4}\left(\frac{C'}{C}\right)^2+\frac{1}{2}B'-\frac{1}{2}B\frac{C'}{C}-\frac{1}{2}\left(\frac{C'}{C}\right)'-AC. \tag{0.5}$$

Primetimo da na ove načine možemo na kanonični oblik svesti i neke degenerativne slučajeve Riccatieve jednačine (0.1). Tako se u slučaju $C=0$ (Bernoullieva jednačina) može primeniti transformacija (0.2) a u slučaju $A=0$ (linearna jednačina) transformacija (0.4). U ovim slučajevima dobija se kanonični oblik Riccatieve jednačine koja se može integraliti pomoću kvadratura.

1. U članku [3] dat je sledeći kriterijum o integrabilnosti linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda:

Linearna diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2 w}{dt^2}+G(t)\frac{dw}{dt}+H(t)w=0 \tag{1.1}$$

intergrabilna je pomoću kvadratura ako su funkcije G i H oblika

$$G(t)=-\frac{f''(t)}{f'(t)},\quad H(t)=-\frac{d^2F(f)}{df^2}\frac{(f'(t))^2}{F(f)} \tag{1.2}$$

gde su F i f $(f'(x)\neq 0)$ proizvoljne funkcije.

Ovaj kriterijum izveden je na sledeći način.

Jednačina (1.1) transformacijom

$$x=\int e^{-\int G(t)dt}\,dt,\qquad u(x)=w(t) \tag{1.3}$$

prelazi u jednačinu

$$(x')^2\frac{d^2 u}{dx^2}+Hu=0. \tag{1.4}$$

Ako se pođe od integrabilne jednačine

$$F(x)\frac{d^2 u}{dx^2}-\frac{d^2 F}{dx^2}u=0 \tag{1.5}$$

(jedno njeno partikularno rešenje je $u=F(x)$), koja pripada tipu (1.4), zaključuje se da će jednačina (1.1) biti integrabilna ako su funkcije G i H oblika (1.2).

Ako se od linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda pomoću smena $u=\exp\left(\int y\,dx\right)$, $w=\exp\left(\int z\,dt\right)$ pređe na Riccatievu diferencijalnu jednačinu, gore izloženi rezultat svodi se na sledeće.

Ako se pođe od integrabilne diferencijalne jednačine

$$y'+y^2=\frac{F''(x)}{F(x)}, \tag{1.6}$$

čije je jedno partikularno rešenje $y=\dfrac{F'(x)}{F(x)}$, i uvedu transformacije

$$x=f(t),\qquad y(x)=z(t)\frac{1}{f'(t)}, \tag{1.7}$$

dobija se Riccatieva jednačina

$$\frac{dz}{dt}+z^2=\frac{f''(t)}{f'(t)}z+\frac{d^2F(f)}{df^2}\frac{(f'(t))^2}{F(f)}$$

koja je takođe integrabilna.

Iz ovoga se vidi da je pomenuti kriterijum specijalan slučaj stava **1** (videti [**1**] ili [**2**]). Zaista, stavljajući u formulama (2.5) iz [**2**] $P=f$, $Q=\frac{1}{f'(t)}$, $R=0$, i u (2.1) $g=\frac{F''}{F}$, dobijamo kriterijum iz [**3**].

2. U članku [**4**] polazeći od jednačine

$$\frac{du}{dw}-\frac{dx}{dw}=0 \tag{2.1}$$

i uvodeći transformacije

$$u=\frac{\varphi(t)}{f(t)+z}, \quad x=\psi(t) \tag{2.2}$$

autor dobija integrabilnu Riccatievu jednačinu

$$\frac{dz}{dt}+P(t)y^2+Q(t)y+R(t)=0, \tag{2.3}$$

gde je

$$P(t)=\frac{\psi'(t)}{\varphi(t)},\quad Q(t)=\frac{2f(t)\psi'(t)-\varphi'(t)}{\varphi(t)},\quad R(t)=\frac{f^2(t)\psi'(t)+\varphi(t)f'(t)-\varphi'(t)f(t)}{\varphi(t)}.$$

Pokazaćemo da je ovaj rezultat partikularan slučaj jednog od rezultata iz članka [**1**]. Jednačini (2.1), na osnovu formula (0.4) i (0.5) odgovara kanonični oblik

$$\frac{dy}{dx}+y^2=0, \tag{2.4}$$

gde je $y=\frac{1}{u}$. Na osnovu ovoga, transformacije (2.2) glase

$$y=\frac{1}{\varphi(t)}z+\frac{f(t)}{\varphi(t)}.$$

Prema tome, ovo je partikularan slučaj stava **2** iz članka [**2**], što se vidi ako se se u pomenutom stavu stavi $g=0$, $\psi=P$, $\frac{1}{\varphi}=Q$, $\frac{f}{\varphi}=R$.

U vezi sa člankom [**4**] primetimo takođe i sledeće. Transformacije koje autor članka [**4**] koristi (npr. transformacije (2.2)) naziva dvostrukim jer polazi od jednačina u kojima figurišu dve funkcije (u i x) i jedna nezavisno promenljiva (t). Međutim u svim jednačinama koje ovaj autor posmatra, jedna promenljiva figuriše samo prividno. To je slučaj sa promenljivom t u jednačini (2.1)

$\left(\text{ova jednačina se može napisati u obliku } \frac{du}{dx}=1\right)$. Isti je slučaj i sa drugom jednačinom koju autor uzima kao primer:

$$\frac{\frac{du}{dx}v-\frac{dv}{dx}u}{\frac{dv}{dx}}-A\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}}-B=0 \qquad (A,\ B=\text{const}).$$

Ova jednačina takođe se može napisati bez promenljive x u obliku

$$v\frac{du}{dv}-u-A\frac{du}{dv}-B=0.$$

Prema tome, u oba slučaja to su uobičajene transformacije jedne funkcije i jedne nezavisno promenljive jednom novom funkcijom i jednom novom nezavisno promenljivom.

3. U članku [**5**] autor polazi od diferencijalne jednačine

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\,y^2+g(x)\,y+h(x) \tag{3.1}$$

i uvodi transformaciju

$$Y=\frac{k_1 z+G(x)}{k_2 z+F(x)} \qquad (k_1,\ k_2=\text{const}). \tag{3.2}$$

Ovom transformacijom dobija se jednačina

$$(k_1 F-k_2 G)\,z'+(k_1^2 f+k_1 k_2 g+k_2^2 h)\,z^2+(2\,fk_1 G+k_2 gG+k_1 gF+2\,k_2 hF$$
$$+k_1 F'-k_2 G')\,z+(GF'-FG'+fG^2+g\,FG+hF^2)=0\,.$$

Ova jednačina će biti integrabilna ako je, na primer,

$$k_1^2 f(x)+k_1 k_2\,g(x)+k_2^2\,h(x)=0,$$

a tada će biti integrabilna i jednačina (3.1).

Ako jednačinu (3.1) svedemo na kanonični oblik

$$\frac{dy}{dx}+y^2=g(x)$$

pomoću transformacije (0.2), formula (3.2) postaje

$$y=\frac{\left(-\frac{k_1}{k_2}f-\frac{1}{2}\frac{f'}{f}-\frac{1}{2}g\right)z-\frac{1}{k_2}\,Gf-\frac{1}{2}\frac{f'}{f}F-\frac{1}{2}gF}{z+F}\,.$$

Prema tome, ovo je specijalan slučaj transformacije (2.4) (videti [**2**]) koja uspostavlja vezu između dve integrabilne Riccatieve jednačine.

LITERATURA

[1] D. S. MITRINOVIĆ: *Quelques propositions relatives à l'équation différentielle de Riccati*, Bulletin de l'Academie des sciences mathématiques et naturelles, A. Sciences mathématiques et physiques, Belgrade, **6** (1939), 121—156.

[2] D. S. MITRINOVIĆ et P. M. VASIĆ: *Compléments au Traité de Kamke. XII. Des critères d'integrabilité de l'équation diférentielle de Riccati*, ces Publications № **175** — № **179** (1967), 15—21.

[3] J. ZBORNIK, *Auflösung linearer homogener Differentialgleichung 2-Ordunug*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 7 (1956), 64—74. Ovaj članak je preveden i objavljen u ruskom izdanju knjige Э. KAMKE, *Справочник по обыкновенным диференциальным уравнениям*, Москва 1961, pod naslovom: *О решении линейных однородных уравнений второго порядка* na str. 659—669.

[4] Ђ. KARAPANDŽIĆ: *Dvostruke transformacije i njihova primena na integraciju običnih diferencijalnih jednačina*, Godišnjak Poljoprivredno-šumarskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, **1** (1948), 361—368.

[5] V. UDRESCU, *Asupra ecuaţici lui Riccati*, Gazeta Matematică şi fizică, **A 6** (1954), 545—546.

Résumé

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE KAMKE. XIII. DES CRITÈRES D'INTÉGRABILITÉ DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE RICCATI

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

L'article [2] contient, entre autre, un résumé de l'article [1]. Dans cette Note, ainsi que dans plusieurs d'autres que serons publiés succésivement sous le titre indiqué plus haut, nous montrerons le fait que de nombreux cas d'intégrabilité de l'équation de Riccati, obtenus après la parution de l'article [1], ne sont que des cas particuliers des critères trouvés dans [1].

Cette Note analyse les „nouveaux" critères obtenus dans [3], [4] et [5], en faisant voir qu'ils sont contenus dans [1] comme des cas très particuliers.

*

Correction. Dans l'article [2] aux formules (1.8), (2.19), (2.22) et (2.31) plusieurs fautes d'impression se sont glissées qui ne se trouvaient pas dans l'article original [1]. Voici la forme correcte des formules en question:

$$(1.8)\qquad z=\frac{C_2F_2(x)+G_2(x)}{C_2H_2(x)+K_2(x)}\qquad (F_2K_2-H_2G_2\neq 0;\ C_2,\ \text{constante d'intégration}).$$

$$(2.19)\qquad y_1=\frac{g-h^2}{h}\,\frac{y}{y-h}-\frac{g}{h}-\frac{1}{2}\,\frac{g'}{g-h^2}\qquad (h\neq 0).$$

$$\frac{dy_1}{dx}+y_1{}^2=g(x)-\frac{3}{2}\frac{g'}{\sqrt{g}}+\frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2+\sqrt{g}\,\frac{g''}{g'}-\frac{1}{2}\frac{g'''}{g'}-\frac{3}{16}\left(\frac{g'}{g}\right)^2. \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
&(QT-R)^2\,F(t) \\
&=(P'Tg-P'QR-QT'-R')\,(P'Tg-P'QR-Q'T) \\
&-(P'g-Q'-P'Q^2)\,(P'T^2g-P'R^2+RT'-R'T)+(QT-R) \\
&\times(Q''T+Q'T'-P''Tg-P'T'g-P'^2Tg'+P''QR+P'Q'R+P'QR) \\
&+(QT-R)\,(P'Tg-P'QR-Q'T)\,\frac{\frac{d}{dt}\,(P'g-Q'-P'Q^2)}{P'g-Q'-P'Q^2} \\
&+\frac{3}{4}\,(QT-R)^2\left(\frac{\frac{d}{dt}\,(P'g-Q'-P'Q^2)}{P'g-Q'-P'Q^2}\right)^2-\frac{1}{2}\,(QT-R)^2\,\frac{\frac{d^2}{dt^2}\,(P'g-Q'-P'Q^2)}{P'g-Q'-P'Q^2}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$