PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 184 (1967)

PROPRIÉTÉS D'UN RAPPORT OÙ INTERVIENNENT LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

(Reçu le 15 mai 1967)

Soient: $a=(a_1, \ldots, a_n)$ et $p=(p_1, \ldots, p_n)$ des suites de nombres positifs; r et s des nombres réels quelconques. On suppose aussi que tous les $a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas égaux entre eux.

Considérons la fonction f, définie par

$$f(r, s)=\frac{\left(\dfrac{p_1 a_1^r+\cdots+p_n a_n^r}{p_1+\cdots+p_n}\right)^s}{\left(\dfrac{p_1 a_1^s+\cdots+p_n a_n^s}{p_1+\cdots+p_n}\right)^r}=\left(\frac{M_n^{[r]}(a; p)}{M_n^{[s]}(a; p)}\right)^{rs},$$

où $M_n^{[t]}(a; p)$ désigne la moyenne d'ordre t (t réel$\neq 0$; $|t|<+\infty$):

$$M_n^{[t]}(a; p)=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^t}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (t\neq 0;\ |t|<+\infty).$$

Il est évident que la fonction f possède la propriété suivante

$$f(r, s)\cdot f(s, r)=1.$$

Si l'on pose

$$g(r, s)=\log f(r, s)=s \log \frac{p_1 a_1^r+\cdots+p_n a_n^r}{p_1+\cdots+p_n}-r \log \frac{p_1 a_1^s+\cdots+p_n a_n^s}{p_1+\cdots+p_n},$$

on obtient:

$$g'(r, s)=s \frac{p_1 a_1^r \log a_1+\cdots+p_n a_n^r \log a_n}{p_1 a_1^r+\cdots+p_n a_n^r}-\log \frac{p_1 a_1^s+\cdots+p_n a_n^s}{p_1+\cdots+p_n},$$

$$g''(r, s)=\frac{s}{(p_1 a_1^r+\cdots+p_n a_n^r)^2}[(p_1 a_1^r \log^2 a_1+\cdots+p_n a_n^r \log^2 a_n)$$
$$\times(p_1 a_1^r+\cdots+p_n a_n^r)-(p_1 a_1^r \log a_1+\cdots+p_n a_n^r \log a_n)^2],$$

avec

$$g'(r,\,s)=\frac{\partial g(r,\,s)}{\partial r},\qquad g''(r,\,s)=\frac{\partial^2 g(r,\,s)}{\partial r^2}.$$

Par application de l'inégalité de Cauchy, on obtient

$$g''(r,\,s)>0\ \ (s>0),\qquad g''(r,\,s)<0\ \ (s<0).$$

Donc, $g'(r,\,s)$ est une fonction croîssante de r si $s>0$, et décroîssante si $s<0$.

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $a_1=\min(a_1,\,\ldots,\,a_n)$. On a alors

$$g'(r,\,s)=\frac{p_1\log a_1^s+p_2\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^r\log a_2^s+\cdots+p_n\left(\dfrac{a_n}{a_1}\right)^r\log a_n^s}{p_1+p_2\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)^r+\cdots+p_n\left(\dfrac{a_n}{a_1}\right)^r}$$
$$-\log\frac{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}{p_1+\cdots+p_n}.$$

On en tire

$$g'(-\infty,\,s)=\log a_1^s-\mathrm{iog}\frac{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}{p_1+\cdots+p_n}=\log\frac{(p_1+\cdots+p_n)\,a_1^s}{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}.$$

Aux conditions $s>0$ et $s<0$ correspondent respectivement les inégalités:

$$0<\frac{(p_1+\cdots+p_n)\,a_1^s}{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}<1\quad\text{et}\quad\frac{(p_1+\cdots+p_n)\,a_1^s}{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}>1.$$

Soit $a_n=\max(a_1,\,\ldots,\,a_n)$. On a alors

$$g'(r,\,s)=\frac{p_1\left(\dfrac{a_1}{a_n}\right)^r\log a_1^s+\cdots+p_{n-1}\left(\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right)^r\log a_{n-1}^s+p_n\log a_n^s}{p_1\left(\dfrac{a_1}{a_n}\right)^r+\cdots+p_{n-1}\left(\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right)^r+p_n}$$
$$-\log\frac{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}{p_1+\cdots+p_n}.$$

On en tire

$$g'(+\infty,\,s)=\log a_n^s-\log\frac{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}{p_1+\cdots+p_n}=\log\frac{(p_1+\cdots+p_n)\,a_n^s}{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}.$$

Aux conditions $s>0$ et $s<0$ correspondent respectivement les inégalités suivantes:

$$\frac{(p_1+\cdots+p_n)\,a_n^s}{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}>1\quad\text{et}\quad 0<\frac{(p_1+\cdots+p_n)\,a_n^s}{p_1a_1^s+\cdots+p_na_n^s}<1.$$

Nous allons montrer, dans ce qui suit, que

$$g'(0, s)<0 \quad \text{et} \quad g'(s, s)>0. \tag{1}$$

La première de ces inégalités provient du fait que

$$g'(0, s)=\frac{p_1 \log a_1{}^s+\cdots+p_n \log a_n{}^s}{p_1+\cdots+p_n}-\log \frac{p_1 a_1{}^s+\cdots+p_n a_n{}^s}{p_1+\cdots+p_n}$$

$$=\log \frac{\left((a_1{}^s)^{p_1}\cdots(a_n{}^s)^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+\cdots+p_n}}}{\dfrac{p_1(a_1{}^s)+\cdots+p_n(a_n{}^s)}{p_1+\cdots+p_n}}$$

et que, en outre

$$\frac{\left((a_1{}^s)^{p_1}\cdots(a_n{}^s)^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+\cdots+p_n}}}{\dfrac{p_1(a_1{}^s)+\cdots+p_n(a_n{}^s)}{p_1+\cdots+p_n}}<1.$$

Pour démontrer la deuxième des inégalités (1), considérons

$$g'(s, s)=\frac{p_1 a_1{}^s \log a_1{}^s+\cdots+p_n a_n{}^s \log a_n{}^s}{p_1 a_1{}^s+\cdots+p_n a_n{}^s}-\log \frac{p_1 a_1{}^s+\cdots+p_n a_n{}^s}{p_1+\cdots+p_n}$$

$$=\log \frac{\left(a_1{}^{sp_1 a_1{}^s}\cdots a_n{}^{sp_n a_n{}^s}\right)^{\frac{1}{p_1 a_1{}^s+\cdots+p_n a_n{}^s}}}{\dfrac{p_1 a_1{}^s+\cdots+p_n a_n{}^s}{p_1+\cdots+p_n}}.$$

Si dans l'inégalité suivante (voir: [1], théorème 2)

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} Q_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i} \frac{A_1{}^{P_1}\cdots A_n{}^{P_n}}{\left(\dfrac{Q_1 A_1+\cdots+Q_n A_n}{Q_1+\cdots+Q_n}\right)^{P_1+\cdots+P_n}} \leqslant \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^{P_n}\cdots\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)^{P_1},$$

où P_i, Q_i, A_i $(i=1, \ldots, n)$ sont des nombres positifs, on pose

$$P_i=p_i a_i^s, \quad Q_i=p_i, \quad A_1=A_2=\cdots=A_n \qquad (i=1, \ldots, n),$$

on obtient

$$\frac{\left(a_1{}^{sp_1 a_1{}^s}\cdots a_n{}^{sp_n a_n{}^s}\right)^{\frac{1}{p_1 a_1{}^s+\cdots+p_n a_n{}^s}}}{\dfrac{p_1 a_1{}^s+\cdots+p_n a_n{}^s}{p_1+\cdots+p_n}}>1,$$

ce qui démontre l'inégalité $g'(s, s)>0$.

Remarque. Étant donné que $\log x$ $(x>0)$ est une fonction concave, on a

$$\log \frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{x_1 + \cdots + x_n} \geqslant \frac{x_1 \log y_1 + \cdots + x_n \log y_n}{x_1 + \cdots + x_n},$$

avec $x_1, \ldots, x_n > 0$ et $y_1, \ldots, y_n > 0$.

Si l'on y pose

$$x_i = p_i a_i^s, \quad y_i = a_i^{-s} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

on obtient

$$\log \frac{p_1 + \cdots + p_n}{p_1 a_1^s + \cdots + p_n a_n^s} \geqslant -s \frac{p_1 a_1^s \log a_1 + \cdots + p_n a_n^s \log a_n}{p_1 a_1^s + \cdots + p_n a_n^s},$$

ce qui conduit à $g'(s, s) > 0$.

Cette remarque a été faite par D. Ž. Đoković qui a lu cet article dans le manuscrit.

Les faits indiqués plus haut permettent d'énoncer les résultats suivants:

Théorème 1. *La fonction* $g'(r, s)$ *est monotone en* r *et s'annule pour une valeur unique* $r_0 = \theta s$ $(0 < \theta < 1)$.

Théorème 2. *Lorsque* s *est un nombre positif fixé, la fonction* $g(r, s)$

1° *décroît si* r *croît de* $-\infty$ *à* r_0,

2° *croît si* r *croît de* r_0 *à* $+\infty$.

Théorème 3. *Lorsque* s *est un nombre négatif fixé, la fonction* $g(r, s)$

1° *croît si* r *croît de* $-\infty$ *à* r_0,

2° *décroît si* r *croît de* r_0 *à* $+\infty$.

Si l'on échange les rôles de r et de s et si l'on prend en considération l'égalité $g(r, s) = -g(s, r)$, on obtient sans difficulté trois théoremes analogues aux trois précédents.

Étant donné que $f(r, s) = e^{g(r, s)}$, on déduit immédiatement les propriétés de la fonction $f(r, s)$ des propriétés indiquées pour la fonction $g(r, s)$.

Voici celle correspondant au théorème 2:

Théorème 4. *Lorsque* s *est un nombre positif fixé, la fonction* $f(r, s)$:

1° *décroît si* r *croît de* $-\infty$ *à* r_0,

2° *croît si* r *croît de* r_0 *à* $+\infty$.

Une conséquence de ce théorème est le résultat suivant:

Théorème 5. *Dans le cas où* $r > s > 0$, *on a*

$$f(r, s) > f(s, s),$$

c'est-à-dire

$$M_n^{[r]}(a; p) > M_n^{[s]}(a; p).$$

Ce théorème exprime le fait bien connu que $M_n^{[r]}(a;p)$ est une fonction croîssante de r.

Si l'on pose $p_1 = \cdots = p_n = 1$ et si l'on suppose que $r > s \geqslant 1$, le théorème 4 conduit à

Théorème 6. *Lorsque* $1 \leqslant s < r$, *on a*

$$\frac{\dfrac{a_1{}^r + \cdots + a_n{}^r}{n}}{\left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^r} < \frac{\dfrac{a_1{}^s + \cdots + a_n{}^s}{n}}{\left(\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^s},$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_1{}^r + \cdots + a_n{}^r}{a_1{}^s + \cdots + a_n{}^s} < \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^{r-s}.$$

S. Berkolaïko [2] a demontré la dernière inégalité en supposant que r et p sont des nombres naturels tels que $s < r$.

RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović et P. M. Vasić, *Nouvelles inégalités pour les moyennes d'ordre arbitraire*, ces Publications, № **159**—№ **170** (1966), 1—8.

[2] С. Берколайко, Математика в школе, **1964**, № **4**, 77—78.