PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTE D'ELECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 185 (1967)

MONOTONOST KOLIČNIKA DVE SREDINE

D. S. Mitrinović i *P. M. Vasić*

(Primljeno 5. juna 1967)

1. Dokazan je sledeći rezultat [1]:

Stav 1. *Ako su* $a=(a_1, \ldots , a_n)$ *i* $p=(p_1, \ldots , p_n)$ *dva niza pozitivnih brojeva i ako su oba rastuća ili oba opadajuća i ako je*

$$u_\nu=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{\nu}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{\nu-1}}, \tag{1}$$

tada je (u_ν) *monotono rastući niz.*

2. Dokazaćemo opštiji stav iz koga kao neposredna posledica sleduje da je u_ν monotono rastuća funkcija od ν, pa je samim tim i niz (u_ν) monotono rastući, i to bez ograničenja da su nizovi a i p ili oba rastuća ili oba opadajuća. Ovaj opštiji stav glasi:

Stav 2. *Ako su* $a=(a_1, \ldots , a_n)$ i $p=(p_1, \ldots , p_n)$ *dva niza pozitivnih brojeva, pod uslovom da svi članovi niza a nisu međusobno jednaki, funkcija f, definisana pomoću*

$$f(x)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{x}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{x-k}}=\frac{A(a^x;\, p)}{A(a^{x-k};\, p)} \qquad \left(A(a;\, p)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right), \tag{2}$$

monotono raste za $k>0$, *a monotono opada za* $k<0$.

Dokaz. Iz (2) dobijamo

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{x}\log a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{x}}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{x-k}\log a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{x-k}}. \tag{3}$$

Ako stavimo

$$g(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^x \log a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^x}, \tag{4}$$

izraz (3) postaje

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=g(x)-g(x-k).$$

Kako je

$$g'(x)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^x (\log a_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^x\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^x \log a_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^x\right)^2},$$

na osnovu Cauchy-Bunjakovski-Schwarzove nejednakosti zaključujemo da je $g'(x)\geqslant 0$, pri čemu znak jednakosti nastupa ako i samo ako su svi članovi niza a međusobno jednaki.

Prema tome, funkcija g je rastuća funkcija. Kako je $x>x-k$ za $k>0$, imamo $g(x)-g(x-k)>0$; za $k<0$ je $x<x-k$, pa je $g(x)-g(x-k)<0$. Kako je $f(x)>0$, imamo sledeći rezultat:

1° Za $k>0$ funkcija $f(x)$ je rastuća;

2° Za $k<0$ funkcija $f(x)$ je opadajuća.

Ovim je stav 2 dokazan.

Ako se stavi $k=1$, dobija se da je $f(x)$ rastuća funkcija, pa je samim tim i niz (1) rastući bez pretpostavki o monotonosti nizova a i p.

3. Posmatrajmo sada funkciju

$$F(x)=\frac{M_n^{[r]}(a^x;\, p)}{M_n^{[s]}(a^{x-k};\, p)}, \tag{5}$$

gde je

$$M_n^{[r]}(a;\, p)=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^t}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (t\neq 0;\ |t|<+\infty), \tag{6}$$

$$=\left(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\right)^{1\Big/\sum_{i=1}^{n} p_i} \qquad (t=0).$$

Pretpostavimo prvo da je $rs\neq 0$. Tada je

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{rx}\log a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{rx}}-\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{sx-ks}\log a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{sx-ks}}=g(rx)-g(sx-ks),$$

gde je funkcija g definisana pomoću (4).

Kako smo dokazali da je funkcija g rastuća, imamo sledeći rezultat:

Stav 3. 1° *Ako je* $r<s$, *funkcija* F *raste dok* x *raste od* $-\infty$ *do* $\frac{ks}{s-r}$, *a opada dok* x *raste od* $\frac{ks}{s-r}$ *do* $+\infty$.

2° *Ako je* $r=s$ *i* $sk>0$, *funkcija* F *raste kada* x *raste od* $-\infty$ *do* $+\infty$. *Ako je* $r=s$ *i* $sk<0$, *funkcija* F *opada kada* x *raste od* $-\infty$ *do* $+\infty$.

3° *Ako je* $r>s$, *funkcija* F *opada dok* x *raste od* $-\infty$ *do* $\frac{ks}{s-r}$ *i raste dok* x *raste od* $\frac{ks}{s-r}$ *do* $+\infty$.

Dokažimo sada da stav važi i kada je $rs=0$ $(r\neq s)$. Neka je $s=0$, $r\neq 0$. Tada (5) postaje

$$F(x)=\frac{\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{rx}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{r}}}{\left(\prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{(x-k)p_i}\right)^{1 \Big/ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i}},$$

pa je

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{rx}\log a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{rx}}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \log a_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}=g(rx)-g(0).$$

Prema tome, funkcija F raste kada je $rx>0$ i opada kada je $rx<0$. Ovo se podudara sa tvrđenjem stava 3.

Slično se stav dokazuje i u slučaju $r=0$, $s\neq 0$. Kada je $r=s=0$, tada se (5) svodi na konstantu.

Za $r=s=1$ dobija se stav 2.

LITERATURA

[1] HARI DAS BAGCHI and KANTISH CHANDRA MAITY: *Statical note on certain algebraic inequalities*, The Mathematics Student, **18** (1950), 143—145.

Summary

MONOTONICITY OF THE RATIO OF TWO MEANS

D. S. Mitrinović and *P. M. Vasić*

Let $a=(a_1, \ldots, a_n)$ and $p=(p_1, \ldots, p_n)$ be two sequences of positive numbers, $a_1, \ldots, a_n$ not being all equal. Let F be a function defined by (5) and (6), where k, r, s are real numbers.

In this Note the following result is proved:

1° *If* $r<s$, *the function* F *increases when* x *increases from* $-\infty$ *to* $\frac{ks}{s-r}$, *and decreases when* x *increases from* $\frac{ks}{s-r}$ *to* $+\infty$;

2° *If* $r=s$ *and* $sk>0$, *the function* F *increases when* x *increases from* $-\infty$ *to* $+\infty$. *If* $r=s$ *and* $sk<0$, *the function* F *decreases when* x *increases from* $-\infty$ *to* $+\infty$;

3° *If* $r>s$, *the function* F *decreases when* x *increases from* $-\infty$ *to* $\frac{ks}{s-r}$, *and increases when* x *increases from* $\frac{ks}{s-r}$ *to* $+\infty$.

This result contains for $r=s=k=1$ the following theorem proved by Hari das Bagchi and Kantish Chandra Maity [1], by the arguments of statics:

Let $(a_1, \ldots, a_n)$ *and* $(p_1, \ldots, p_n)$ *be two sequences of positive numbers. If both of them are in ascending or descending order, and if* u_ν *be defined by* (1), *then* (u_ν) *is a monotonically increasing sequence.*

We also note that the condition on monotonicity of a and p in the last result is unnecessary.

Added in proof. For $r=s=k=1$ we have the weighted counter-harmonic mean:

$$N_r(a;p)=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i\, a_i{}^r}{\sum_{i=1}^{n} p_i\, a_i{}^{r-1}}.$$

Beckenbach investigated in detail counter-harmonic mean

$$N_r(a)=\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i{}^r}{\sum_{i=1}^{n} a_i{}^{r-1}}.$$

See: E. F. Beckenbach, *A class mean value functions*, The American Mathematical Monthly, **57** (1950), 1—6.