PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 210 — № 228 (1968)

# 217. GÉNÉRALISATION D'UNE INÉGALITÉ DE HENRICI

*D. S. Mitrinović* et *P. M. Vasić*

(Reçu le 20 mars 1968)

***Notations.*** Soient

$$P_n(a\,;p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+p_k a_k},\qquad G_n(a)=\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)^{\frac{1}{n}},$$

où $a=(a_1,\ldots,a_n)$ et $p=(p_1,\ldots,p_n)$, avec $n>1$, sont deux suites de nombres réels positifs.

**1.** Nous allons tout d'abord démontrer le résultat suivant:

***Proposition* 1.** *Dans le cas où*

$$a_1\cdots a_{n-1}\geqslant p_n \quad et \quad a_n\geqslant p_n^{\frac{-n}{n+1}}(a_1\cdots a_{n-1})^{-\frac{1}{n+1}},$$

*on a*

$$\tag{1} P_n(a\,;p)-\frac{n}{1+G_n(a)}\geqslant P_{n-1}(a;\,p)-\frac{n-1}{1+p_n\,G_{n-1}(a)}$$

*avec l'égalité si et seulement si*

$$a_n=(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}p_n^{-\frac{n}{n-1}}.$$

***Proposition* 1′.** *La proposition* **1** *reste en vigueur si tous les signes* $\geqslant$, *apparaissant dans la proposition* **1**, *on remplace par* $\leqslant$.

**Preuve.** Considérons la fonction $f$, définie par

$$f(a_n)=P_n(a;\,p)-\frac{n}{1+G_n(a)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+p_k a_k}-\frac{n}{1+\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)^{1/n}},$$

ainsi que les dérivées:

$$(2)\qquad f'(a_n)=-\frac{p_n}{(1+p_n a_n)^2}+\frac{(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}\,a_n^{\frac{1-n}{n}}}{(1+(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}})^2},$$

$$(3)\qquad f''(a_n)=\frac{2p_n^2}{(1+p_n a_n)^3}+\frac{(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$\times\frac{(1-n)\,a_n^{\frac{1-2n}{n}}-(1+n)\,a_n^{\frac{2-2n}{n}}(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{(1+(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}})^3}.$$

En posant $a_n=x^n\,(x>0)$ et $a_1\cdots a_{n-1}=\alpha^n\,(\alpha>0)$, l'équation $f'(a_n)=0$ prend la forme suivante

$$\alpha p_n^2 x^{2n}-\alpha^2 p_n x^{n+1}-p_n x^{n-1}+\alpha=0.$$

Elle n'a que deux racines positives en $x$, à savoir

$$x_1=\left(\frac{\alpha}{p_n}\right)^{\frac{1}{n-1}},\qquad x_2=(\alpha p_n)^{-\frac{1}{n+1}}.$$

Par suite, les zéros uniques positifs de $f'$ en $a_n$ sont:

$$(a_n)_1=p_n^{-\frac{n}{n-1}}(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}},\qquad (a_n)_2=p_n^{\frac{-n}{n+1}}(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{-1}{n+1}}.$$

D'après (3), on a

$$f''((a_n)_1)=\frac{n-1}{n}\,p_n^2\,\frac{1-p_n^{\frac{1}{n-1}}(a_1\cdots a_{n-1})^{-\frac{1}{n-1}}}{(1+p_n^{-\frac{1}{n-1}}(a_1\cdots a_{n-1})^{-\frac{1}{n-1}})^3},$$

$$f''((a_n)_2)=\frac{n+1}{n}\,p_n^2\,\frac{1-p_n^{-\frac{1}{n+1}}(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n+1}}}{(1+p_n^{-\frac{1}{1+n}}(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n+1}})^3}.$$

On a, de même,

$$f(0)=P_{n-1}(a;p)+1-n,\quad f(+\infty)=P_{n-1}(a;p),$$

$$f((a_n)_1)=P_{n-1}(a;p)-\frac{n-1}{1+p_n^{\frac{1}{1-n}}G_{n-1}(a)}.$$

Dans le cas où $a_1\cdots a_{n-1}>p_n$, on a $(a_n)_2<p_n^{-1}<(a_n)_1$, ce qui conduit à

$$(a_1\cdots a_{n-1})^{-\frac{1}{n-1}}<p_n^{-\frac{1}{n-1}}\quad\text{et}\quad (a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n+1}}>p_n^{\frac{1}{n+1}}.$$

Donc,

$$f''((a_n)_1)>0 \quad \text{et} \quad f''((a_n)_2)<0.$$

Par suite, la fonction $f$ a au point $(a_n)_2$ un maximum et au point $(a_n)_1$ un minimum.

Sous la condition $a_n \geqslant (a_n)_2$, on a $f(a_n) \geqslant f((a_n)_1)$, ce qui est précisément l'inégalité (1).

Dans le cas où $a_1 \cdots a_{n-1} < p_n$, on obtient

$$(a_n)_1 < p_n^{-1} < (a_n)_2,$$

ainsi que

$$(a_1 \cdots a_{n-1})^{-\frac{1}{n-1}} > p_n^{-\frac{1}{n-1}}, \qquad (a_1 \cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n+1}} < p_n^{\frac{1}{n+1}},$$

ce qui conduit à

$$f''((a_n)_1)<0, \qquad f''((a_n)_2)>0.$$

Par conséquent, la fonction $f$ a dans le cas considéré un maximum au point $(a_n)_1$ et un minimum au point $(a_n)_2$.

Sous la condition $a_n \leqslant (a_n)_2$, on a $f(a_n) \leqslant f((a_n)_1)$ ce qui démontre la proposition **1'**.

Si $a_1 \cdots a_{n-1} = p_n$, on a alors $(a_n)_1 = (a_n)_2$, et dans ce cas $a_n = (a_n)_1 = (a_n)_2$ est un point d'inflexion de $f$. Étant donné que $a_n = (a_n)_1 = (a_n)_2$ est le zéro unique de $f'$ et que $f$ est une fonction continue en $a_n (>0)$ et qu'en outre $f(0) < f(+\infty)$, il en résulte que $f$ est une fonction croissante dans $(0, +\infty)$.

Par conséquent l'inégalité (1) est valable pour $a_n > p_n^{-1}$. Pour $a_n < p_n^{-1}$ on a l'inégalité contraire.

Avec ceci les propositions **1** et **1'** sont complètement démontrées.

**2.** Si l'on pose $p_1 = \cdots = p_n = 1$, $P_n(a;\,1) = P_n(a)$ et $Q_n(a_n) = \dfrac{n}{1+G_n(a)}$, on obtient un résultat qui s'énonce comme suit:

***Proposition* 2.** *Si* $a_1 \cdots a_{n-1} > 1$ et $a_n \geqslant (a_1 \cdots a_{n-1})^{-\frac{1}{n+1}}$, *on a*

$$P_n(a) - Q_n(a) \geqslant P_{n-1}(a) - Q_{n-1}(a).$$

*Dans le cas où* $a_1 \cdots a_{n-1} < 1$ et $a_n \leqslant (a_1 \cdots a_{n-1})^{-\frac{1}{n+1}}$, *on a l'inégalité contraire*

$$P_n(a) - Q_n(a) \leqslant P_{n-1}(a) - Q_{n-1}(a).$$

Par application répetée de la proposition **2**, on obtient:

***Proposition* 3.** *Dans le cas où* $a_1, \ldots, a_n$ *sont tels que*

$$\prod_{i=1}^{k} a_i \geqslant 1 \quad \text{et} \quad a_{k+1} \geqslant (a_1 \cdots a_k)^{-\frac{1}{k+2}} \quad (\textit{pour } k = 1, \ldots, n-1), \tag{4}$$

*on a*

$$P_n(a) \geqslant Q_n(a). \tag{5}$$

*Dans le cas où*

$$\prod_{i=1}^{k} a_i \leqslant 1 \quad \text{et} \quad a_{k+1} \leqslant (a_1 \cdots a_k)^{-\frac{1}{k+2}} \quad (pour\ k=1, \ldots, n-1), \tag{6}$$

*on a l'inégalité contraire*

$$P_n(a) \leqslant Q_n(a). \tag{7}$$

Les conditions (4) (respectivement (6)) sont vérifiées, par exemple, dans le cas où $a_1, \ldots, a_n \geqslant 1$ (respectivement où $a_1, \ldots, a_n \leqslant 1$). Alors, les inégalités suivantes sont valables:

$$P_n(a) \geqslant Q_n(a) \quad \text{avec} \quad a_1, \ldots, a_n > 1,$$
$$P_n(a) \leqslant Q_n(a) \quad \text{avec} \quad a_1, \ldots, a_n < 1.$$

Les deux dernieres inégalités sont dues à P. HENRICI (voir: *Elemente der Mathematik* **11** (1956), p. 112).

**3. *Généralisation.*** Envisageons au lieu de la fonction $f$ la fonction $g$, définie par

$$g(a_n) = P_n(a;\, p) - \frac{\lambda n}{1 + G_n(a)}, \tag{8}$$

où $\lambda$ est un nombre réel.

Puisque

$$g'(a_n) = -\frac{p_n}{(1 + p_n x^n)^2} + \frac{\lambda \alpha x^{1-n}}{(1 + \alpha x)^2}$$

avec $a_n = x^n \ (x > 0)$ et $a_1 \cdots a_{n-1} = \alpha^n \ (\alpha > 0)$, les zéros de la fonction $g$ sont définis par

$$\alpha\lambda p_n^2 x^{2n} - \alpha^2 p_n x^{n+1} + 2\alpha(\lambda - 1) p_n x^n - p_n x^{n-1} + \alpha\lambda = 0.$$

Cette équation en $x$ peut avoir au plus zéro, deux ou quatre racines positives suivant que $\lambda \leqslant 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$ ou $\lambda > 1$. Pour $\lambda \leqslant 0$, la fonction $g$, définie par (8), est décroissante, ce qui conduit, par exemple, à l'inégalité suivante

$$g(a_n) \leqslant g(0) \qquad (\lambda \leqslant 0),$$

c'est-a-dire

$$P_n(a;\, p) - \frac{n}{1 + G_n(a)} \leqslant P_{n-1}(a;\, p) + 1 - n.$$

Le cas $\lambda = 1$ est complètement résolu dans cette Note. Il reste à étudier les cas $0 < \lambda < 1$ et $\lambda > 1$.

**4. *Remarque.*** Les résultats contenus dans cette Note se rattachent à ceux obtenus dans les articles:


D. S. MITRINOVIĆ et P. M. VASIĆ, *Une classe d'inégalités où interviennent les moyennes d'ordre arbitraire*, ces Publications, № **159**— № **170** (1966), 1-8,

P. S. BULLEN, *Some more inequalities involving the aritmetic and geometric means*, ces Publications, № **181** — № **196** (1967), 61-66.