PUBLIKACIJE ELEKTROTEHIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 7 (1956)

SUR QUELQUES FORMULES SOMMATOIRES

Dragoslav S. Mitrinovitch

Résumé. Dans cette Note, on démontre, entre autres, la formule sommatoire

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{\binom{m}{k}}{(n+kp)^{\nu/s}} \equiv \frac{1}{s^{\nu-1}(\nu-1)!} \int_0^1 t^{n-1}(1-t^s)^{\nu-1}(1-t^p)^m\, dt,$$

où $(n+kp)^{\nu/s}$ désigne le symbole de *Kramp*, $n(>0)$ un nombre réel, $\nu(\neq 1)$ et m des nombres entiers positifs, p et s des nombres positifs.

Les deux cas particuliers de cette formule sommatoire sont:

$$1^\circ \quad \sum_{k=0}^{m} \left\{ (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=1}^{\nu} [n+(i+k-1)p] \right\} \equiv (\nu+m-1)!/[p^\nu(\nu-1)!\,(n/p)_{\nu+m}],$$

avec: m, ν nombres naturels; $p(>0)$, $n(>0)$ nombres réels; $(n/p)_{\nu+m}$ symbole de *Pochhammer* dont la valeur est

$$\prod_{s=1}^{\nu+m} [(n/p)+s-1];$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=0}^{m} \left\{ (-1)^k \binom{m}{k} \Big/ \prod_{i=0}^{\nu-1} (n+k+i) \right\} \equiv \frac{(n-1)!\,(m+\nu-1)!}{(\nu-1)!\,(m+n+\nu-1)!}$$

(m, n, ν nombres naturels).

Si dans la formule 1° on pose $p=1$ avec n nombre naturel, on obtient la formule 2°.

En littérature, nous n'avons pas rencontré les formules obtenues dans la présente Note. La méthode suivie pour les établir est une variante des méthodes à l'aide desquelles on fait habituellement la sommation des expressions de formes envisagées ci-dessus.

1. Nous allons commencer par quelques cas particuliers.

Comme point de départ on prend l'identité suivante

$$(1)\qquad x^{n-1}(1-x)^m \equiv x^{n-1} - \binom{m}{1}x^n + \binom{m}{2}x^{n+1} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} x^{m+n-1},$$

(m, n nombres naturels).

Après l'intégration on obtient de (1)

$$(2)\qquad \int_0^x t^{n-1}(1-t)^m\,dt \equiv \frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}\binom{m}{1}x^{n+1} + \frac{1}{n+2}\binom{m}{2}x^{n+2} - \cdots + (-1)^m \frac{1}{m+n}\binom{m}{m}x^{m+n}.$$

Par l'intégration répétée il s'ensuit de (2) l'identité suivante

$$(3)\qquad \underbrace{\int_0^x dx \int_0^x dx \cdots \int_0^x}_{\nu \text{ fois}} t^{n-1}(1-t)^m\,dt \equiv \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+\nu-1)}x^{n+\nu-1} - \frac{\binom{m}{1}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+\nu)}x^{n+\nu} + \cdots + (-1)^m \frac{\binom{m}{m}}{(n+m)(n+m+1)\cdots(n+m+\nu-1)}x^{n+m+\nu-1}.$$

Si l'on applique la formule de *Cauchy* à l'expression qui figure au premier membre dans la relation (3), on obtient

$$(4)\qquad \frac{1}{(\nu-1)!}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}t^{n-1}(1-t)^m dt \equiv \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{(n+k)(n+k+1)\cdots(n+k+\nu-1)}x^{n+\nu+k-1}\right\}.$$

Lorsque'on y pose $x=1$, on a

$$(5)\qquad \frac{1}{(\nu-1)!}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m+\nu-1}dt \equiv \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\frac{1}{(n+k)(n+k+1)\cdots(n+k+\nu-1)}\right\}.$$

Étant donné que l'intégrale d'*Euler* de première espèce

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

a, pour $p=n$, $q=m+\nu$, la valeur

$$B(n,m+\nu)\equiv\frac{(n-1)!\,(m+\nu-1)!}{(m+n+\nu-1)!},$$

la formule (5) devient

$$(6)\qquad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+k+i)\right\}\equiv\frac{(n-1)!\,(m+\nu-1)!}{(\nu-1)!\,(m+n+\nu-1)!},$$

ce qu'il fallait prouver.

En étudiant une question, nous avons eu le besoin de sommer l'expression (6). Ceci nous a suscité d'établir alors d'autres formules sommatoires englobant la formule (6) comme cas particulier.

2. Dans le cas où

$$n=\nu\neq m,$$

la formule (6) prend une forme plus simple que voici:

$$(7)\qquad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{n-1}(n+k+i)\right\}\equiv\frac{(m+n-1)!}{(m+2n-1)!}.$$

Si l'on admet $n=\nu=m$, la formule (6) devient

$$(8)\qquad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\binom{m}{k}}{(m+k)(m+k+1)\cdots(2m+k-1)}\equiv\frac{(2m-1)!}{(3m-1)!}.$$

3. Jusqu'à présent nous avons supposé que n désigne un entier positif. Si n (>0) est un nombre réel quelconque, l'intégrale

$$B(n,m+\nu)\equiv\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{m+\nu-1}\,dt$$

a la valeur suivante[1])

$$B(n,m+\nu)\equiv\frac{(m+\nu-1)!}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+\nu-1)}$$

1) *Cf.*, par exemple
E. T. Whittaker – *G. N. Watson,* A course of modern analysis, Cambridge, 1952, p. 254, exemple 3.

se réduisant à

$$\frac{(n-1)!\,(m+\nu-1)!}{(m+n+\nu-1)!}$$

dans le cas où n est l'entier positif.

Par suite, la formule (5) prend alors la forme

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{\nu-1}(n+k+i)\equiv\frac{(m+\nu-1)!}{(\nu-1)!\,\{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m+\nu-1)\}}$$

$(m,\ \nu$ nombres naturels; $n>0)$.

4. À partir de (2) on tire

$$(9)\qquad \int_0^1 x^s dx\int_0^x t^{n-1}(1-t)^m\,dt$$

$$\equiv\frac{1}{n(n+s+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+s+2)}\binom{m}{1}+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(n+m)(n+m+s+1)}\binom{m}{m},$$

avec m un nombre naturel, n et s des nombres positifs quelconques.

Grâce à la formule de *Dirichlet*, on a

$$\int_0^1 x^s dx\int_0^x t^{n-1}(1-t)^m\,dt\equiv\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^m\,dt\int_t^1 x^s dx$$

$$\equiv\frac{1}{s+1}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^m\,dt-\frac{1}{s+1}\int_0^1 t^{n+s}(1-t)^m\,dt$$

$$\equiv\frac{1}{s+1}\,\frac{m!}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}$$

$$-\frac{1}{s+1}\,\frac{m!}{(n+s+1)(n+s+2)\cdots(n+s+m+1)}.$$

Par suite, la formule (9) devient

$$(10)\qquad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{1}{(n+k)(n+s+k+1)}\binom{m}{k}$$

$$\equiv\frac{m!}{s+1}\left\{\frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}-\frac{1}{(n+s+1)(n+s+2)\cdots(n+s+m+1)}\right\}$$

$(m$ entier positif, $n>0,\ s>0)$.

Dans le cas où les m et s sont des entiers positifs, la formule (10) prend la forme

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{(n+k)(n+s+k+1)} \binom{m}{k} \equiv \frac{m!}{s+1} \left\{ \frac{(n-1)!}{(m+n)!} - \frac{(n+s)!}{(m+n+s+1)!} \right\}.$$

5. Nous allons considérer maintenant le cas plus général que ceux qui précèdent et établir une formule assez générale, en partant de l'idenìité suivante

$$(1-x^p)^m \equiv 1 - \binom{m}{1} x^p + \binom{m}{2} x^{2p} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} x^{mp}$$

($x > 0$, m nombre naturel, p nombre positif)

ou bien de

$$f(x) \equiv x^{n-1} - \binom{m}{1} x^{n+p-1} + \binom{m}{2} x^{n+2p-1} - \cdots + (-1)^m \binom{m}{m} x^{n+mp-1}, \tag{11}$$

où

$$f(x) \equiv x^{n-1}(1-x^p)^m, \quad n \text{ nombre positif.}$$

Il s'ensuit de (11) par l'intégration

$$\int_0^x f(x)dx \equiv \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{n+p} \binom{m}{1} x^{n+p} + \frac{1}{n+2p} \binom{m}{2} x^{n+2p}$$
$$- \cdots + (-1)^m \frac{1}{n+mp} \binom{m}{m} x^{n+mp}.$$

En multipliant tous les deux membres de la dernière relation par x^{s-1} ($s > 0$) et en intégrant après cela, on trouve

$$\int_0^x x^{s-1} dx \int_0^x f(x)\, dx \equiv \frac{1}{n(n+s)} x^{n+s} - \frac{1}{(n+p)(n+p+s)} \binom{m}{1} x^{n+p+s}$$
$$+ \cdots + (-1)^m \frac{1}{(n+mp)(n+mp+s)} \binom{m}{m} x^{n+mp+s}.$$

En répétant le dernier procédé, on a

$$\int_0^x x^{s-1} dx \int_0^x x^{s-1} dx \int_0^1 f(x)\, dx \equiv \frac{1}{n(n+s)(n+2s)} x^{n+2s}$$
$$- \frac{1}{(n+p)(n+p+s)(n+p+2s)} \binom{m}{1} x^{n+p+2s} + \cdots$$
$$+ (-1)^m \frac{1}{(n+mp)(n+mp+s)(n+mp+2s)} \binom{m}{m} x^{n+mp+2s}.$$

Si l'on fait, au total, les ν intégrations, on parvient à l'identité

$$(12)\quad \int_0^x s^{s-1}dx \int_0^x x^{s-1}\,dx \cdots \int_0^x x^{s-1}\,dx \int_0^x f(x)dx$$

$$\equiv \frac{1}{n\,(n+1)\cdots[n+(\nu-1)s]}\,x^{n+(\nu-1)s}$$

$$-\frac{\binom{m}{1}}{(n+p)\,(n+p+s)\cdots[n+p+(\nu-1)\,s]}\,x^{n+p+(\nu-1)s}$$

$$+\cdots$$

$$+(-1)^m\frac{\binom{m}{m}}{(n+mp)\,(n+mp+s)\cdots[n+mp+(\nu-1)s]}\,x^{n+mp+(\nu-1)s}.$$

L'expression figurant au premier membre de la relation (12) renferme les ν signes $\int$ superposés. Grâce à la formule de *Dirichlet*, cette expression se ramène à

$$\frac{1}{s^{\nu-1}(\nu-1)\,!}\int_0^x t^{n-1}(x^s-t^s)^{\nu-1}(1-t^p)^m dt.$$

Si l'on pose $x=1$ dans (12), on admet

$$(13)\quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\,(n+kp)^{\nu/s}\equiv\{1/[s^{\nu-1}(\nu-1)\,!]\}\int_0^1 t^{n-1}(1-t^s)^{\nu-1}(1-t^p)^m dt,$$

où le symbole de *Kramp*

$$(n+kp)^{\nu/s}\equiv(n+kp)\,(n+kp+s)\cdots[n+kp+(\nu-1)s]$$

donne la possibilité d'écrire la formule (13), sous une forme si condensée.

Dans le cas où $s=p$ la relation (13) se transforme en la suivante

$$(14)\quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\,(n+kp)^{\nu/p}\equiv\{1/[p^{\nu-1}(\nu-1)\,!]\}\int_0^1 t^{n-1}(1-t^p)^{\nu+m-1}dt,$$

avec m et ν nombres naturels.

On sait[1]) qu'on a

$$(15)\quad \int_0^1 t^{n-1}(1-t^p)^{\nu+m-1}dt\equiv(1/p)B\,(n/p,\ \nu+m)\qquad (p>0,\ \nu+m>0,\ n>0),$$

1) A. ERDELYI - W. MAGNUS - F. OBERHETTINGER - F. TRICOMI, *Higher transcendental functions*, vol. I, New York, 1953, p. 10, formule (17).

en dénotant par $B(n/p,\ v+m)$ la fonction eulérienne de première espèce de deux variables n/p et $v+m$.

Par suite, dans le cas où $p>0$, $n>0$ et où les paramètres m et v sont des nombres entiers positifs, on admet la formule sommatoire suivante:

$$(16)\quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=1}^{v}[n+(i+k-1)p]\equiv\{1/[p^v(v-1)!]\}\,B(n/p,\ v+m)$$

$$\equiv(v+m-1)!/[p^v(v-1)!\,(n/p)_{v+m}],$$

où $(n/p)_{v+m}$ est le symbole de *Pochhammer* signifiant:

$$(n/p)_{v+m}\equiv(n/p)\,[(n/p)+1]\,[(n/p)+2]\cdots[(n/p)+m+v-1]\,.$$

En faisant $p=1$ dans (16), on retrouve, comme cas particulier, la formule (6), établie directement dans le paragraphe 1 de cette Note.

Si l'on particularise convenablement les paramètres intervenant dans la relation (13), on pourrait obtenir des formules différentes du type (6) présentant quelque intérêt.

6. Par un choix convenable des paramètres intervenant dans les formules ici obtenues, on pourrait considérer le cas où m n'est pas restreint d'être l'entier positif. Dans ce cas, on aurait des séries infinies au lieu des sommes finies.

REZIME

O NEKIM SUMACIONIM FORMULAMA

Dragoslav S. Mitrinović

U članku su izvedene sumacione formule medju kojima i sledeća

$$\text{(I)}\quad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=1}^{v}[n+(i+k-1)p]\right\}$$

$$\equiv (v+m-1)\,!\,/[p^v(v-1)\,!\,(n/p)_{v+m}]$$

gde m, n, v, p zadovoljavaju uslove:

m, v prirodni brojevi;
$p\,(>0)$, $n\,(>0)$ realni brojevi;

$$(n/p)_{v+m}\equiv\prod_{s=1}^{v+m}[(n/p)+s-1].$$

Takodje je direktno izvedena formula

$$\text{(II)}\quad \sum_{k=0}^{m}\left\{(-1)^k\binom{m}{k}\Big/\prod_{i=0}^{v-1}(n+k+i)\right\}\equiv\frac{(n-1)\,!\,(m+v-1)\,!}{(v-1)\,!\,(m+n+v-1)\,!}$$

(m, n, v prirodni brojevi)

koja, uostalom, izlazi iz (I) u slučaju kada su ispunjeni uslovi: $p=1$ i n prirodan broj.

U ovom članku izvedena je i jedna opštija formula koja obuhvata (I), pa prema tome i (II), kao partikularni slučaj.