PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA—SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 190 (1967)

RÉSOLUTION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES*

Petar M. Vasić

(Reçu le 6 juillet 1967)

0. Préliminaires

Introduisons, en premier lieu, quelques notations. Soient:

(a) S, ensemble non vide arbitraire;

(b) M, groupe additif abélien;

(c) $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où $x_i \in S$ $(i=1, 2, \ldots, n)$;

(d) v_i un sous-ensemble de l'ensemble des nombres naturels qui a précisément k_i éléments, à savoir: $v_i=\{r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots, r_{k_i,i}\}$;

(e) $p_i(v_i)=(s_{1,i}, s_{2,i}, \ldots, s_{k_i,i})$, où $(s_{1,i}, s_{2,i}, \ldots, s_{k_i,i})$ est une permutation quelconque des éléments $(r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots, r_{k_i,i})$.

(f) $q(v_i)=(t_{1,i}, t_{2,i}, \ldots, t_{k_i,i})$, où $(t_{1,i}, t_{2,i}, \ldots, t_{k_i,i})$ est une permutation des éléments $(r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots, r_{k_i,i})$ tels que

$$t_{1,i}<t_{2,i}<\cdots<t_{k_i,i};$$

(g) $p_i(v_i)\,X=\left(x_{s_{1,i}}, x_{s_{2,i}}, \ldots, x_{s_{k_i,i}}\right)$,

$q(v_i)X=\left(x_{t_{1,i}}, x_{t_{2,i}}, \ldots, x_{t_{k_i,i}}\right)$.

L'objet de la première partie de cet article est l'équation fonctionnelle suivante:

$$\text{(A)} \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(p_i(v_i)\,X)=0,$$

où f_i: $S^{k_i}\to M\,(i=1, 2, \ldots, n)$

---

* Présenté par D. S. Mitrinović.

Remarque. L'hypothèse implicite qu'on ait $r_{\mu,i} \neq r_{\nu,i}$ ($i=1, 2, \ldots, n$; $\mu \neq \nu$; $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k_i$) ne diminue pas la généralité de l'équation (A). Ceci s'explique par l'exemple suivant: si l'on a, par exemple, $f_i(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{1,i}\, x_{3,i})$, on peut poser

$$f_i(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{1,i}, x_{3,i}) = f_i^*(x_{1,i}, x_{2,i}, x_{3,i}).$$

Mais, dans ce cas, la fonction $f_i(x, y, z, t)$ sera déterminée seulement sur le „plan" $x=z$. Autrement, la fonction f_i sera arbitraire.

Plusieurs travaux ont été consacrés à la résolution de certains cas particuliers de l'équation fonctionnelle (A) (voir, entre autres, [7], [8], [9], [10], [11], [17], [18], [19], [20], [21], [26], [28], [29] etc.).

Indiquons quelques cas particuliers de l'équation fonctionnelle (A):

1° L'équation fonctionnelle cyclique généralisée (voir: [7], [8], [20], [22], [28]):

$$\sum_{i=1}^{n} C^{i-1} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0, \tag{0.1}$$

où C_n est l'opérateur cyclique défini par

$$C_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$$

(la fonction F ne doit pas dépendre de toutes les variables).

2° L'équation fonctionnelle paracyclique généralisée de première espèce (voir: [17], [29]):

$$\sum_{i=1}^{n} f_i\big(C_n^{i-1} Q_{p_1}(X_1),\ C_n^{i-1} Q_{p_2}(X_2),\ \ldots,\ C_n^{i-1} Q_{p_k}(X_k)\big) = 0, \tag{0.2}$$

où $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj})$ et $Q_{p_m}(X_j) = (x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{p_m j})$.

3° L'équation fonctionnelle paracyclique généralisée de seconde espèce (voir: [21]):

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} f_i\big(C_n^{i-1} Q_{p_j}(X_1),\ C_n^{i-1} Q_{p_{j+1}}(X_2),\ \ldots,\ C_n^{i-1} Q_{p_{j+k-1}}(X_k)\big) = 0, \tag{0.3}$$

avec $Q_{p_{k+m}} = Q_{p_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

La seconde partie de cet article concerne un cas important particulier de l'équation fonctionnelle (A), à savoir:

$$\frac{f_1}{a_1} = \frac{f_2}{a_2} = \cdots = \frac{f_n}{a_n} = f \qquad (a_n = \text{const} \in C;\ C \text{ ensemble des nombres complexes});$$

alors l'équation (A) devient

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(p_i(\nu_i) X) = 0 \qquad (f\colon S^k \to M). \tag{B}$$

L'équation (B) englobe plusieurs équations fonctionnelles déjà connues (voir, par exemple: [6], [9], [12], [15], [17], [21], [25], [26], etc.).

Entre autres, des cas particuliers de l'équation fonctionnelle (B) sont les équations fonctionnelles suivantes:

4° L'équation fonctionnelle cyclique (voir: [6], [7], [8], [12], [14], [24], [28]):

$$\sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0. \tag{0.4}$$

5° L'équation fonctionnelle paracylique de première espèce (voir: [17], [29]):

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_n^{i-1} Q_{p_1}(X), C_n^{i-1} Q_{p_2}(X_2), \ldots, C_n^{i-1} Q_{pk}(X_k)) = 0. \tag{0.5}$$

6° L'équation fonctionnelle paracyclique de seconde espèce (voir: [21]):

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} f(C_n^{i-1} Q_{p_j}(X_1), C_n^{i-1} Q_{p_{j+1}}(X_2), \ldots, C_n^{i-1} Q_{p_{j+k-1}}(X_k)) = 0. \tag{0.6}$$

Nous montrerons comment on peut obtenir, dans quelques cas, la solution générale de l'équation fonctionnelle (B) en partant de la solution générale de l'équation fonctionnelle (A).

1. L'équation fonctionnelle (A)[1]

Théorème 1. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (A) *est*

$$\begin{aligned} f_i(p_i(\nu_i) X) = {} & \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+1} F_j^i (q(\nu_i \cap \nu_j) X) \\ & + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^j F_i^j (q(\nu_i \cap \nu_j) X) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où F_i^j ($i = 1, 2, \ldots, n-1$; $j = i+1, i+2, \ldots, n$) *sont des fonctions*[2] *arbitraires à valeurs dans* M, *et* $\sum_a^b \overset{\text{def}}{=} 0 \quad (a > b)$.

Démonstration. Nous procédons par induction. Mais, tout d'abord, remarquons que pour n arbitraire les fonctions (1.1) représentent vraiment une solution de l'équation (A).

Pour $n = 2$ l'équation (A) a la forme

$$f_1(p_1(\nu_1) X) + f_2(p_2(\nu_2) X) = 0. \tag{1.2}$$

En posant $x_i = x_i^0$ ($x_i^0 = \text{const}$; $i \notin \nu_i$), on obtient

$$f_1(p_1(\nu_1) X) = F_1^2(q(\nu_1 \cap \nu_2) X). \tag{1.3}$$

[1] Un résumé de cette partie du présent article a été publié dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 260 (1965), pp. 5666—5667 (voir: [27]).

[2] Si l'on a $\nu_i \cap \nu_j = \emptyset$, nous acceptons que $F_i^j(q(\nu_i \cap \nu_j) X) = C_i^j$ ($C_i^j = \text{const} \in M$).

A partir de (1.2) et (1.3), on trouve

$$f_2(p_2(v_2)X) = -F_1^2(q(v_1 \cap v_2)X). \tag{1.4}$$

Si l'on pose $n=2$, $i=1, 2$, de (1.1) on obtient (1.3) et (1.4). Donc, le théorème est démontré pour $n=2$.

Supposons que, pour n fixé, la solution générale de l'équation (A) soit donnée par (1.1). Considérons maintenant l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(p_i(v_i)X) = 0. \tag{1.5}$$

Si l'on pose $x_i = x_i^0$ ($x_i^0 = \text{const}$; $i \notin v_{n+1}$) dans (1.5), on obtient que la fonction g_{n+1} a la forme suivante:

$$g_{n+1}(p_{n+1}(v_{n+1})X) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^n F_j^{n+1}(q(v_{n+1} \cap v_j)X). \tag{1.6}$$

En portant (1.6) dans (1.5) et en introduisant les nouvelles notations (observons le fait évident: $v_{n+1} \cap v_j \subseteq v_j$):

$$f_i(p_i(v_i)X) = g_i(p_i(v_i)X) + (-1)^n F_i^{n+1}(q(v_{n+1} \cap v_i)X) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{1.7}$$

on obtient l'équation (A). D'après l'hypothèse inductive, la solution générale de cette équation est donnée par les formules (1.1). Donc, d'après (1.1), (1.6), et (1.7), on obtient

$$g_i(p_i(v_i)X) = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+1} F_j^i(q(v_i \cap v_j)X)$$
$$+ \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^j F_i^j(q(v_i \cap v_j)X) - (-1)^n F_i^{n+1}(q(v_{n+1} \cap v_i)X),$$
$$(i=1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire

$$g_i(p_i(v_i)X) = \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+1} F_j^i(q(v_i \cap v_j)X)$$
$$+ \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^j F_i^j(q(v_i \cap v_j)X) \qquad (i=1, 2, \ldots, n+1).$$

Le théorème est donc vrai pour $n+1$, s'il en est ainsi pour n.

La démonstration par induction est ainsi achevée.

En partant de (1.1), on peut obtenir, sans difficulté, les solutions générales des équations fonctionnelles (0.1), (0.2), (0.3).

Jusqu'à présent, la solution générale de l'équation fonctionnelle (0.3) est inconnue. Mais, pour écrire la solution générale de l'équation fonctionelle paracyclique généralisée de seconde espèce dans la forme explicite, il faut distinguer plusieurs cas. C'est pourquoi, nous n'écrirons pas ici cette solution. Ce sera l'objet d'un article qui paraîtra ultérieurement.

2. L'équation fonctionnelle (B)

Dans le cas où

$$\frac{f_1}{a_1}=\frac{f_2}{a_2}=\cdots=\frac{f_n}{a_n}=f,$$

nous avons les égalités suivantes:

$$k_1=k_2=\cdots=k_n=k.$$

Soit Q_i ($i=1, 2, \ldots, n$) un opérateur défini par

$$Q_i p_i(v_i)X=(x_1, x_2, \ldots, x_k) \qquad (x_i\in S;\ i=1, 2, \ldots, k);$$

en d'autres termes, l'opérateur Q_i fait les substitutions suivantes:

$$s_{1,i}\to 1, \quad s_{2,i}\to 2, \quad \ldots, \quad s_{k,i}\to k \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Alors, après multiplication par α_i (α_i sont des constantes pour le moment indéterminées), de (1.1) on obtient

$$\text{(2.1)} \qquad a_i\alpha_i f(x_1, x_2, \ldots, x_k)=\alpha_i\left\{\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+1}F_j^i(Q_i q(v_i\cap v_j)X) + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^j F_i^j(Q_i q(v_i\cap v_j)X)\right\}$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

En additionnant les fonctions (2.1) pour $i=1, 2, \ldots, n$, on parvient à

$$\text{(2.2)} \qquad \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\right)f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left\{\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i+1}F_j^i(Q_i q(v_i\cap v_j)X) + \sum_{j=i+1}^{n}(-1)^j F_i^j(Q_i q(v_i\cap v_j)X)\right\}.$$

Supposons que l'équation

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i\right)\xi=\eta \qquad (\xi, \eta\in M)$$

possède une solution unique par rapport à ξ, et introduisons les nouvelles fonctions G_i^j telles que

$$\frac{F_i^j}{\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha_i}=G_i^j \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1;\ j=i+1,\ i+2, \ldots, n).$$

Alors, nous avons le théorème suivant:

Théorème 2. *Si l'on peut déterminer les constantes α_i de façon que l'on ait les identités suivantes:*

$$\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \{\alpha_i F_i^j (p_\mu(v_\mu) Q_i q(v_i \cap v_j) X) \qquad (2.3)$$

$$-\alpha_j F_i^j (p_\mu(v_\mu) Q_j q(v_i \cap v_j) X)\} = 0$$

pour tout $i=1, 2, \ldots, n-1$ *et* $j=i+1, i+2, \ldots, n$, *la solution générale de l'équation fonctionnelle* (B) *est*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+1} G_j^i (Q_i q(v_i \cap v_j) X) \right. \qquad (2.4)$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^j G_i^j (Q_i q(v_i \cap v_j) X) \right\},$$

où G_i^j $(i=1, 2, \ldots, n-1;\ j=i+1, i+2, \ldots, n)$ *sont des fonctions arbitraires à valeurs dans* M.

On peut obtenir la solution générale de l'équation (0.4) en partant de (2.4) (voir [28]). Dans ce cas, on a

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1.$$

De même, on peut trouver la solution générale de l'équation fonctionnelle paracyclique de première espèce (voir [29]). Dans ce cas on a aussi

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 1.$$

Cependant, pour l'équation fonctionnelle paracyclique de seconde espèce, on ne peut pas déterminer les constantes α_i de façon que l'on ait les identites (2.3).

Donnons enfin un exemple.

Exemple. Considérons l'équation fonctionnelle

$$f_1(x, y, z) + f_2(y, z, t) + f_3(z, t, x) + f_4(t, x, y) = 0, \qquad (2.5)$$

où $x, y, z, t \in S$ (S, ensemble non vide arbitraire), $f_i : S^3 \to M$ $(i=1, 2, 3, 4)$. C'est un cas particulier de l'équation fonctionnelle cyclique généralisée (cas où $p=3$, $n=4$).

D'après le théorème 1, la solution générale de cette équation est

$$f_1(x, y, z) = F_1^2(y, z) - F_1^3(x, z) + F_1^4(x, y), \qquad (2.6)$$

$$f_2(y, z, t) = -F_1^2(y, z) - F_2^3(z, t) + F_2^4(y, t), \qquad (2.7)$$

$$f_3(z, t, x) = F_1^3(x, z) + F_2^3(z, t) + F_3^4(x, t), \qquad (2.8)$$

$$f_4(t, x, y) = -F_1^4(x, y) - F_2^4(y, t) - F_3^4(x, t), \qquad (2.9)$$

où $F_1^2, F_1^3, F_1^4, F_2^3, F_2^4, F_3^4$ sont des fonctions arbitraires à valeurs de M.

Considérons maintenant le cas où

$$f_1 = -f_2 = f_3 = -f_4 = f. \tag{2.10}$$

Alors, en partant de (2.5), on trouve

$$f(x, y, z) - f(y, z, t) + f(z, t, x) - f(t, x, y) = 0. \tag{2.11}$$

De (2.6), (2.7), (2.8) et (2.9), d'après (2.10), on obtient

$$f(x, y, z) = F_1^2(y, z) - F_1^3(x, z) + F_1^4(x, y),$$

$$-f(x, y, z) = -F_1^2(x, y) - F_2^3(y, z) + F_2^4(x, z),$$

$$f(x, y, z) = F_1^3(z, x) + F_2^3(x, y) + F_3^4(z, y),$$

$$-f(x, y, z) = -F_1^4(y, z) - F_2^4(z, x) - F_3^4(y, x).$$

Selon le théorème 2, essayons de déterminer les constantes a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ telles que

$$a_1 F_1^2(y, z) - a_2 F_1^2(x, y) - a_1 F_1^2(z, t) + a_2 F_1^2(y, z) + a_1 F_1^2(t, x)$$
$$- a_2 F_1^2(z, t) - a_1 F_1^2(x, y) + a_2 F_1^2(z, x) = 0,$$

$$-a_1 F_1^3(x, z) + a_3 F_1^3(z, x) + a_1 F_1^3(y, t) - a_3 F_1^3(t, y) - a_1 F_1^3(z, x)$$
$$+ a_3 F_1^3(x, z) + a_1 F_1^3(t, y) - a_3 F_1^3(y, t) = 0,$$

$$a_1 F_1^4(x, y) - a_4 F_1^4(y, z) - a_1 F_1^4(y, z) + a_4 F_1^4(z, t) + a_1 F_1^4(z, t)$$
$$- a_4 F_1^4(t, x) - a_1 F_1^4(t, x) + a_4 F_1^4(x, y) = 0,$$

$$-a_2 F_2^3(y, z) + a_3 F_2^3(x, y) + a_2 F_2^3(z, t) - a_3 F_2^3(y, z) - a_2 F_2^3(t, x)$$
$$+ a_3 F_2^3(z, t) + a_2 F_2^3(x, y) - a_3 F_2^3(t, x) = 0,$$

$$a_2 F_2^4(x, z) - a_4 F_2^4(z, x) - a_2 F_2^4(y, t) + a_4 F_2^4(t, y) + a_2 F_2^4(z, x)$$
$$- a_4 F_2^4(x, z) - a_2 F_2^4(t, x) + a_4 F_2^4(x, t) = 0,$$

$$a_3 F_3^4(z, y) - a_4 F_3^4(y, x) - a_3 F_3^4(t, z) + a_4 F_3^4(z, y) + a_3 F_3^4(x, t)$$
$$- a_4 F_3^4(t, z) - a_3 F_3^4(y, x) + a_4 F_3^4(x, t) = 0.$$

Les identités précédentes seront remplies si l'on a

$$a_1 = -a_2, \quad a_1 = a_3, \quad a_1 = -a_4, \quad a_2 = -a_3, \quad a_2 = a_4 \quad a_3 = -a_4.$$

Donc, on peut prendre $a_1 = -a_2 = a_3 = -a_4 = 1$.

Alors, d'après ce qui précède, la solution générale de l'équation fonctionnelle (2.11) est

$$f(x, y, z) = A(x, y) + A(y, z) + B(x, z) - B(z, x),$$

avec

$$A(x, y) = F_1^4(x, y) + F_1^2(x, y) + F_2^3(x, y) + F_3^4(y, x),$$

$$B(x, z) = -F_1^3(x, z) - F_2^4(x, z).$$

BIBLIOGRAPHIE[1]

[1] J. Aczél, *Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff*, Publ. Math. Debrecen, **4** (1955), 33—42.

[2] J. Aczél, *Miszellen über Funktionalgleichungen*, I—II, Math. Nachr. **19** (1958), 87—99; **23** (1961), 39—50.

[3] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel, Stuttgart 1961.

[4] J. Aczél, *Functional equations and their applications*, New York, London 1966.

[5] J. Aczél—E. Egerváry, *Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff*, II, Publ. Math. Debrecen, **5** (1957), 60—61.

[6] J. Aczél—M. Ghermănescu—M. Hosszú, *On cyclic equations*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., **5** (1960), 215—221.

[7] D. Ž. Đoković, *O nekim klasama cikličnih funkcionalnih jednačina*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **114** (1963), 1—48.

[8] D. Ž. Đoković, *Generalisation of a result of Aczél, Ghermănescu and Hosszú*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., **8** (1964), 51—60.

[9] D. Ž. Đoković, *General Solution of a Fuctional equation*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **132—142** (1965), 55—57.

[10] R. Ž. Đorđević, *Solution d'une équation fonctionnele à plusieurs fonctions inconnues*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **132—142** (1965), 51—53.

[11] R. Ž. Đorđević, *O nekim opštim klasama linearnih funkcionalnih jednačina*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **174** (1967), 1—64.

[12] M. Ghermănescu, *Sur quelques équations fonctionnelles linéaires*, Bull. Soc. Math. de France, **68** (1940), 109—128.

[13] M. Ghermănescu, *Ecuaţii funcţionale*, Bucureşti 1960.

[14] M. Hosszú, *A lineáris függvényegyenletek egy ozstályáról*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., **11** (1961), 249—261.

[15] M. Kuczma, *Solution d'un problème de D. S. Mitrinović*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **129** (1964).

[16] M. Kuczma, *A survey of the theory of functional equations*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **130** (1964), 1—64.

[17] D. S. Mitrinović, *Équations fonctionnelles linéaires paracycliques de première espèce*, Publ. Inst. Math. Beograd (N. S.), **3** (17) (1963), 115—128.

[18] D. S. Mitrinović, *Sur certaines équations fonctionnelles linéaires à plusieurs fonctions inconnues*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **116** (1963), 5—12.

[19] D. S. Mitrinović, *Équation fonctionnelle à fonctions inconnues dont toutes ne dépendent pas du même nombre d'agruments*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **120** (1963), 29—30.

[20] D. S. Mitrinović, *Équation fonctionnelle cyclique généralisée*, C. R. Acad. Sci. Paris, **257** (1963), 2951—2952.

[21] D. S. Mitrinović, *Sur les équations fonctionnelles linéaires paracycliques de seconde espèce*, Glasnik Mat. — Fiz. Astr. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske, [2] **18** (1963), 177—182.

[22] D. S. Mitrinović, *Équation fonctionnelle cyclique généralisée*, Publ. Inst. Math. Beograd (N. S.), **4** (18) (1964), 29—41.

[23] D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković, *Neki nerešeni problemi u teoriji funkcionalnih jednačina*, Matematička biblioteka **25** (1963), 153—168.

[24] D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković, *Ciklične funkcionalne jednačine*, Matematička biblioteka **22** (1962), 5—23.

[25] D. S. Mitrinović — P. M. Vasić, *Équations fonctionnelles linéaires généralisées*, Publ. Inst. Math. Beograd (N. S.), **4** (18) (1964), 63—78.

[26] D. M. Sinszow, *Über eine Funktionalgleichung*, Arch. Math. Phys., (3) **6** (1903), 216—217.

[27] P. M. Vasić, *Sur une classe d'équations fonctionnelle linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, **260** (1965), 5666—5667.

[28] P. M. Vasić — R. Ž. Đorđević, *Sur l'équation fonctionnelle cyclique généralisée*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **136** (1965), 33—38.

[29] P. M. Vasić — R. R. Janić — R. Ž. Đorđević, *Sur les équations fonctionnelles linéaires paracycliques de première espèce*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., **137** (1965), 39—50.

1 En ce qui concerne l'autre littérature relative à l'équation (A), voir [3], [4], [16], [23], [24].