PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 178 (1966)

ÜBER EINE BRACHISTOCHRONE*

Stanimir Fempl

Eine starre Linie — wie bekannt — nennt man Brachistochrone, wenn längs deren ein Massenpunkt, von einen Kurvenpunkte, unter Einfluss irgendeiner Kraft, in der kürzesten Zeit zum anderen Kurvenpunkt gelangt. Leibniz und Jacob Bernoulli [1] lösten das Brachistochronenproblem in dem Fall, wenn der Massenpunkt blos durch sein eigenes Gewicht bewegt wird, und wenn sich die Bewegung in der Nähe der Erdoberfläche abspielt. In diesem Falle also, stellt die bewegende Kraft einen konstanten Vektor dar. Man setzte noch voraus dass die Kurve eine ebene Kurve ist. Später ist auch der Fall einer Raumkurve untersucht worden, und es zeigte sich dass die gesuchte Kurve in Wirklichkeit eine ebene Kurve darstellt, nähmlich eine Zykloide.

In dieser Arbeit untersuche ich eine Brachistochrone längs welcher ein Massenpunkt abrollt, wenn auf ihn, ausser der Schwere, noch eine Zentralkraft

$$\vec{F} = -k\vec{r} \qquad (k>0)$$

wirkt. Hier ist $\vec{r}(x, y, z)$ der Radiusvektor, k eine Konstante. Da beide Kräfte, die Schwerkraft $\vec{P} = -mg\vec{k}$ (z-Achse sei nach oben gerichtet) und $\vec{F}$ Kräftefunktionen U_P und U_F besitzen, so ist [2]

$$U_P = -mgz + \text{const}, \qquad U_F = -\frac{k}{2}r^2 + \text{const}.$$

Da noch durch die Kräfte $\vec{P}$ und $\vec{F}$ verursachte Bewegung konservativ ist, so erhält man das Integral der lebendigen Kraft:

$$T = U + h = U_F + U_P + h \qquad (h = \text{const}).$$

Es ist also

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{k}{2}r^2 - mgz + h_1 \qquad (h_1 = \text{const}). \tag{1}$$

Rechnet man die Anfangszeit von der Lage $\vec{\varrho}_0(x_0, y_0, z_0)$, und die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ mit $\vec{v}_0$ bezeichnet, so erhält man

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{k}{m}(\varrho_0{}^2 - r^2) + 2g(z_0 - z) + v_0{}^2$$

* Vorgelegt am 20 November 1966 auf Vorschlag von Prof. D. S. Mitrinović.

d. h.

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{ds}{dt}=\sqrt{A-Br^2+Cz}=\sqrt{B}\,\sqrt{K^2-r^2+2az}, \\ K^2=\dfrac{A}{B}, \quad A=\dfrac{k}{m}\varrho_0{}^2+2gz_0+v_0{}^2, \quad B=\dfrac{k}{m}, \quad C=-2g, \quad a=\dfrac{C}{2B}. \end{cases}$$

Hier wählt man z_0 so, dass $A>0$, also auch A/B positiv sei. Für $A\leqslant 0$ hat das Problem keine reelle Lösung, da die rechte Seite von (2), wegen $C<0$, keinen reellen Wert hätte. Damit das Problem überhaupt einen Sinn habe, muss $K^2-r^2+2az>0$ sein. Dies wird erfüllt, wenn $\varrho_0>r$ und $z_0>z$ ist; aber es bestehen auch andere Möglichkeiten, die hier nicht besprochen werden.

Wegen $ds^2=(1+y'^2+z'^2)\,dx^2$ folgt aus (2) für die Bewegungszeit t:

$$t=\frac{1}{\sqrt{B}}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{K^2-r^2+2az}}\,dx,$$

wo $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$ den Endpunkt der gesuchten Kurve bedeutet.

Damit die Bewegungsdauer t ein Minimum erreicht, ist es notwendig das Funktional

$$(3)\qquad J=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{\frac{1+y'^2+z'^2}{K^2-r^2+2az}}\,dx$$

zu untersuchen. Die Extremalen dieses Funktionals erhält man, indem man das System der Eulerschen Gleichungen [2]

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\equiv\frac{y\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{(K^2-r^2+2az)^3}}-\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{(K^2-r^2+2az)(1+y'^2+z'^2)}}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'}\equiv\frac{(z-a)\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{(K^2-r^2+2az)^3}}-\frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{(K^2-r^2+2az)(1+y'^2+z'^2)}}=0$$

integriert. Setzt man der Kürze wegen

$$\Phi(x)=\sqrt{1+y'^2+z'^2}, \qquad \Psi(x)=\sqrt{K^2-r^2+2az},$$

so reduziert sich das obige System auf

$$\frac{y\Phi}{\Psi^3}=\frac{d}{dx}\frac{y'}{\Phi\Psi}=\frac{y''\Phi\Psi-y'(\Phi\Psi)'}{\Phi^2\Psi^2},$$

$$\frac{(z-a)\Phi}{\Psi^3}=\frac{d}{dx}\frac{z'}{\Phi\Psi}=\frac{z''\Phi\Psi-z'(\Phi\Psi)'}{\Phi^2\Psi^2},$$

und wegen

$$(\Phi\Psi)'=\frac{y'y''+z'z''}{\Phi}\Psi-\frac{x+y'+(z-a)z'}{\Psi}\Phi,$$

auf das System

$$y\Phi^4 = y''\Phi^2\Psi^2 - y'(y'y'' + z'z'')\Psi^2 + y'[x + yy' + (z-a)z']\Phi^2,$$
$$(z-a)\Phi^4 = z''\Phi^2\Psi^2 - z'(y'y'' + z'z'')\Psi^2 + z'[x + yy' + (z-a)z']\Phi^2.$$

In den Ausdrücken für Φ und Ψ erscheinen keine Ableitungen y'' und z''. Deshalb stellt das letste System ein System von zwei linearen Gleichungen in Bezug auf y'' und z'' dar, und man bekommt

$$y'' = \frac{(1+y'^2+z'^2)(y-xy')}{K^2-r^2+2az}, \qquad z'' = \frac{(1+y'^2+z'^2)(z-a-xz')}{K^2-r^2+2az},$$

woraus

$$\frac{y''}{y-xy'} = \frac{z''}{z-a-xz'}$$

folgt. Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $-x$ und nach Integration folgt

$$\ln(y-xy') = \ln[C_1(z-a-xz')],$$

woraus sich

$$\frac{y'-C_1z'}{y-C_1(z-a)} = \frac{1}{x}$$

ergibt, und nach abermaliger Integration,

$$C_1x + C_2y + z - a = 0,$$

wo C_1 und C_2 neue Integrationskonstanten bedeuten. Aus diesem Ausdruck ersieht man dass die gesamte Bewegung sich in einer durch den Punkt $S(0, 0, a)$ hindurchgehende Ebene abspielt. Es ist nicht schwer zu zeigen dass die Richtungen sämtlicher, während der Bewegung auf den Massenpunkt wirkender resultiernder Kräfte $\vec{F}+\vec{P}$ durch den Punkt S gehen. Die gesuchte Brachistochrone muss also in einer durch den Anfangspunkt, Endpunkt und durch den Punkt S gehende Ebene liegen.

Auf Grund des erwähnten, kann sich das Problem merklich vereinfachen. Wenn man das Koordinatensystem XOY in die Ebene der Kurve legt, so wird sich das System der Eulerschen Gleichungen auf nur eine Gleichung reduzieren, in welcher nur eine unbekannte Funktion y mit ihren beiden Ableitungen erscheinen wird. Es ist noch bekannt dass die Eulersche Gleichung invariant ist [3]. Ob also eine Kurve zur Extremale wird oder nicht, hängt nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab. Deshalb kann man schon im Grundintegral (3) eine Koordinatentransformation durchführen, nämlich rechtwinkelige — durch Polarkoordinaten zu ersetzen. Setzt man also $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ in das Integral $J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{K^2-r^2}}\,dx$, so folgt

$$J = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{\frac{r^2+r'^2}{K^2-r^2}}\,d\theta; \qquad r(\theta_0) = r_0, \quad r(\theta_1) = r_1, \tag{4}$$

und man wird dem Funktional (4) entsprechende Extremalen erhalten.

Das letzte Integral ist um so einfacher, da die Grösse θ nicht explizit erscheint. Deshalb kann man sogleich das erste Integral der Eulerschen Gleichung schreiben [4], nämlich

$$(5)\qquad f-r'\frac{\partial f}{\partial r'}\equiv\sqrt{\frac{r^2+r'^2}{K^2-r^2}}-r'\frac{r'}{\sqrt{(r^2+r'^2)(K^2-r^2)}}=C_1\quad(=\mathrm{const}).$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$(6)\qquad r'=\frac{dr}{d\theta}=\frac{r\sqrt{(1+C_1^2)\,r^2-C_1^2K^2}}{C_1\sqrt{K^2-r^2}},$$

und das Integral dieser Gleichung ist

$$(7)\qquad 2\theta+C_2=\arcsin\frac{(1+2C_1^2)\,r^2-2C_1^2K^2}{r^2}-\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}\arcsin\frac{2(1+C_1^2)\,r^2-(1+2C_1^2)\,K^2}{K^2}.$$

Die durch die Punkte (r_0, θ_0) und (r_1, θ_1) gehende, dem Problem entsprechende Extremale, findet man, indem die Anfangsbedingungen benutzt werden. Setzen wir voraus dass die Konstanten C_1 und C_2 auf Grund der Anfangsbedingungen bestimmt sind (diese Frage werde ich noch am Ende der Abhandlung trätieren), so ist noch nötig die Natur der Kurve (7) zu bestimmen. Dies ist möglich, indem man die Gleichung (6) benutzt, und die Ableitung r'' die aus dieser Gleichung folgt, und wenn man die natürliche Gleichung der Kurve

$$\frac{d\varrho}{ds}=\Omega\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)$$

zusammenstellt. Hier ist

$$\varrho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''},$$

der Krümmungshalbmesser im Punkte (r, θ). Nach kürzerer Rechnung erhält man für ϱ den Ausdruck

$$(8)\qquad \varrho=-\frac{1}{C_1}\sqrt{K^2-r^2},$$

während aus (6) folgt

$$\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=ds=\frac{r^2\,d\theta}{C_1\sqrt{K^2-r^2}}.$$

Da noch auf Grund (8)

$$r^2=K^2-C_1^2\varrho^2,\qquad d\varrho=\frac{r\,dr}{C_1\sqrt{K^2-r^2}}$$

folgt, so ist

$$(9)\qquad \frac{d\varrho}{ds}=\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=\frac{r'}{r}=\frac{\sqrt{(1+C_1^2)\,r^2-C_1^2K^2}}{C_1\sqrt{K^2-r^2}}.$$

Deshalb lautet die natürliche Gleichung der Kurve

$$(10)\qquad \frac{d\varrho}{ds}=\frac{K}{C_1^2}\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}-\frac{C_1^2(1+C_1^2)}{K^2}}.$$

Diese Gleichung stellt die natürliche Gleichung einer Rollkurve dar. Wenn nämlich auf einem Kreis mit dem Halbmesser a ein anderer Kreis mit dem Halbmesser b ohne gleiten abrollt, so lauten die Parametergleichungen einer solcher Rollkurve

$$x=(a+b)\cos u-b\cos\frac{a+b}{b}u, \qquad y=(a+b)\sin u-b\sin\frac{a+b}{b}u.$$

Im speziellen Fall, wenn a und b gleichbezeichnet sind, so stellen diese Gleichungen eine Epizykloide dar, und wenn nicht, eine Hypozykloide. Für den Krümmungshalbmesser ϱ erhält man aus den obigen Gleichungen

$$\varrho=\frac{4b(a+b)\sin\frac{a}{2b}u}{a+2b}, \qquad \frac{d\varrho}{du}=\frac{2a(a+b)}{a+2b}\cos\frac{a}{2b}u,$$

und für das Bogenelement ds,

$$\frac{ds}{du}=2(a+b)\sin\frac{a}{2b}u,$$

so dass

$$\frac{d\varrho}{ds}=\frac{a}{a+2b}\operatorname{ctg}\frac{a}{2b}u$$

folgt. Da noch aus dem Ausdruck für ϱ

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2b}u=\pm\frac{\sqrt{16b^2(a+b)^2-(a+2b)^2\varrho^2}}{(a+2b)\varrho}$$

folgt, so ist

$$\frac{d\varrho}{ds}=\pm\frac{4ab(a+b)}{(a+2b)^2}\sqrt{\frac{1}{\varrho^2}-\left[\frac{a+2b}{4b(a+b)}\right]^2}, \tag{11}$$

und das ist die natürliche Gleichung der Rollkurve. Wenn man (11) mit (10) vergleicht, so erhält man

$$\pm\frac{4ab(a+b)}{(a+2b)^2}=\frac{K}{C_1^2}, \qquad \frac{a+2b}{4b(a+b)}=\pm\frac{C_1\sqrt{1+C_1^2}}{K}. \tag{12}$$

Nach Multiplikation dieser Gleichungen folgt

$$2\frac{b}{a}=\pm\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}-1. \tag{13}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist immer negativ, und das bedeutet dass die Grössen a und b entgegengesetzt bezeichnet sind. Auf Grund der Tatsache dass zwei Kurven dann und nur dann kongruent sind wenn sie dieselbe natürliche Gleichung besitzen (Ausnahme sind Kreise und Geraden, für welche $\varrho=R$, $d\varrho/ds=0$ und $\varrho=\infty$) [5], kann man behaupten dass die gesuchte Extremale eine Hypozykloide darstellt.

Wenn man den gefundenen Wert für b/a in die zweite Gleichung (12) substituiert, so folgt

$$b=\frac{K(\sqrt{1+C_1^2}\mp C_1)}{2\sqrt{1+C_1^2}}.$$

Jedenfalls ist b positiv, da $K>0$ ist, was man aus (2) ersieht. Weiterhin, wenn man in (13) den so gefundenen Wert b substituiert, so folgt $a=-K$.

Aus (13) ersieht man noch dass $2|b/a|<2$ d.h. $b<|a|$ ist. Deshalb kann man $b=\theta|a|$ $(0<\theta\leqslant 1)$ setzen, und der Gleichung der gesuchten Extremale kann man die Gestalt

$$\frac{x}{K}=(1-\theta)\cos u+\theta\cos\frac{1-\theta}{\theta}u, \qquad \frac{y}{K}=(1-\theta)\sin u-\theta\sin\frac{1-\theta}{\theta}u$$

geben.

Von Interesse ist noch die Frage, ob sich die Konstanten C_1 und C_2 so bestimmen lassen, dass die Kurve durch zwei im Vorhinein gegebene Punkte (r_0, θ_0) und (r_1, θ_1) geht. Aus (7) ersieht man dass die Ausdrücke neben arc sin im Intervale $[-1, +1]$ liegen müssen. Das wird immer der Fall sein, wenn für r

$$\frac{C_1 K}{\sqrt{1+C_1^2}}\leqslant r\leqslant K \tag{14}$$

gilt. Dabei ist K durch Konstanten ausgedrückt die sich auf das neue Polarkoordinatensystem beziehen. Wegen $r_0^2=x_0^2+y_0^2+(z_0-a)^2=\varrho_0^2-2az_0+a^2$ nämlich, und wegen $z_0=0$, ist im Bezug auf das neue System $\varrho_0^2=r_0^2-a^2$, so dass

$$A=\frac{k}{m}(r_0^2-a^2)+v_0^2$$

folgt. Da noch B und C invariant sind, so ist

$$K^2=\frac{1}{B}\left[\frac{k}{m}(r_0^2-a^2)+v_0^2\right].$$

Im speziellen Fall $v_0=0$, wenn man noch das Gewicht des beweglichen Punktes nicht beachtet, so folgt aus (2) dass $|a|=r_0$, weil $U_P=0$ ist, und deshalb ist $K=r_0$.

Am Ende, erwähnen wir noch folgendes: Wegen $K\geqslant r$ ersieht man aus der Eulerschen Gleichung (5) dass C_1 reell und positiv ist. Wenn man in J den Integrand mit f bezeichnet, so ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r'^2}=\frac{r^2}{\sqrt{(K^2-r^2)(r^2+r'^2)^3}}.$$

Dieser Ausdruck ist positiv und dreimal differenzierbar. Deshalb sind die notwendige Bedingungen für ein starkes Minimum erfüllt. Aus der Natur des Problems kann man schliessen dass dieses Minimum unter Bedingungen (14) auch verwirklicht sein wird.

LITERATUR

[1] P. STÄCKEL: *Abhandlungen über Variations-Rechnung* (I). Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. № 46. Leipzig, 1914.

[2] L. E. ELSGOLC: *Вариационное исчисление*. Moskva 1958.

[3] I. M. GELFAND — S. V FOMIN: *Вариационное исчисление*. Moskva 1961.

[4] T. PEJOVIĆ: *Diferencijalne jednačine*. Beograd 1962.

[5] G. SCHEFFERS: *Einführung in die Theorie der Kurven*. Leipzig 1910.