PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 210 — № 228 (1968)

211. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES CYCLIQUES LINÉAIRES NON HOMOGÈNES*

P. Drăgilă et *P. M. Vasić*

1. Les équations fonctionnelles cycliques linéaires à plusieurs variables ont été étudiées systématiquement pour la première fois par M. Ghermănescu. Ainsi, dans le mémoire [1], publié en 1940, il s'occupe des équations cycliques linéaires à trois variables

$$\alpha\varphi(x,\ y,\ z)+\beta\varphi(y,\ z,\ x)+\gamma\varphi(z,\ x,\ y)=0, \tag{1}$$

dans lesquelles α, β, γ sont des constantes réelles et φ une fonction réelle des variables réelles x, y, z. Il a montré que les équations du type (1) peuvent admettre des solutions non triviales seulement dans le cas où le déterminant des coefficients satisfait à la relation

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Compte tenu qu'on a

$$2\,\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)\,((\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2),$$

l'égalité (2) exige que l'on ait ou bien

$$\alpha=\beta=\gamma, \tag{3}$$

ou bien

$$\alpha+\beta+\gamma=0. \tag{4}$$

Le travail [1] a constitué le point de départ de nombreuses recherches entreprises par les géomètres de plusieurs pays, qui ont donné diverses généralisations de l'équation (1). D'abord M. Ghermănescu, en colaboration avec J. Aczél et M. Hosszú, a étudié dans [2] l'équation cyclique linéaire à n variables

$$F(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_p)+F(x_2,\ x_3,\ \ldots\ ,\ x_{p+1})+\cdots+F(x_n,\ x_1,\ \ldots\ ,\ x_{p-1}=0. \tag{5}$$

* Présenté le 1 mars 1968 par D. S. Mitrinović.

Ont suivi plusieurs généralisations des équations (1) et (5) dues à D. Ž. Đoković, M. Hosszú, D. S. Mitrinović, P. M. Vasić et d'autres. Parmi ces équations fonctionnelles nous mentionnons l'équation

$$f(x_1+x_2,\ x_3)+f(x_2+x_3,\ x_1)+f(x_3+x_1,\ x_2)=0,$$

de D. Ž. Đoković [3], puis l'équation

$$f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)+f_2(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{p+1})+\cdots+f_n(x_n,\ x_1,\ \ldots,\ x_{p-1})=0$$

considérée par D. S. Mitrinović [6], et l'équation étudiée par P. M. Vasić et R. Ž. Đorđević [7]

$$f_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p)+f_2(x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{p+1})+\cdots+f_k(x_k,\ x_{k+1},\ \ldots,\ x_{k+p-1})=0.$$

Comme on voit, toutes ces équations sont cycliques, linéaires et homogènes.

2. Nous nous proposons d'étudier, dans le présent travail, quelques classes d'équations fonctionnelles cycliques linéaires non homogènes, qui sont les généralisations naturelles, dans un autre sens, de l'équation (1).

Soit, d'abord l'équation

$$\alpha f(x,\ y,\ z)+\beta f(y,\ z,\ x)+\gamma f(z,\ x,\ y)=\varphi(x), \tag{6}$$

où α, β, γ sont des constantes réelles, φ une fonction réelle connue et f une fonction réelle des variables réelles x, y, z.

Permutant cycliquement les variables, nous trouvons encore les deux équations

$$\begin{aligned}&\alpha f(y,\ z,\ x)+\beta f(z,\ x,\ y)+\gamma f(x,\ y,\ z)=\varphi(y),\\&\alpha f(z,\ x,\ y)+\beta f(x,\ y,\ z)+\gamma f(y,\ z,\ x)=\varphi(z).\end{aligned} \tag{6'}$$

Le système formé par les équations (6) et (6′) est compatible et peut être résolu dans le cas où le déterminant des coefficients Δ satisfait à la condition

$$\Delta\neq 0, \tag{7}$$

la solution générale étant

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\varphi(x) & \beta & \gamma\\ \varphi(y) & \alpha & \beta\\ \varphi(z) & \gamma & \alpha\end{vmatrix}.$$

Ici nous rencontrons un cas curieux, quand l'équation non homogène admet une solution si et seulement si l'équation homogène n'a pas de solution.

Exemple. L'équation

$$f(x,\ y,\ z)-f(y,\ z,\ x)+f(z,\ x,\ y)=2x,$$

a la solution $f(x,\ y,\ z)=x+y$, mais l'équation homogène correspondante

$$f(x,\ y,\ z)-f(y,\ z,\ x)+f(z,\ x,\ y)=0$$

n'a aucune solution.

Dans le cas où α, β, γ sont liés par la relation (4), en additionnant les équations (6) et (6′), on obtient

$$\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z)=0.$$

De là suit que l'équation (6) possède la solution si et seulement si $\varphi(x)=0$.

Dans le cas où $\alpha=\beta=\gamma$, le premier membre dans (6) est symétrique par rapport aux x, y, z. Il en resulte que $\varphi(x)=\text{const}$. En faisant la substitution $f(x, y, z)=g(x, y, z)+\dfrac{\varphi(x)}{3}$, on peut réduire l'équation (6) à

$$g(x, y, z)+g(y, z, x)+g(z, x, y)=0,$$

dont la solution générale est

$$g(x, y, z)=F(x, y, z)-F(y, z, x) \qquad (F, \text{ arbitraire}).$$

3. Soit l'équation

$$\alpha f(x, y, z)+\beta f(y, z, x)+\gamma f(z, x, y)=\psi(x, y), \tag{8}$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction réelle donnée de deux variables, α, β, γ des nombres réels et f une fonction réelle inconnue de deux variables réelles. Faisant les permutations circulaires des variables, nous obtenons encore les équations

$$\begin{aligned} &\alpha f(y, z, x)+\beta f(z, x, y)+\gamma f(x, y, z)=\psi(y, z),\\ &\alpha f(z, x, y)+\beta f(x, y, z)+\gamma f(y, z, x)=\psi(z, x). \end{aligned} \tag{8'}$$

Les système formé par les équations (8) et (8') peut être normalement résolu si les coefficients remplissent la condition (7), et la solution sera

$$f(x, y, z)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \psi(x, y) & \beta & \gamma \\ \psi(y, z) & \alpha & \beta \\ \psi(z, x) & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

Supposant le deuxième cas, où les constantes sont liées par les relations (3), on voit que l'égalité

$$\alpha\,(f(x, y, z)+f(y, z, x)+f(z, x, y))=\psi(x, y)$$

est impossible, en dehors du cas banal $\psi=\text{const}$, puisque le premier membre est une fonction symétrique par rapport aux variables x, y, z, tandis que le second membre de l'équation contient seulement les variables x, y. Dans le cas où $\psi=\text{const}$ et $\alpha=\beta=\gamma$, la solution générale de l'équation (8) est

$$f(x, y, z)=S(x, y, z)+S(y, z, x)+S(z, x, y)+\frac{\psi(x, y)}{3\alpha} \qquad (S, \text{ arbitraire}).$$

Il reste encore à établir si le système (8) et (8') peut admettre des solutions dans le cas où les constantes vérifient la relation (4). Additionnant les égalités (8) et (8'), nous obtenons

$$\psi(x, y)+\psi(y, z)+\psi(z, x)=0.$$

La solution générale de cette équation est

$$\psi(x, y)=G(x)-G(y) \qquad (G, \text{ fonction arbitraire}).$$

Si l'on a $\alpha=\beta=\gamma$, il vient $\alpha=\beta=\gamma=0$. Supposons que $\alpha\neq\beta$. En faisant la substitution

$$\alpha f(x, y, z)-\beta f(z, x, y)+G(y)=h(x, y, z), \tag{9}$$

on obtient l'équation $h(x, y, z)=h(y, z, x)$.

La solution générale de cette équation est

$$h(x, y, z)=H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y) \qquad (H, \text{ fonction arbitraire}).$$

Donc, de (9) on trouve

$$\alpha f(x, y, z)-\beta f(z, x, y)=H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y)-G(y). \tag{10}$$

De là, en permutant cycliquement les variables x, y, z on obtient

$$\begin{aligned} &\alpha f(y, z, x)-\beta f(x, y, z)=H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y)-G(z),\\ &\alpha f(z, x, y)-\beta f(y, z, x)=H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y)-G(x). \end{aligned} \tag{10'}$$

De (10) et (10') on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y, z)=\frac{1}{\alpha-\beta}&(H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y))\\ &-\frac{1}{\alpha^3-\beta^3}(\alpha\beta\, G(x)+\alpha^2 G(y)+\beta^2 G(z)). \end{aligned}$$

Si $\alpha=\beta$, on a $\beta\neq\gamma$. Par le même procédé on peut obtenir la solution générale de l'équation (8) dans ce cas.

4. Soit l'équation

$$\alpha f(x, y, z)+\beta f(y, z, x)+\gamma f(z, x, y)=\theta(x, y, z), \tag{11}$$

dans laquelle α, β, γ sont des constantes réelles, θ une fonction réelle connue et f une fonction réelle des variables réelles x, y, z. Par la permutation cyclique des variables, on obtient

$$\begin{aligned} &\alpha f(y, z, x)+\beta f(z, x, y)+\gamma f(x, y, z)=\theta(y, z, x),\\ &\alpha f(z, x, y)+\beta f(x, y, z)+\gamma f(y, z, x)=\theta(y, z, x). \end{aligned} \tag{11'}$$

Dans le cas où les coefficients remplissent la condition (7), du système (11) et (11') on déduit la solution

$$f(x, y, z)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \theta(x, y, z) & \beta & \gamma\\ \theta(y, z, x) & \alpha & \beta\\ \theta(z, x, y) & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

Il reste encore à étudier l'équation (9) dans le cas où les constantes sont liées par l'égalitié (4).

Additionnant les équations (9) et (9') nous obtenons

$$\begin{aligned} (\alpha+\beta+\gamma)[f(x, y, z)+f(y, z, x)+f(z, x, y)]&\\ =\theta(x, y, z)+\theta(y, z, x)+\theta(z, x, y).& \end{aligned} \tag{12}$$

Si les constantes satisfont à la relation (4), l'égalité (12) peut avoir lieu seulement dans le cas où la fontion θ satisfait à la condition

$$\theta(x, y, z)+\theta(y, z, x)+\theta(z, x, y)=0. \tag{13}$$

La solution générale de l'équation (13) est

$$\theta(x, y, z)=K(x, y, z)-K(y, z, x) \qquad (K, \text{ fonction arbitraire}).$$

En raisonnant comme dans **3**, nous pouvons supposer que $\alpha \neq \beta$. Si l'on pose

$$\alpha f(x, y, z)-\beta f(z, x, y)+K(y, z, x)=h(x, y, z), \tag{14}$$

l'équation (11) devient

$$h(x, y, z)=h(y, z, x). \tag{15}$$

Donc, la solution générale de (15) est

$$h(x, y, z)=H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y)$$

et alors (14) devient

$$\alpha f(x, y, z)-\beta f(z, x, y)=H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y)-K(y, z, x). \tag{16}$$

De là on tire

$$\begin{aligned} &\alpha f(y, z, x)-\beta f(x, y, z)=H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y)-K(z, x, y),\\ &\alpha f(z, x, y)-\beta f(y, z, x)=H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y)-K(x, y, z). \end{aligned} \tag{16'}$$

En résolvant les équations (16) et (16'), on obtient

$$\begin{aligned} f(x, y, z)=&\frac{1}{\alpha-\beta}(H(x, y, z)+H(y, z, x)+H(z, x, y))\\ &-\frac{1}{\alpha^3-\beta^3}(\alpha\beta K(x, y, z)+\alpha^2 K(y, z, x)+\beta^2 K(z, x, y)). \end{aligned}$$

Dans le cas où les constantes satisfont aux égalités (3), on voit aisément que l'égalité (12) est possible seulement si la fonction $\theta(x, y, z)$ est symétrique par rapport aux trois variables.

La solution particulière de l'équation fonctionnelle

$$\alpha[f(x, y, z)+f(y, z, x)+f(z, x, y)]=\theta(x, y, z)$$

sera alors

$$f(x, y, z)=\frac{\theta(x, y, z)}{3\alpha},$$

à laquelle il faut ajouter la solution générale de l'équation homogène correspondante

$$f(x, y, z)+f(y, z, x)+f(z, x, y)=0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Ghermănescu, *Sur quelques équations fonctionnelles linéaires*, Bull. Soc. Math. France, **68** (1940), 109—128.

[2] J. Aczél, M. Ghermănescu, M. Hosszú, *On cyclic equations*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sc., **5** (1960), 215—221.

[3] D. Ž. Đoković, *Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy*, ces Publications, № **61** — № **64** (1961), 21—28.

[4] M. Hosszú, *A lineáris függvényegyeletek egy osztályáról*, Mag. Tudom. Akad. Közlem. **11** (1961), 249—261.

[5] D. S. Mitrinović et D. Ž. Đoković, *Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques*, C. R. Acad. Sc. Paris, **252** (1961), 1090—1092.

[6] D. S. Mitrinović, *Équations fonctionnelles cycliques généralisée*, C. R. Acad. Sc. Paris, **267** (1963), 2951—2952.

[7] P. M. Vasić et R. Ž. Đorđević, *Sur l'équation fonctionnelle généralisée*, ces Publications, № **132** — № **142** (1965), 33—38.

Adresse des auteurs:

P. Drăgilă,
Institutul Politehnic
Timişoara, Roumanie;

P. M. Vasić,
Elektrotehnički fakultet
Bulevar Revolucije 73
Beograd
Jugoslavija