PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 174 (1967)

O NEKIM OPŠTIM KLASAMA LINEARNIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA*

Radosav Ž. Đorđević

SADRŽAJ

* Primljeno za štampu 20. oktobra 1966. na predlog D. S. Mitrinovića.

1. UVOD

1.1. Ovaj rad sastoji se iz sledećih delova:

1. Uvod,
2. Neke linearne funkcionalne jednačine,
3. Neke linearne funkcionalne jednačine koje su u vezi sa Cauchyevom jednačinom,
4. Neki sistemi linearnih funkcionalnih jednačina,
5. Otvorena pitanja i mogućnosti generalizacija,
6. Bibliografija.

1.2. U poglavlju 2. data je generalizacija jednog rezultata prof. D. S. Mitrinovića, i ona se odnosi na jednačinu

$$f_1(x_1, x_2) + f_2(x_2, x_3, x_4) + f_3(x_1, x_3, x_4) = 0,$$

u kojoj nepoznate funkcije f_i $(i = 1, 2, 3)$ ne zavise od istog broja argumenata. Određeno je opšte rešenje generalnije funkcionalne jednačine

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2) + f_2(x_2, x_3, x_4) + \cdots + f_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) \\ &+ g_1(x_1, x_3, x_4) + g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) + \cdots + g_{n-1}(x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = 0. \end{aligned}$$

Drugi deo ovog poglavlja odnosi se na generalisane ciklične funkcionalne jednačine.

U teoriji funkcionalnih jednačina funkcionalna jednačina

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}) = 0 \qquad (x_{n+i} = x_n;\quad i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.1}$$

zove se osnovna ciklična funkcionalna jednačina.

Iz nje izvedena funkcionalna jednačina je jednačina

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}) = 0 \qquad (p \leqslant n), \tag{1.2}$$

koja se za $p = n$ svodi na jednačinu (1.1).

Opšta rešenja jednačina (1.1) i (1.2) odredili su J. Aczél, M. Ghermănescu i M. Hosszú (videti: [2], [4], [22]) pod pretpostavkama:

1° $x_i \in S$, gde je S proizvoljan neprazan skup;

2° Funkcija f vrši preslikavanje $f: S \to M$, gde je M aditivna Abelova grupa;

3° Za $x, a \in M$ i $m (\leqslant n)$ prirodan broj, jednačina $mx = a$ ima jedinstveno rešenje $x = a/m$.

Pri tome su posmatrana sledeća dva slučaja: 1° $n \geqslant 2p-1$, tzv. „laki" slučaj i 2° $p < n < 2p-1$, tzv. „teški" slučaj.

U „lakom" slučaju, tj. za $n \geqslant 2p-1$, jednačinu (1.2) rešio je D. Ž. Đoković i bez pretpostavke 3° (videti [7]).

Za određivanje opšteg rešenja generalisane ciklične funkcionalne jednačine

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}) = 0 \qquad (p \leqslant n) \tag{1.3}$$

takođe su razlikovani „laki" i „teški" slučaj.

I dok je u „lakom" slučaju, pod pretpostavkama 1° i 2° (gde pretpostavka 2° važi za svaku od funkcija f_i) jednačina (1.3) u potpunosti rešena (videti [7]), u „teškom" slučaju gotovo i da nije rešavana. Zapravo, za „teški" slučaj do nedavna nisu objavljivani nikakvi radovi.

Za neke posebne vrednosti n i p, D. S. Mitrinović je (videti [16]) odredio opšta rešenja u „teškom" slučaju nekih jednačina koje su partikularni slučajevi jednačine (1.3).

Ovde je jednačina (1.3) u potpunosti rešena i u tom „teškom" slučaju, tj. za $p < n < 2p-1$.

S obzirom da, u opštem slučaju, u jednačini (1.3) figurišu različite nepoznate junkcije f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, specifikacijom ovih funkcija i dodavanjem pretpostavke 3°, iz rešenja jednačine (1.3) dobijeno je i rešenje funkcionalne jednačine (1.2), kao i rešenje osnovne ciklične funkcionalne jednačine (1.1).

1.3. U trećem poglavlju posmatrane su sledeće funkcionalne jednačine

$$\sum_{i=1}^{m+n} f\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j}, \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}\right) = 0, \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j}, \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}\right) = 0, \tag{1.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j}, \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}, \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} x_{i+m+n+j}\right) = 0, \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j}, \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}, \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} x_{i+m+n+j}\right) = 0. \tag{1.7}$$

Za jednačine (1.4) i (1.5) određena su rešenja u slučaju kada je a prozvoljan kompleksan broj.

Jednačina (1.6) rešena je u slučajevima $a = 1$ i $a^{m+n+k} \neq 1$.

Za jednačinu (1.7) određeno je rešenje samo u slučaju kada je $a^{m+n+k} \neq 1$.

U vezi sa navedenim jednačinama dokazano je više teorema i ukazano na primenu dobijenih rezultata u teoriji konveksnih funkcija.

Ideju za proučavanje funkcionalnih jednačina u kojima se pojavljuju parametri dao nam je prof. D. S. Mitrinović. Ova ideja pokazala se kao vrlo plodna.

U drugom delu ovog poglavlja određeno je opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine

$$f_1\left(x_i,\ \sum_{j=2}^{n} x_j\right)+\sum_{i=2}^{n-1} f_i\left(x_i,\ x_{i+1},\ \sum_{j=i+2}^{n+i-1} x_j\right)=0 \qquad (n\geqslant 4).$$

I u ovoj jednačini nepoznate funkcije ne zavise od istog broja argumenata.

U slučaju kada su nepoznate funkcije f_i $(i=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1)$ među sobom jednake određeno je opšte rešenje.

Ovo je karakteristično, jer je u rešavanju funkcionalnih jednačina obično suprotno, tj. za opštije jednačine dobijaju se i opštija rešenja.

1.4. U četvrtom poglavlju posmatrani su sistemi linearnih funkcionalnih jednačina u kojima nepoznate funkcije ne zavise od istog broja argumenata.

U prvom delu ovog poglavlja posmatrani su sistemi u kojima svaka jednačina sadrži sve nepoznate funkcije. Ovi sistemi funkcionalnih jednačina nazvani su sistemi prve vrste.

Sisteme druge vrste, koji su posmatrani u drugom delu ovog poglavlja, čine sistemi linearnih funkcionalnih jednačina u kojima sve jednačine ne sadrže sve nepoznate funkcije.

1.5. U petom poglavlju izloženi su problemi koji su ostali otvoreni. Isto tako ukazano je na mogućne generalizacije dobijenih rezultata.

1.6. U odeljku Bibliografija, po azbučnom redu autora, popisana je literatura koja je ili u tekstu citirana ili je korišćena kao opšta literatura o funkcionalnim jednačinama.

*

Na kraju želim da izrazim svoju zahvalnost profesoru D. S. Mitrinoviću koji me je uputio u naučni rad, rukovodio izradom ove teze i svojim savetima učinio da rezultati izloženi u tezi dobiju konačni oblik.

Isto tako želim da zahvalim P. M. Vasiću na srdačnoj pomoći koju mi je pružio u toku izrade ovog rada.

2. NEKE LINEARNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE

2.1. GENERALIZACIJA JEDNOG REZULTATA D. S. MITRINOVIĆA

2.1.1. Jedan rezultat D. S. Mitrinovića

D. S. Mitrinović je posmatrao (videti [15]) funkcionalnu jednačinu

$$f_1(x_1, x_2)+f_2(x_2, x_3, x_4)+f_3(x_1, x_3, x_4)=0, \tag{2.1}$$

u kojoj nepoznate funkcije f_1, f_2, f_3 ne zavise od istog broja argumenata, pri čemu

$$f_1 : S^2 \rightarrow M, \qquad f_i : S^3 \rightarrow M \qquad (i=2, 3),$$

gde je S neprazan skup i M aditivna Abelova grupa.

Za jednačinu (2.1), D. S. Mitrinović je dokazao da ima opšte rešenje određeno sa

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2)&=H_1(x_1)-F_1(x_2),\\ f_2(x_1, x_2, x_3)&=F_1(x_1)-G_1(x_2, x_3),\\ f_3(x_1, x_2, x_3)&=-H_1(x_1)+G_1(x_2, x_3), \end{aligned} \tag{2.2}$$

gde su F_1, G_1, H_1 proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

2.1.2. Generalizacija

Koristeći navedeni rezultat D. S. Mitrinovića, odredićemo opšte rešenje funkcionalne jednačine koja je opštija od jednačine (2.1).

Prethodno ćemo uvesti sledeće oznake

$$\begin{aligned} Q_p^q X&=(x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{q-1}, x_q) && (p, q \text{ prirodni brojevi i } p<q);\\ R_p^q X&=(x_p, x_{p+2}, \ldots, x_{q-2}, x_q) && (p, q \text{ neparni}),\\ &=(x_p, x_{p+2}, \ldots, x_{q-3}, x_{q-1}) && (p \text{ neparno, } q \text{ parno}),\\ &=(x_{p+1}, x_{p+3}, \ldots, x_{q-2}, x_q) && (p \text{ parno, } q \text{ neparno}),\\ &=(x_{p+1}, x_{p+3}, \ldots, x_{q-3}, x_{q-1}) && (p, q \text{ parni}), \end{aligned}$$

gde su p i q $(p<q)$ prirodni brojevi.

Neka je S neprazan skup i M aditivna Abelova grupa i

$$f_i : S^{i+1} \to M, \quad g_j : S^{j+2} \to M \qquad (i=1,\ 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, n-1).$$

Dokazaćemo sledeći rezultat.

Teorema 1. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(Q_i^{2i} X) + \sum_{i=1}^{n-1} g_i(R_1^{2i+2} X_0\, x_{2i+2}) = 0 \tag{2.3}$$

određeno je sa

$$\begin{aligned} f_1(Q_1^2 X) &= H_1(R_1^2 X) - F_1(Q_2^2 X), \\ f_r(Q_r^{2r} X) &= (-1)^r F_{r-1}(Q_r^{2r-2} X) + (-1)^{r+1} G_{r-1}(R_r^{2r} X, x_{2r}), \\ &\quad + (-1)^r F_r(Q_{r+1} X) \qquad (r=2,\ 3, \ldots, n-1), \\ f_n(Q_n^{2n} X) &= (-1)^n F_{n-1}(Q_n^{2n-2} X) + (-1)^{n+1} G_{n-1}(R_n^{2n} X, x_{2n}), \\ g_k(R_1^{2k+2} X, x_{2k+2}) &= (-1)^k H_k(R_1^{2k} X) + (-1)^{k+1} G_k(R_{k+1}^{2k+2} X, x_{2k+2}) \\ &\quad + (-1)^k H_{k+1}(R_1^{2k+2} X) \qquad (k=1,\ 2, \ldots, n-2), \\ g_{n-1}(R_1^{2n} X, x_{2n}) &= (-1)^{n-1} H_{n-1}(R_1^{2n-2} X) + (-1)^n G_{n-1}(R_n^{2n} X, x_{2n}), \end{aligned} \tag{2.4}$$

gde su F_i, H_j, G_s $(i, j, s=1,\ 2, \ldots, n-1)$ *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* M.

Dokaz. Za $n=2$ jednačina (2.3) svodi se na (2.1), a rešenje (2.2) sa uvedenim oznakama ima oblik

$$\begin{aligned} f_1(Q_1^2 X) &= H_1(R_1^2 X) - F_1(Q_2^2 X), \\ f_2(Q_2^4 X) &= F_1(Q_2^2 X) - G_1(R_2^4 X, x_4), \\ g_1(R_1^4 X, x_4) &= -H_1(R_1^2 X) + G_1(R_2^4 X, x_4). \end{aligned}$$

Prema tome, teorema je tačna za $n=2$.

Pretpostavimo sada da je teorema tačna za neko fiksirano n i posmatrajmo jednačinu

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_1(Q_i^{2i} X) + \sum_{i=1}^{n} g_i(R_1^{2i+2} X, x_{2i+2}) = 0. \tag{2.5}$$

Stavljajući u (2.5) da je $x_i = x_i^0$ ($x_i^0 = \text{const} \in S$; $i=1,\ 2, \ldots, n$), dobijamo

$$f_{n+1}(Q_{n+1}^{2n+2} X) = (-1)^{n+1} F_n(Q_{n+1}^{2n} X) + (-1)^n G_n(R_{n+1}^{2n+2} X, x_{2n+2}), \tag{2.6}$$

gde su F_n i G_n proizvoljne funkcije.

Zamenjujući (2.6) u (2.5), dobijamo jednačinu

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(Q_i^{2i} X) + \sum_{i=1}^{n} B_i(R_1^{2i+2} X, x_{2n+2}) = 0, \tag{2.7}$$

gde smo uveli oznake

(2.8) $A_i=f_i,\ B_i=g_i\ (i=1,2,\ldots,n-1),\ A_n=f_n+(-1)^{n+1}F_n,\ B_n=g_n+(-1)^n G_n.$

Stavljajući u jednačini (2.7) $x_i=x_i^0$ $(i=2,\ 4,\ldots,\ 2n-2,\ 2n)$, dobijamo

$$B_n(R_1^{2n+2}X, x_{2n+2})=(-1)^n H_n(R_1^{2n}X), \tag{2.9}$$

gde je H_n proizvoljna funkcija.

Na osnovu (2.9), jednačina (2.7) dobija sledeći oblik

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(Q_i^{2i}X)+\sum_{i=1}^{n-1} C_i(R_1^{2i+2}X, x_{2i+2})=0, \tag{2.10}$$

gde smo uveli oznake

(2.11) $C_i=B_i\quad (i=1,\ 2,\ldots,\ n-2),\qquad C_{n-1}=B_{n-1}+(-1)^n H_n.$

Funkcionalna jednačina (2.10) je tačno jednačina (2.3). Na osnovu induktivne hipoteze, opšte rešenje jednačine (2.10) dato je sa (2.4), gde umesto f_i treba staviti A_i i umesto g_i treba staviti C_i.

Na osnovu jednakosti (2.11), (2.9), (2,8), (2.6) dobijamo da je opšte rešenje jednačine (2.5) dato sa

$$\begin{aligned}
f_r(R_r^{2r}X)&=A_r(Q_r^{2r}X)\qquad (r=1,\ 2,\ldots,\ n-1),\\
f_n(Q_n^{2n}X)&=A_n(Q_n^{2n}X)+(-1)^n F_n(Q_{n+1}^{2n}X),\\
f_{n+1}(Q_{n+1}^{2n+2}X)&=(-1)^{n+1}F_n(Q_{n+1}^{2n}X)+(-1)^n G_n(R_{n+1}^{2n+2}X, x_{2n+2}),\\
g_k(R_1^{2k+2}X, x_{2k+2})&=C_k(R_1^{2k+2}X, x_{2k+2})\qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ n-2),\\
g_{n-1}(R_1^{2n}X, x_{2n})&=C_{n-1}(R_1^{2n}X, x_{2n})+(-1)^{n+1}H_n(R_1^{2n}X),\\
g_n(R_1^{2n+2}X, x_{2n+2})&=(-1)^n H_n(R_1^{2n}X)+(-1)^{n+1}G_n(R_{n+1}^{2n+2}X, x_{2n+2}).
\end{aligned}$$

Ovim je teorema 1 dokazana.

2.2. GENERALISANE CIKLIČNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE

2.2.1. Neki poznati rezultati

U ovom paragrafu izložićemo poznate rezultate o cikličnim funkcionalnim jednačinama na koje se odnosi generalizacija o kojoj će u daljem tekstu biti reči.

Prethodno ćemo uvesti oznake koje ćemo koristiti. Neka je:

1° S neprazan skup;

2° M aditivna Abelova grupa;

3° $Q_i^j x=(x_i, x_{i+1},\ldots,\ x_j)\qquad (i\leqslant j\leqslant n),$

$\quad =(x_i, x_{i+1},\ldots,\ x_n, x_1,\ \ldots,\ x_j);\qquad (n\geqslant i\geqslant j);$

4° C_n ciklični operator definisan pomoću jednakosti

$$C_n Q_i^j X = Q_{i+1}^{j+1} X \qquad (Q_i^{n+1} X = Q_i^j X).$$

Ciklična funkcionalna jednačina

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_n^{i-1} Q_1^p X) = 0 \qquad (Q_i^{n+j} X = Q_i^j X) \tag{2.1}$$

posmatrana je od više autora. U radovima [2] i [7] jednačina (2.1) rešena je pod sledećim uslovima:

1° $x_i \in S \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$;

2° Nepoznata funkcija vrši preslikavanje $f\colon S^p \to M$;

3° Za $A, Y \in M$ i $m (\leqslant n)$ prirodan broj, jednačina $mY = A$ ima jedinstveno rešenje $Y = A/m$.

U slučaju $n \geqslant 2p-1$, D. Ž. Đoković je u radu [7] odredio opšte rešenje jednačine (2.1) bez pretpostavke 3°, dakle, samo pod pretpostavkama 1° i 2°.

U istom radu, u slučaju $n \geqslant 2p-1$, D. Ž. Đoković je odredio i opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$\sum_{i=1}^{n} f_i (C_n^{i-1} Q_1^p X) = 0 \qquad (Q_i^{n+j} X = Q_i^j X), \tag{2.2}$$

koja se za $f_i = f \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ svodi na jednačinu (2.1).

D. S. Mitrinović (videti [16]) posmatrao je jednačinu (2.2) pod uslovom $p < n < 2p-1$, i za neke posebne vrednosti n i p odredio opšta rešenja tih jednačina.

U daljem izlaganju odredićemo opšte rešenje generalisane ciklične funkcionalne jednačine

$$\sum_{i=1}^{k} f_i (C_n^{i-1} Q_1^p X) = 0 \qquad (p < n < 2p-1; \quad k \leqslant n). \tag{2.3}$$

Takođe ćemo pokazati da se iz rešenja jednačine (2.3) mogu dobiti opšta rešenja jednačine (2.2), pa prema tome i jednačine (2.1).

2.2.2. Funkcionalna jednačina (2.3)

Za generalisanu cikličnu funkcionalnu jednačinu (2.3) dokazaćemo sledeći rezultat.

Teorema 1. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (2.3) *određeno je sa*

$$f_r (Q_1^p X) = \sum_{\nu=1}^{\min(k-r,\, n-p)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) + \sum_{\nu=n-r+1}^{n-p} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) \tag{2.4}$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{\min(k-r,\, p-1)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\; Q_1^{p+\nu} X)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-r+1,\,n-p+1)}^{p-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{p+\nu}X,Q_{\nu+1}^{p}X)$$

$$+\sum_{\nu=p}^{k-r}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+p}^{n-\nu}(Q_1^{p+\nu}X)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-r+1,\,p)}^{n-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{p+\nu}X)\qquad(r=1,2,\ldots,k(\leqslant n)),$$

gde je po definiciji

$$\sum_a^b=0\,(a>b);\quad Q_{m+n}^{\nu}=Q_m^{\nu},\quad Q_{\nu}^{m+n}=Q_{\nu}^{m},\quad F_{m+n}^{\nu}=F_m^{\nu}$$

i funkcije F_i^j su proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

Dokaz. Za $k=2$, jednačina (2.3) postaje

$$f_1(Q_1^pX)+f_2(Q_2^{p+1}X)=0. \tag{2.5}$$

Stavljajući $x_1=x_1^0$ u jednačini (2,5), dobijamo

$$f_2(Q_2^{p+1}X)=-F_1^1(Q_2^pX), \tag{2,6}$$

gde je uvedena oznaka

$$F_1^1(Q_2^pX)=f_1(x_1^0,\ Q_2^pX).$$

Ako u (2,5) stavimo (2,6), imamo da je

$$f_1(Q_1^pX)=F_1^1(Q_2^pX). \tag{2,7}$$

Kako je

$$\min(1,\ n-p)=1,\quad \min(1,\ p-1)=1,\quad \max(n,\ n-p+1)=n,\quad \max(n,\ p)=n,$$

iz (2.4) dobijamo (2.7), odnosno (2.6), respektivno za $k=2$, $r=1$ i za $k=2$, $r=2$.

Dakle, teorema je tačna za $k=2$.

Pretpostavimo da je teorema tačna za neko fiksirano $k\,(<n)$, tj. neka je opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$\sum_{i=1}^{k}g_i(C_n^{i-1}Q_1^pX)=0\qquad(k<n) \tag{2.8}$$

dato sa (2.4), gde samo treba umesto f_r staviti g_r $(r=1,\ 2,\ldots,\ k)$.

Posmatrajmo sada sledeću funkcionalnu jednačinu

$$\sum_{i=1}^{k+1}f_i(C_n^{i-1}Q_1^pX)=0\qquad(k+1\leqslant n). \tag{2.9}$$

Razlikovaćemo sledeća tri slučaja:

$$1^\circ\ 2\leqslant k<n-p+1;\quad 2^\circ\ n-p+1\leqslant k<p;\quad 3^\circ\ p\leqslant k<n-1.$$

1° $2 \leqslant k < n-p+1$. Stavljajući da je $x_i = \overset{0}{x_i}$ $(x_i \in [X] \setminus [Q_{k+1}^{p+k} X])$, gde je $[X] = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, jednačina (2.9) postaje

$$f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X) = \sum_{\nu=n-k}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X), \tag{2.10}$$

gde je uvedena oznaka

$$(-1)^{n-\nu+1} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X) = f_{\nu+k+1} (Q_{\nu+k+1-n}^{\nu+k+p-n} X) \Big|_{x_i = \overset{0}{x_i} \left(x_i \in [X] \setminus \left[Q_{k+1}^{p+k} X\right]\right)}.$$

Iz (2.10) sleduje

$$f_{k+1}(Q_1^p X) = \sum_{\nu=n-k}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X). \tag{2.11}$$

Ako uvedemo nove oznake pomoću jednakosti

$$g_{\nu+k+1-n}(Q_{k+1}^{\nu+p+k} X) = f_{\nu+k+1-n} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X) + (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X) \tag{2.12}$$
$$(\nu = n-k, \ldots, n-1)$$

i izraz (2.10) zamenimo u (2.9), dobijamo jednačinu (2.8).

Kako je, za $2 \leqslant k < n-p$,

$$\min(k-r,\ n-p) = \min(k-r,\ p-1) = k-r, \quad n-p+1 > k-r,$$

na osnovu (2.4), opšte rešenje jednačine (2.8) je

$$g_r(Q_1^p X) = \sum_{\nu=1}^{k-r} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) + S_2 + S_4 + S_6 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k), \tag{2.13}$$

gde S_2, S_4, S_6 predstavljaju drugi četvrti i šesti zbir u izrazu (2.4).

Na osnovu (2.11), (2.12), (2.13), dobijamo

$$f_r(Q_1^p X) = \sum_{\nu=1}^{k+1-r} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) + S_2 + S_4 + S_6 \tag{2.14}$$
$$(r = 1, 2, \ldots, k+1).$$

Prema tome, za slučaj $2 \leqslant k < n-p+1$, teorema je tačna i za $k+1$ ako je tačna za k. Dakle, tačna je za svako k.

2° $n-p+1 \leqslant k < p$. Stavljajući da je $x_i = \overset{0}{x_i}$ $(x_i \in [X] \setminus [Q_{\nu+k+1}^{p+k} X])$, jednačina (2.9) postaje

$$f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X) = \sum_{\nu=n-k}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X,\ Q_{\nu+k+1}^{p+k} X) \tag{2.15}$$
$$+ \sum_{\nu=p}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X),$$

gde su uvedene oznake

$$f_{\nu+k+1-n} (Q_{\nu+k+1-n}^{\nu+k+p-n} X) \Big|_{x_i = \overset{0}{x_i} \left(x_i \in [X] \setminus \left[Q_{k+1}^{p+k} X\right]\right)}$$
$$= (-1)^{n-\nu+1} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X,\ Q_{\nu+k+1}^{p+k} X) \qquad (\nu = n-k,\ n-k+1, \ldots, p-1),$$
$$= (-1)^{n-\nu+1} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X) \qquad (\nu = p,\ p+1, \ldots, n-1).$$

Uvodeći nove funkcije pomoću jednakosti

$$g_{\nu+k+1-n}=f_{\nu+k+1-n}+(-1)^{n-\nu-1}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}, \tag{2.16}$$

i zamenjujući (2.15) u (2.9), dobijamo jednačinu (2.8).

Na osnovu induktivne pretpostavke i jednakosti (2.16), opšte rešenje jednačine (2.9) je

$$\begin{aligned} f_r(Q^p_1 X) &= \sum_{\nu=1}^{n-p}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X) \\ &+ \sum_{\nu=n-p+1}^{k-r}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X,\ Q^{p+\nu}_1 X) \\ &+(-1)^{k-r}F^{k+1-r}_r(Q^p_{k+2-r}X,\ Q^{p+k-r+1}_1 X) \\ &+S_2+S_4+S_6 \qquad (r=1,2,\ldots,p+k-n), \\ f_r(Q^p_1 X) &= \sum_{\nu=1}^{k-r}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X)+(-1)^{k-r}F^{k+1-r}_r(Q^p_{k+2-r}X) \\ &+S_2+S_4+S_6 \qquad (r=p+k-n+1,\ldots,k), \end{aligned} \tag{2.17}$$

gde su S_2, S_4, S_6 zbirovi definisani kao u (2.14).

Na osnovu (2.15) i (2.17), opšte rešenje jednačine (2.9) je određeno sa (2.4), gde k treba zameniti sa $k+1$.

Prema tome, i u slučaju $n-p+1\leqslant k<p$ teorema je tačna i za $k+1$ ako je tačna za k, tj. tačna je za svako k.

3° $p\leqslant k\leqslant n-1$. Za $x_i=\overset{0}{x}_i\ (x_i\in[X]\backslash[Q^{p+k}_{k+1}X])$, jednačina (2.9) postaje

$$\begin{aligned} f_{k+1}(Q^{p+k}_{k+1}X) &= \sum_{\nu=n-k}^{n-p}(-1)^{\nu-1}F^\nu_{k+1}(Q^p_{\nu+1}X) \\ &+ \sum_{\nu=n-p+1}^{p-1}(-1)^{n-\nu}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}(Q^{p+k+\nu}_{k+1}X,\ Q^{p+k}_{\nu+k+1}X) \\ &+ \sum_{\nu=p}^{n-1}(-1)^{n-\nu}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}(Q^{p+k+\nu}_{k+1}X), \end{aligned} \tag{2.18}$$

gde je

$$\begin{aligned} & f_{\nu+k+1-n}(Q^{\nu+k+p-n}_{\nu+k+1-n}X)\Big|_{x_i=x_i^0\,(x_i\in[X]\backslash[Q^{p+k}_{k-1}X])} \\ &=(-1)^\nu F^\nu_{k+1}(Q^p_{\nu+1}X) && (\nu=n-k,\ldots,n-p), \\ &=(-1)^{n-\nu+1}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}(Q^{p+k+\nu}_{k+1}X,\ Q^{p+k}_{\nu+k+1}X) && (\nu=n-p+1,\ldots,p-1), \\ &=(-1)^{n-\nu+1}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}(Q^{p+k+\nu}_{k+1}X) && (\nu=p,p+1,\ldots,n-1). \end{aligned}$$

Uvedimo sada sledeće oznake

$$g_{\nu+k+1-n}=f_{\nu+k+1-n}+(-1)^{n-\nu-1}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}. \tag{2.19}$$

Ako u (2.9) zamenimo funkciju f_{k+1} određenu pomoću jednakosti (2.18), dobijamu funkcionalnu jednačinu (2.8). Na osnovu (2.19) i opšteg rešenja funkcionalne jednačine (2.8), dobijamo da je opšte rešenje funkcionalne jednačine (2.9) određeno sa

$$\begin{aligned} f_r(Q_1^p X) &= \sum_{\nu=1}^{n-p} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) \\ &+ \sum_{\nu=n-p+1}^{p-1} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{p+\nu} X) \\ &+ \sum_{\nu=p}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{p+\nu} X) + (-1)^{n-k+1-r} F_k^{n-k+1-r} (Q_1^{p+k-r} X) \\ &+ S_2 + S_4 + S_6 \qquad (r=1,2,\ldots,\ n-k-p+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_r(Q_1^p X) &= \sum_{\nu=1}^{n-p} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) \\ &+ \sum_{\nu=n-p+1}^{k-r} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{p+\nu} X) \\ &+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k-r+2}^p X,\ Q_1^{p+k-r+1} X) \\ &+ S_2 + S_4 + S_6 \qquad (r=n-k-p+2,\ldots,\ p-1), \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} f_r(Q_1^p X) &= \sum_{\nu=1}^{k-r} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) + (-1)^{k-r} F_1^{k+1-r} (Q_{\nu+1}^p X) \\ &+ S_2 + S_4 + S_6 \qquad (r=p,\ p+1,\ldots,\ k), \end{aligned}$$

gde su S_2, S_4, S_6 zbirovi definisani kao u (2.14)·

Na osnovu (2.18) i (2.20), dobijamo da je opšte rešenje funkcionalne jednačine (2.9), i u slučaju $p \leqslant k \leqslant n-1$, određeno sa (2,4), gde samo k treba zameniti sa $k+1$.

Prema tome, ovim je teorema dokazana.

Primer 1. Funkcionalna jednačina (2.3), za $n=8$, $p=6$, $k=5$, tj. jednačina

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + f_2(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) + f_3(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \\ &\quad + f_4(x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_1) + f_5(x_5, x_6, x_7, x_8, x_1, x_2) = 0, \end{aligned}$$

ima opšte rešenje određeno sa

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= F_1^1(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - F_1^2(x_3, x_4, x_5, x_6) \\ &+ F_1^3(x_4, x_5, x_6, x_1) - F_1^4(x_5, x_6, x_1, x_2), \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= F_2^1(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - F_2^2(x_3, x_4, x_5, x_6) \\ &+ F_2^3(x_4, x_5, x_6, x_1) - F_1^1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= F_3^1(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - F_3^2(x_3, x_4, x_5, x_6) \\ &+ F_1^2(x_1, x_2, x_3, x_4) - F_2^1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \end{aligned}$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = F_4^1(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - F_1^3(x_1, x_2, x_3, x_6)$$
$$+ F_2^2(x_1, x_2, x_3, x_4) - F_3^1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$
$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = F_1^4(x_1, x_2, x_5, x_6) - F_2^3(x_1, x_2, x_3, x_6)$$
$$+ F_3^2(x_1, x_2, x_3, x_4) - F_4^1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

gde su F_i^j proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

PRIMER 2. Za $n=8$, $p=6$, $k=6$, generalisana ciklična funkcionalna jednačina (2.3), tj. jednačina

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) + f_2(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + f_3(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$
$$f_4(x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) + f_5(x_5, x_6, x_7, x_8, x_1) + f_6(x_6, x_7, x_8, x_1, x_2) = 0,$$

ima opšte rešenje određeno sa

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F_1^1(x_2, x_3, x_4, x_5) - F_1^2(x_3, x_4, x_5) + F_1^3(x_4, x_5)$$
$$- F_1^4(x_5, x_1) - F_6^3(x_1, x_2),$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F_2^1(x_2, x_3, x_4, x_5) - F_2^2(x_3, x_4, x_5) + F_2^3(x_4, x_5)$$
$$- F_2^4(x_5, x_1) - F_1^1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F_3^1(x_2, x_3, x_4, x_5) - F_3^2(x_3, x_4, x_5) + F_3^3(x_4, x_5)$$
$$+ F_1^2(x_1, x_2, x_3) - F_2^1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F_4^1(x_2, x_3, x_4, x_5) - F_4^2(x_3, x_4, x_5) - F_1^3(x_1, x_2)$$
$$+ F_2^2(x_1, x_2, x_3) - F_3^1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$f_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F_5^1(x_2, x_3, x_4, x_5) + F_1^4(x_1, x_5) - F_2^3(x_1, x_2)$$
$$+ F_3^2(x_1, x_2, x_3) - F_4^1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = F_6^3(x_4, x_5) + F_2^4(x_1, x_5) - F_3^3(x_1, x_2)$$
$$+ F_4^2(x_1, x_2, x_3) - F_5^1(x_1, x_2, x_3, x_4),$$

gde su F_i^j proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

2.2.3. Funkcionalna jednačina (2.2)

Kako za $k=n$ funkcionalna jednačina (2.3) postaje jednačina (2.2), to iz teoreme 1, za $k=n$, neposredno sleduje rezultat koji ćemo ovde samo formulisati.

Teorema 2. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (2.2) *određeno je sa*

$$f_r(Q_1^p X) = \sum_{\nu=1}^{n-p} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) \tag{2.21}$$
$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{\min(n-r,\, p-1)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{p+\nu} X)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-r+1,\,n-p+1)}^{p-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{p+\nu}X,\,Q_{\nu+1}^{p}X)$$

$$+\sum_{\nu=p}^{n-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{p+\nu}X),$$

gde su F_i^j proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

2.2.4. Funkcionalna jednačina (2.1)

Opšta rešenja funkcionalnih jednačina (2.2) i (2.3) odredili smo pod pretpostavkom da su ispunjeni uslovi 1° i 2° iskazani u odeljku 2.2.1.

Sada ćemo, pretpostavljajući da je ispunjen i uslov 3°, pokazati oa iz teoreme 2 sleduje poznati rezultat J. Aczéla, M. Ghermanescua i M. Hosszúa koji se odnosi na ciklične funkcionalne jednačine.

Teorema 3. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (2.1) *je*

$$f(Q_1^pX)=F_0(Q_1^{p-1}X)-F_0(Q_2^pX) \tag{2.22}$$

$$+\sum_{k=1}^{[(2p-n)/2]}\left\{F_k(Q_1^kX,\ Q_{n-p+k+1}^{p}X)-F_k(Q_{p-k+1}^{p}X,\ Q^{2p-n-k}X)\right\},$$

gde su F_i $(i=0,1,2,\dots,[(2p-n/2)])$ proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

Dokaz. Sabiranjem funkcija $f_1, f_2, \dots, f_n$ određenih izrazom (2.21) i stavljajući da je $f_1=f_2=\cdots=f_n=f$, dobijamo (2.22), gde su uvedene sledeće oznake

$$F_0(Q_1^{p-1}X)=\frac{1}{n}\left(\sum_{r=1}^{n-p}\sum_{\nu=1}^{r}G_r(Q_\nu^{p-r-1+\nu}X)\right),$$

$$G_r(Q_1^{p-r}X)=\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^rF_\nu^r(Q_1^{p-r}X),$$

$$F_k(Q_1^kX,Q_{n-p+k+1}^pX)=\frac{(-1)^{k+1}}{n}\left\{\sum_{r=1}^{n-p+k}F_r^{p-k}(Q_1^kX,Q_{n-p+k+1}^pX)\right.$$

$$\left.-\sum_{r=1}^{p-k}F_r^{n-p+k}(Q_{n-p+k+1}^pX,Q_1^kX)\right\}$$

$$\left(k=1,2,\dots,\left[\frac{2p-n-1}{2}\right]\right),$$

a u slučaju da je n parno $(n=2m)$

$$F_{p-m}(Q_1^{p-m}X,Q_{m+1}^pX)=\frac{(-1)^{p-m+1}}{n}\sum_{r=1}^{n}F_r^m(Q_1^{p-m}X,Q_{m+1}^pX).$$

Ovim je teorema 3 dokazana.

3. NEKE LINEARNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE KOJE SU U VEZI SA CAUCHYEVOM JEDNAČINOM

3.1. FUNKCIONALNE JEDNAČINE SA JEDNIM PARAMETROM

3.1.1. Oznake, pretpostavke i objašnjenja

Ovde ćemo posmatrati sledeće funkcionalne jednačine:

$$\sum_{i=1}^{m+n} f\left(\sum_{j=0}^{m-j} a_{j+1}\, x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} a_{m+j+1}\, x_{i+m+j}\right)=0, \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}\, x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} a_{m+j+1}\, x_{i+m+j}\right)=0, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}\, x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} a_{m+j+1}\, x_{i+n+j},\ \sum_{j=0}^{k-1} a_{m+n+j+1}\, x_{i+m+n+j}\right)=0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{j+1}\, x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} a_{m+j+1}\, x_{i+m+j},\ \sum_{j=0}^{k-1} a_{m+n+j+1}\, x_{i+m+n+j}\right)=0, \tag{3.4}$$

gde su promenljive x_i i parametri a_i iz skupa kompleksnih brojeva.

Pretpostavimo da funkcije f i f_i vrše preslikavanja

$$f: C^2 \to C \quad \text{i} \quad f_i: C^2 \to C \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n),$$

za jednačine (3.1) i (3.2), odnosno

$$f: C^3 \to C \quad \text{i} \quad f_i: C^3 \to C \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n+k),$$

za jednačine (3.3) i (3.4).

Pretpostavimo, takođe, da je $x_{i+m+n}=x_i$, tj. $x_{i+m+n+k}=x_i$.

Kada su a_i proizvoljni kompleksni brojevi, nismo mogli da odredimo rešenja navedenih jednačina.

Ovde ćemo odrediti rešenja ovih jednačina u slučaju kada je

$$a_i=\begin{cases} a^{m-i} & (i=1, 2, \ldots, m), \\ a^{m+n-i} & (i=m+1, m+2, \ldots, m+n), \\ a^{m+n+k-i} & (i=m+n+1, m+n+2, \ldots, m+n+k), \end{cases}$$

gde je a kompleksan broj.

Prema tome, u ovom odeljku odredićemo rešenja sledećih funkcionalnih jednačina

$$\sum_{i=1}^{m+n} f\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}\right)=0, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}\right)=0, \tag{3.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{\cdot+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j},\ \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} x_{i+m+n+j}\right)=0, \tag{3.7}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j},\ \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} x_{i+m+n+j}\right)=0. \tag{3.8}$$

3.1.2. Neki poznati rezultati

U redovima [20], [8], [9] posmatrana je funkcionalna jednačina

$$\sum_{i=1}^{m+n} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} x_{i+m+j}\right)=0. \tag{3.9}$$

Ova jednačina je partikularan slučaj jednačine (3.6) za $a=1$.

U radu [9] dokazane su tri teoreme koje se odnose na jednačinu (3.9). Navodimo ih bez dokaza.

Teorema 1. *Ako je* $(m, n)=1$ *i* $m+n>2$, *opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* (3.9) *određeno je sa*

$$f_i(x, y)=F_1(x+y)\operatorname{Re} x+F_2(x+y)\operatorname{Im} x+G_i(x+y) \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n),$$

pri čemu je

$$\sum_{i=1}^{m+n} G_i(x)=-m\left(F_1(x)\operatorname{Re} x+F_2(x)\operatorname{Im} x\right),$$

i gde su F_1, F_2, G_i $(i=1, 2, \ldots, m+n)$ *proizvoljne neprekidne funkcije sa vrednostima u* C.

Teorema 2. *Ako je* $(m, n)=d>1$, $m/d=\mu$, $n/d=\nu$, $\mu+\nu>2$, *funkcionalna jednačina* (3.9) *ima opšte neprekidno rešenje*

$$f_{id+j}(x, y)=F_1^j(x+y)\operatorname{Re} x+F_2^j(x+y)\operatorname{Im} x+G_i^j(x+y)$$
$$(i=0, 1, \ldots, \mu+\nu-1;\ j=1, 2, \ldots, d),$$

pri čemu je

$$\sum_{i=0}^{\mu+\nu-1} G_i^j(x)=H^j(x)-\mu\left(F_1^j(x)\operatorname{Re} x+F_2^j(x)\operatorname{Im} x\right) \qquad (j=1, 2, \ldots, d),$$

$$\sum_{j=1}^{d} H^j(x)=0,$$

i gde su F_1^j, F_2^j $(j=1, 2, \ldots, d)$, H^j $(j=1, 2, \ldots, d-1)$, G_i^j $(i=0, 1, \ldots, \mu+\nu=2;\ j=1, 2, \ldots, d)$ *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* C.

Teorema 3. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.9), *u slučaju* $m=n$, *određeno je sa*

$$f_i(x, y) \quad (i=1, 2, \ldots, m) \quad \textit{proizvoljne funkcije}$$

$$f_{m+i}(x, y)=H_i(x+y)-f_i(x, y) \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{m} H_i(x)=0$, *i gde su* H_i *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* C.

3.1.3. Funkcionalna jednačina (3.5)

Dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 4. *Ako je* $a^{m+n} \neq 1$, *fnnkcionalna jednačina* (3.5) *ima opšte rešenje*

$$\text{(3.10)} \quad \begin{aligned} f(x, y) &= F(x+a^m y)-F(a^n x+y) && (m \neq n), \\ f(x, y) &= G(x+a^m y,\ a^m x+y)-G(a^m x+y,\ x+a^m y) && (m=n), \end{aligned}$$

gde su F *i* G *prorzvoljne funkcije sa vrednostima u* C.

Dokaz. Ako stavimo

$$\text{(3.11)} \qquad f(x, y)=g(x+a^m y,\ a^n x+y),$$

funkcionalna jednačina (3.5) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n} g\Big(\sum_{j=0}^{m+1} a^{m-1-j} x_{i+j}+\sum_{j=0}^{n-1} a^{m+n-1-j} x_{i+m+j},$$
$$\sum_{j=0}^{m-1} a^{m+n-1-j} x_{i+j}+\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}\Big)=0,$$

ili

$$\text{(3.12)} \qquad \sum_{i=1}^{m+n} g\Big(\sum_{j=0}^{m+n-1} a^j x_{i+m-1-j},\ \sum_{j=0}^{m+n-1} a^j x_{i-1-j}\Big)=0.$$

Ova transformacija jednačine (3.5) je mogućna jer je $a^{m+n} \neq 1$.

Kako je $a^{m+n} \neq 1$, uvodeći nove promenljive y_i pomoću

$$y_i=\sum_{j=0}^{m+n-1} a^j x_{i-1-j} \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n),$$

jednačina (3.12) dobija oblik

$$\text{(3.13)} \qquad \sum_{i=1}^{m+n} g(y_{i+m},\ y_i)=0.$$

Ako je $m \neq n$, stavljajući $y_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots, m+n-1)$, iz jednačine (3.13) dobijamo

$$\text{(3.14)} \qquad g(x, y)=F(x)+F_1(y).$$

Ako u (3.13) zamenimo funkciju g određenu sa (3.14), jednačina (3.13) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n} (F(y_i)+F_1(y_i))=0,$$

odakle sleduje $F(x)=-F_1(x)$.

Na osnovu ovoga imamo

$$g(x,y)=F(x)-F(y). \tag{3.15}$$

Ako je $m=n$, jednačina (3.13) postaje

$$g(x,y)+g(y,x)=0,$$

odakle sleduje

$$g(x,y)=G(x,y)-G(y,x). \tag{3.16}$$

Iz jednakosti (3.15), (3.11) i (3.16) sleduje (3.10), čeme je dokazana teorema 4.

Primer 1. Ako je $a^3 \neq 1$, opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$f(ax+y,z)+f(ay+z,x)+f(az+x,y)=0$$

je

$$f(x,y)=F(x+a^2y)-F(ax+y),$$

gde je F proizvoljna kompleksna funkcija kompleksne promenljive.

Primer 2. Ako $a^4 \neq 1$, opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$f(ax+y,az+u)+f(ay+z,au+x)+f(az+u,ax+y)+f(au+x,ay+z)=0$$

određeno je sa

$$f(x,y)=G(x+a^2y,a^2x+y)-G(a^2x+y,x+a^2y),$$

gde je G proizvoljna funkcija.

Teorema 5. *Ako je* $a^{m+n}=1$, $(m,n)=1$, $m+n>2$, *opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* (3.5) *je*

$$\begin{aligned} f(x,y)= & \sum_{i=1}^{m+n} \left(F_1(a^ix+a^{i+m}y)\operatorname{Re}(a^ix)+F_2(a^ix+a^{i+m}y)\operatorname{Im}(a^ix)\right) \\ & + \sum_{i=1}^{m+n-1} \left(G_i(a^ix+a^{i+m}y)-G_i(x+a^my)\right) \\ & -m\left(F_1(x+a^my)\operatorname{Re}(x+a^my)+F_2(x+a^my)\operatorname{Im}(x+a^my)\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

gde su F_1, F_2, G_i $(i=1,2,\ldots,m+n-1)$ *proizvoljne neprekidne funkcije kompleksne promenljive.*

Dokaz. Ako uvedemo nove promenljive y_i pomoću relacija $x_i=a^{i-1}y^i$ $(i=1,2,\ldots,m+n)$, funkcionalna jednačina (3.5) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n} f\left(a^{m+i-2}\sum_{j=0}^{m-1} y_{i+j},\ a^{m+n-2+i}\sum_{j=0}^{n-1} y_{m+i-j}\right)=0. \tag{3.18}$$

Ako stavimo da je

$$f(a^{m-2+i}x,\ a^{m+n-2+i}y)=f_i(x,y) \qquad (i=1,2,\ldots,m+n),$$

tj.

$$(3.19) \qquad f(x,y)=f_i(a^{n+2-i}x,\ a^{m+n-2+i}y) \qquad (i=1,2,\ldots,m+n),$$

funkcionalna jednačina (3.18) dobija oblik

$$(3.20) \qquad \sum_{i=1}^{m+n} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} y_{m+i+j}\right)=0.$$

Jednačina (3.20) je tačno jednačina (3.9), i njeno rešenje je određeno teoremom 1. Prema tome na osnovu (3.19) i teoreme 1, možemo pisati

$$(3.21) \qquad \begin{aligned} f(x,y) &= A_1(a^{n+2-i}x+a^{m+n+2-i}y)\operatorname{Re}(a^{n+2-i}x)\\ &+A_2(a^{n+2-i}x+a^{m+n+2-i}y)\operatorname{Im}(a^{n+2-i}x)\\ &+B_i(a^{n+2-i}x+a^{m+n+2-i}y) \qquad (i=1,2,\ldots,m+n)\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\sum_{i=1}^{m+n} B_i(x)=-m\,[A_1(x)\operatorname{Re}x+A_2(x)\operatorname{Im}x],$$

i gde su A_1, A_2, B_i proizvoljne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

Ako uvedemo oznake

$$(m+n)F_2(x)=A_1(x), \quad (m+n)F_2(x)=A_2(x), \quad (m+n)B_i(x)=G_{n+2-i}(x)$$
$$(i=1,2,\ \ldots,\ n+1, n+3,\ \ldots,\ m+n),$$

sabiranjem jednakosti (3.21) dobijamo (3.17).

Teorema 5 je ovim dokazana.

Primer 3. Ako je $a^3=1$, opšte neprekidno rešenje jednačine

$$f(ax+y,z)+f(ay+z,x)+f(az+x,y)=0$$

je određeno sa

$$\begin{aligned} f(x,y) &= F_1(ax+y)\operatorname{Re}(ax)+F_2(ax+y)\operatorname{Im}(ax)+F_1(a^2x+ay)\operatorname{Re}(a^2x)+F_2(a^2x+ay)\operatorname{Im}(a^2x)\\ &-F_1(x+a^2y)\operatorname{Re}(x+2a^2y)-F_2(x+a^2y)\operatorname{Im}(x+2a^2y)\\ &+G_1(ax+y)-G_1(x+a^2y)+G_2(a^2x+ay)-G_2(x+a^2y),\end{aligned}$$

gde su F_1, F_2, G_1, G_2 proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

Teorema 6. *Ako je* $a^{m+n}=1$, $(m,n)=d>1$, $m/d=\mu$, $n/d=\nu$, $\mu+\nu>2$, *funkcionalna jednačina* (3.5) *ima opšte neprekidno rešenje*

$$(3.22) \qquad \begin{aligned} f(x,y) = \sum_{j=-1}^{d-2}\Bigg(\sum_{i=0}^{\mu+\nu-1} &\{F_1^{j+2}(a^{n-id-j}x+a^{m+n-id-j}y)\operatorname{Re}(a^{n-id-j}x)\\ &+F_2^{j+2}(a^{n-id-j}x+a^{m+n-id-j}y)\operatorname{Im}(a^{n-id-j}x)\\ &+G_i^{j+2}(a^{n-id-j}x+a^{m+n-id-j}y)\}\Bigg),\end{aligned}$$

pri čemu je, za $j=1, 2, \ldots, d$,

$$\sum_{j=1}^{\mu+\nu-1} G_i^j(x)=H^j(x)-\mu\left(F_1^j(x)\operatorname{Re}x+F_2^j(x)\operatorname{Im}x\right),\quad \sum_{j+1}^{d} H^j(x)=0,$$

gde su F_1^j, F_2^j, $G_i^j\,(i=0, 1, \ldots, \mu+\nu-2;\ j=1, 2, \ldots, d)$, $H^j\,(j=1, 2, \ldots, d-1)$ *proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.*

Dokaz. Transformacijama koje su korišćene pri dokazivanju teoreme 5, jednačini (3.5) može se dati oblik (3.20), tj. (3.9).

Pod pretpostavkama izloženim u teoremi, opšte neprekidno rešenje jednačine (3.20) određeno je teoremom 2. Prema tome možemo pisati

$$\begin{aligned}(3.23)\qquad f(x,y)&=A_1^j\,(a^{n+2-id-j}\,x+a^{m+n+2-id-j}\,y)\operatorname{Re}(a^{n-id-j+2}\,x)\\&+A_2^j\,(a^{n+2-id-j}\,x+a^{m+n+2-id-j}\,y)\operatorname{Im}(a^{n+2-id-j}\,x)\\&+B_i^j\,(a^{n+2-id-j}\,x+a^{m+n+2-id-j}\,y)\\&(i=0, 1, \ldots\ \mu+\nu-1;\ \ j=1, 2, \ldots, d),\end{aligned}$$

pri čemu je za $j=1, 2, \ldots, d$,

$$\sum_{i=0}^{\mu+\nu-1} B_i^j(x)=C^j(x)-\mu\left(A_1^j(x)\operatorname{Re}x+A_2^j(x)\operatorname{Im}x\right),\quad \sum_{j=1}^{d} C^j(x)=0,$$

gde su A_1^j, A_2^j, B_i^j, C $(i=0, 1, \ldots, \mu+\nu-1;\ \ j=1, 2, \ldots, d)$ proizvoljne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

Sabirajući jedrakosti (3.23) i uvodeći oznake

$$(m+n)\,F_1^j(x)=A_1^j(x),\quad (m+n)\,F_2^j(x)=A_2^j(x),$$
$$(m+n)\,G_i^j(x)=B_i^j(x),\quad (m+n)\,H^j(x)=C^j(x),$$

dobijamo (3.22).

Primer 4. Ako je $a^6=1$, opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine

$$\begin{aligned}&f(a^3x+a^2y+az+u,\ av+w)+f(a^3y+a^2z+au+v,\ aw+x)+f(a^3z+a^2u+av+w,\ ax+y)\\&+f(a^3u+a^2v+aw+x,\ ay+z)+f(a^3v+a^2w+ax+y,\ az+u)+f(a^3w+a^2x+ay+z,\ au+v)=0\end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned}f(x,y)&=F_1^1(ax+a^5y)\operatorname{Re}(a^3x)+F_2^1(ax+a^5y)\operatorname{Im}(ax)\\&+F_2^1(a^3x+ay)\operatorname{Re}(a^3x)+F_2^1(a^3x+ay)\operatorname{Im}(a^3x)\\&-F_1^1(a^5x+a^3y)\operatorname{Re}(a^5x+2x^3y)-F_2^1(a^5x+a^3y)\operatorname{Im}(a^5x+2a^3y)\\&+F_1^2(x+a^4y)\operatorname{Re}(x)+F_2^2(x+a^4y)\operatorname{Im}(x)\\&+F_1^2(a^2x+y)\operatorname{Re}(a^2x)+F_2^2(a^2x+y)\operatorname{Im}(a^2x)\\&-F_1^2(a^4x+a^2y)\operatorname{Re}(a^4x+2a^2y)-F_2^2(a^4x+a^2y)\operatorname{Im}(a^4x+2a^2y)\end{aligned}$$

$$+G_0^1(ax+a^5y)-G_0^1(a^5x+a^3y)+G_0^2(x+a^4y)-G_0^2(a^4x+a^2y)$$

$$+G_1^1(a^3x+ay)-G_1^1(a^5x+a^3y)+G_1^2(a^2x+y)-G_1^2(a^4x+a^2y)$$

$$+H^1(a^5x+a^3y)-H^1(a^4x+a^2y),$$

gde su F_1^1, F_1^2, F_2^1, F_2^2 G_0^1, G_0^2, G_1^1, G_1^2, H^1 proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

Teorema 7. *Ako je* $a^{m+n}=1$ *i* $m=n$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.5) *je*

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{m}(F_i(a^ix,a^{n+i}y)-F_i(a^iy,a^{n+i}x)+H_i(a^{n+i}x+a^iy)), \tag{3.24}$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{m} H_i(x)=0$ *i gde su* F_i $(i=1,2,\ldots,m)$, G_j $(j=1,2,\ldots,m-1)$ *proizvoljne funkcije kompleksne promenljive.*

Dokaz. I u ovom slučaju, transformacijama iz dokaza teoreme 5, mogućno je transformisati jednačinu (3.5) u jednačinu (3.20).

Na osnovu teoreme 3, dobijamo

$$\begin{aligned} f(x,y)&=A_i(a^{m+2-i}x,\ a^{m+n+2-i}y) \\ f(x,y)&=B_i(a^{m+2-i}x+a^{m+n+2-i}y)-A_i(a^{m+n+2-i}y,a^{m+2-i}x), \end{aligned} \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{3.25}$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{m} B_i(x)=0$.

Ako uvedemo nove funkcije pomoću jednakosti

$$A_i(x,y)=2mF_{m+2-i}(x,y),\quad B_i(x)=2mH_{m+2-i}(x),$$

sabiranjem funkcija određenih sa (3.25), dobijamo (3.24).

Ovim je dokazana teorema 5.

Primer 5. Ako je $a^4=1$, opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$f(ax+y,\ az+u)+f(ay+z,\ au+x)+f(az+u,\ ax+y)+f(au+x,\ ay+z)=0$$

je

$$f(x,y)=F_1(ax,a^3y)-F_1(ay,a^3x)+F_2(a^2x,y)-F_2(a^2y,x)+H_1(a^3x+ay)-H_1(x+a^2y),$$

gde su F_1, F_2, H_1 proizvoljne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

3.1.4. Funkcionalna jednačina (3.6)

Dokazaćemo sada redom sledeće rezultate koji se odnose na funkcionalnu jednačinu (3.6).

Teorema 8. *Ako je* $a^{m+n}\neq 1$ *i* $m\neq n$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.6) *je*

$$f_i(x,y)=F_i(x+a^my)-F_{i+n}(a^nx+y)+\alpha_i \qquad (i=1,2,\ldots,m+n), \tag{3.26}$$

gde su F_i $(i=1, 2, \ldots, m+n;\ F_{i+m+n}=F_i)$ *proizvoljne kompleksne funkcije kompleksne promenljive i* α_i *proizvoljne kompleksne konstante za koje je* $\sum\limits_{i=1}^{m+n} \alpha_i = 0$.

Dokaz. Ako uvedemo nove funkcije g_i pomoću jednakosti

$$f_i(x, y) = g_i(x + a^m y, a^n x + y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n), \tag{3.27}$$

jednačina (3.6) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n} g_i \Big(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{m+n-1-j} x_{m+i+j},$$
$$\sum_{j=0}^{m-1} a^{m+n-1-j} x_{i+j} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{m+i+j} \Big) = 0,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{m+n} g_i \Big(\sum_{j=0}^{m+n-1} a^j x_{m+i-1-j}, \sum_{j=0}^{m+n-1} a^j x_{i-1-j} \Big) = 0. \tag{3.28}$$

S obzirom da je $a^{m+n} \neq 1$ po pretpostavci, ova transformacija je mogućna. Isto tako, zbog $a^{m+n} \neq 1$, možemo da uvedemo nove promenljive y_i, pomoću

$$y_i = \sum_{j=0}^{m+n-1} a^j x_{m+i-1-j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n),$$

pa jednakost (3.28) dobija oblik

$$\sum_{i=0}^{m+n} g_i(y_i, y_{i+n}) = 0. \tag{3.29}$$

Stavljajući u (3.29) da je $y_j = 0$, za svako j, sem za $j = i$, $i+n$, dakle, za $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, i+n-1, i+n+1, \ldots, m+n$, dobijamo

$$g_i(y_i, y_{i+n}) = F_i(y_i) + G_i(y_{i+n}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n). \tag{3.30}$$

Na osnovu (3.30), jednačina (3.29) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n} (F_i(y_i) + G_i(y_{i+n})) = 0,$$

ili

$$\sum_{i=1}^{m+n} (F_i(y_i) + G_{m+i}(y_i)) = 0. \tag{3.31}$$

Iz (3.31) sleduje

$$G_{i+m}(y_i) = -F_i(y_i) + \alpha_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n), \tag{3.32}$$

gde su α_i proizvoljne kompleksne konstante, sa osobinom $\sum\limits_{i=1}^{m+n} \alpha_i = 0$.

Na osnovu (3.32), jednačina (3.30) ima oblik

$$g_i(x, y) = F_i(x) + F_{i+n}(y) + \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n), \tag{3.33}$$

pri čemu je $\sum\limits_{i=1}^{m+n} \alpha_i = 0$.

Na osnovu jednakosti (3.33) i (3.27), dobijamo (3.26).

Ovim je teorema 8 dokazana.

PRIMER 6. Opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$f_1(a^2x+ay+z,\ u)+f_2(a^2y+az+u,\ x)+f_3(a^2z+au+x,\ y)+f_4(a^2u+ax+y,\ z)=0,$$

u slučaju kada je $a^3\neq 1$, dato je sa

$$f_1(x,y)=F_1(x+a^3y)-F_2(ax+y)+\alpha_1,$$
$$f_2(x,y)=F_2(x+a^3y)-F_3(ax+y)+\alpha_2,$$
$$f_3(x,y)=F_3(x+a^3y)-F_4(ax+y)+\alpha_3,$$
$$f_4(x,y)=F_4(x+a^3y)-F_1(ax+y)-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,$$

gde su F_i $(i=1, 2, 3, 4)$ proizvoljne kompleksne funkcije kompleksne promenljive i α_i proizvoljne kompleksne konstante.

Teorema 9. *Ako je $a^{m+n}\neq 1$ i $m=n$, opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.6) *je*

$$f_{i+m}(x,y)=-f_i(y,x)+\alpha_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{3.34}$$

gde su f_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ proizvoljne kompleksne funkcije i α_i proizvoljne kompleksne konstante, čiji je zbir jednak nuli.

Dokaz. Transformacijama koje su izložene u dokazu prethodne teoreme, može se jednačina (3.6) dovesti na oblik (3.29).

Za $y_j=0$ $(j=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, i+m-1, i+m+1, \ldots, 2m)$, jednačina (3.29) postaje

$$g_i(y_i, y_{i+m})+g_{i+m}(y_{i+m}, y_i)=\alpha_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{3.35}$$

gde su α_i proizvoljne konstante. Zamenjujući (3.35) u (3.6), dobijamo da mora biti $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i=0$.

Na osnovu ovoga i jednakosti (3.35), dobijamo (3.34).

PRIMER 7. Ako je $a^4\neq 1$ opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$f_1(ax+y,\ az+u)+f_2(ay+z,\ au+x)+f_3(az+u,\ ax+y)+f_4(au+x,\ ay+z)=0$$

je

$f_i(x,y)$ $(i=1, 2)$ proizvoljne funkcije,

$$f_3(x,y)=-f_1(x,y)+\alpha,$$
$$f_4(x,y)=-f_2(x,y)-\alpha,$$

gde je α proizvoljna kompleksna konstanta.

Za slučaj $a^{m+n}=1$, funkcionalnu jednačinu (3.6) možemo transformirati na sledeći način.

Uvedimo nove promenljiʌe y_i pomoću jednakosti

$$y_i=a^{1-i}x_i, \quad \text{tj.} \quad x_i=a^{i-1}y_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n).$$

Tada jednačina (3.6) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n} f_i\left(a^{m-2+i}\sum_{j=0}^{m-1} y_{i+j},\ a^{m+n-2+i}\sum_{j=0}^{n-1} y_{m+i+j}\right)=0. \tag{3.36}$$

Ako sada stavimo

$$g_i(x, y) = f_i(a^{m-2+i} x, \ a^{m+n-2+i} y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m+n),$$

tj.

$$f_i(x, y) = g_i(a^{n+2-i} x, \ a^{m+n+2-i} y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m+n), \tag{3.37}$$

funkcionalna jednačina (3.36) dobija oblik

$$\sum_{i=1}^{m+n} g_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} y_{i+j}, \ \sum_{j=0}^{n-1} y_{m+i+j}\right) = 0. \tag{3.38}$$

Jednačina (3.38) je tačno jednačina (3.9).

Teorema 10. *Ako je* $a^{m+n} = 1$, $(m, n) = 1$, $m+n > 2$. *opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* (3.6) *određeno je sa*

$$\begin{aligned} f_i(x, y) &= F_1(a^{n+2-i} x + a^{m+n+2-i} y) \operatorname{Re}(a^{n+2-i} x) \\ &+ F_2(a^{n+2-i} x + a^{m+n+2-i} y) \operatorname{Im}(a^{n+2-i} x) \\ &+ G_i(a^{n+2-i} x + a^{m+n+2-i} y) \qquad (i = 1, 2, \dots, m+n), \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\sum_{i=1}^{m+n} G_i(x) = -m(F_1(x) \operatorname{Re} x + F_2(x) \operatorname{Im} x),$$

i gde su F_1, F_2, G_i $(i = 1, 2, \dots, m+n)$ *proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.*

Dokaz. Dokaz neposredno sleduje na osnovu (3.38), (3.37) i teoreme 1.

Teorema 11. *Ako je* $a^{m+n} = 1$, $(m, n) = d > 1$, $m/d = \mu$, $n/d = \nu$, $\mu + \nu > 2$, *funkcionalna jednačina* (3.6) *ima opšte neprekidno rešenje*

$$\begin{aligned} f_{id+j}(x, y) &= F_1^j(a^{n+2-i} x + a^{m+n+2-i} y) \operatorname{Re}(a^{n+2-i} x) \\ &+ F_2^j(a^{n+2-i} x + a^{m+n+2-i} y) \operatorname{Im}(a^{n+2-i} x) \\ &+ G_i^j(a^{n+2-i} x + a^{m+n+2-i} y) \\ &(i = 0, 1, \dots, \mu+\nu-1; \ j = 1, 2, \dots, d) \end{aligned}$$

pri čemu je

$$\sum_{i=0}^{\mu+\nu-1} G_i^j(x) = H^j(x) - \mu(F_1^j(x) \operatorname{Re} x + F_2^j(x) \operatorname{Im} x) \qquad (j = 1, 2, \dots, d),$$

$$\sum_{j=0}^{d} H^j(x) = 0,$$

i gde su F_1^j, F_2^j, H^j, G_i^j $(j = 1, 2, \dots, d; \ i = 0, 1, \dots, \mu+\nu-2)$ *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* C.

Dokaz. Na osnovu (3.38), (3.37) i teoreme 2, zaključujemo da je teorema tačna.

Teorema 12. *Ako je* $a^{m+n}=1$ *i* $m=n$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.6) *je*

$$f_{m+i}(x, y)=H_i(a^{n+2-i}x+a^{m+n+2-i}y)$$
$$-f_i(a^{n+2-i}x,\ a^{m+n+2-i}y) \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$

gde su H_i, f_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ *proizvoljne kompleksne funkcije sa vrednostima u* C, *i pri čemu je* $\sum_{i=1}^{m} H_i(x)=0$,

Dokaz. Dokaz neposredno sleduje iz jednakosti (3.38), (3.37) i teoreme 3.

3.1.5. Generalizacija jednog rezultata D. Ž. Đokovića

D. Ž. Đoković je u radu [6] odredio opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f\left(\sum_{j=0}^{m-1} x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} x_{m+i+j},\ \sum_{j=0}^{k-1} x_{m+n+i+j}\right)=0, \tag{3.39}$$

kada su x_i $(i=1, 2, \ldots, m+n+k)$ realne nezavisno promenljive i f realna funkcija, pretpostavljajući da je $k=\max(m, n, k)$.

Ova naknadna pretpostavka za k, kao što je pokazano u radu [6], ne utiče na opštost razmatranja jer se svaki drugi slučaj može da svede na ovaj.

Ovde ćemo posmatrati jednačinu (3.39) u kompleksnom području, tj. kada je f kompleksna funkcija kompleksnih promenljivih.

Transformišimo prethodno jednačinu (3.39) na način koji je i u radu [6] izložen.

Ako uvedemo oznake

$$s=\sum_{j=1}^{m+n+k} x_j, \tag{3.40}$$

$$f(x, y, s)=g(x, y, s+x+y), \tag{3.41}$$

jednačina (3.39) postaje

$$\sum_{j=1}^{m+n+k} g\left(\sum_{j=0}^{m-1} x_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} x_{m+i+j},\ s\right)=0. \tag{3.42}$$

Ako uvedemo nove promenljive t_i $(i=1, 2, \ldots, m+n+k-1)$ pomoću jednakosti

$$t_i=x_i-\frac{s}{m+n+k} \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n+k-1),$$

odakle je

$$x_{m+n+k}=\frac{s}{m+n+k}-\sum_{j=1}^{m+n+k-1} t_j,$$

jednačina (3.42) postaje

$$\begin{aligned}(3.43)\qquad &\sum_{i=1}^{k} g\left(\frac{ms}{m+n+k}+\sum_{j=0}^{m-1} t_{i+j},\ \frac{ns}{m+n+k}+\sum_{j=0}^{n-1} t_{m+i+j},\ s\right)\\ &+\sum_{i=k+1}^{n+k} g\left(\frac{ms}{m+n+k}+\sum_{j=0}^{m-1} t_{i+j},\ \frac{ns}{m+n+k}-\sum_{j=0}^{m+k-1} t_{m+n+i+j},\ s\right)\\ &+\sum_{i=n+k+1}^{m+n+k} g\left(\frac{ms}{m+n+k}-\sum_{j=0}^{n+k-1} t_{m+i+j},\ \frac{ns}{m+n+k}+\sum_{j=0}^{n-1} t_{m+i+j},\ s\right)=0.\end{aligned}$$

Stavljajući da je

$$(3.44)\qquad g\left(\frac{ms}{m+n+k}+x,\ \frac{ns}{m+n+k}+y,\ s\right)=H(x, y, s),$$

jednačina (3.43) postaje

$$\begin{aligned}(3.45)\qquad &\sum_{i=1}^{k} H\left(\sum_{j=0}^{m-1} t_{i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} t_{m+i+j},\ s\right)\\ &+\sum_{i=k+1}^{k+n} H\left(\sum_{j=0}^{m-1} t_{i+j},\ -\sum_{j=0}^{m+k-1} t_{m+n+i+j},\ s\right)\\ &+\sum_{i=n+k+1}^{m+n+k} H\left(-\sum_{j=0}^{n+k-1} t_{m+i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} t_{m+i+j},\ s\right)=0.\end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da je promenljiva s fiksirana i stavimo

$$(3.46)\qquad H(x, y, s)=h(x, y).$$

Tada jednačina (3.45) ima oblik

$$\begin{aligned}(3.47)\qquad &\sum_{i=1}^{k} h\left(\sum_{j=0}^{m-1} t_{i+j}\cdot \sum_{j=0}^{n-1} {}_{m+i+j}\right)+\sum_{i=k+1}^{m+k} h\left(\sum_{j=0}^{m-1} t_{i+j},\ -\sum_{j=0}^{m+k-1} t_{m+n+i+j}\right)\\ &+\sum_{i=n+k+1}^{m+n+k} h\left(-\sum_{j=0}^{n+k+1} t_{m+i+j},\ \sum_{j=0}^{n-1} t_{m+i+j}\right)=0.\end{aligned}$$

Može se pokazati, na način koji je izložen u radu [6], da iz jednačine (3.47) sleduje da funkcija h ima sledeće osobine:

1° *U slučaju* $m<n<k$, $m+n<k$:

$$(3.48)\qquad h(0,0)=0,$$

$$(3.49)\qquad h(x, -x)+h(x, 0)+h(0, -x)=0,$$

$$(3.50)\qquad h(0, x)+h(0, -x)=0,$$

$$(3.51)\qquad h(x, y)=h(x+y, 0)-h(y, 0)+h(0, y),$$

$$(3.52)\qquad h(x, 0)+h(-x, 0)=0,$$

$$(3.53)\qquad h(x, y)=h(0, x+y)-h(0, x)+h(x, 0);$$

2° *U slučaju* $m<n<k,\ m+n=k$: (3.48), (3.49), (3.50), (3.51), (3.52), (3.53);

3° *U slučaju* $m<n<k,\ m+n>k$: (3.48), (3.49), (3.50), (3.51), (3.52),

$$h(x, y)+k(y, -x-y)+h(-x-y, x)=0; \tag{3.54}$$

4° *U slučaju* $m<n=k$: (3.48), (3.49), (3.50), (3.51), (3.54);

5° *U slučaju* $m=n,\ 2m<k$: (3.48), (3.49),

$$h(x, y)+h(y, 0)+h(0, -x-y)+h(-x-y, x)=0; \tag{3.55}$$

6° *U slučaju* $m=n,\ 2m=k$: (3.48), (3.49), (3.55);

7° *U slučaju* $m=n<k,\ 2m>k$: (3.48). (3.49), (3.55);

8° *U slučaju* $n<m<k,\ m+n<k$: (3.48), (3.49), (3.52), (3.53), (3.50), (3.51);

9° *U slučaju* $n<m<k,\ m+n=k$: (3.48), (3.49), (3.52), (3.53), (3.50), (3.51);

10° *U slučaju* $n<m<k,\ m+n>k$: (3.48), (3.49), (3.52), (3.53), (3.50), (3.54);

11° *U slučaju* $n<m=k$: (3.48), (3.49), (3.52), (3.53), (3.54);

12° *U slučaju* $m=n=k$: (3.48), (3.49), (3.54).

Sada ćemo dokazati teoreme koje se odnose na jednačinu (3.39).

Teorema 13. *Ako je* $m, n<k,\ m\neq n$ *i* $m+n\neq k$, *opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* (3.39) *je*

$$f(x, y, z)=G_1(x+y+z)\operatorname{Re}\left(x-m\frac{x+y+z}{m+n+k}\right)+G_2(x+y+z)\operatorname{Im}\left(x-m\frac{x+y+z}{m+n+k}\right)$$
$$+G_3(x+y+z)\operatorname{Re}\left(y-n\frac{x+y+z}{m+n+k}\right)+G_4(x+y+z)\operatorname{Im}\left(y-n\frac{x+y+z}{m+n+k}\right).$$

gde su G_1, G_2, G_3, G_4 *proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.*

Dokaz. Neka je $m<n<k$ i $m+n<k$. Na osnovu (3.51) i (3.53), dobijamo da funkcija h zadovoljava jdnačinu

$$h(x+y, 0)-h(0, x+y)=h(x, 0)-h(0, x)+h(y, 0)-h(0, y),$$

odakle sleduje

$$h(x, 0)-h(0, x)=G'\operatorname{Re}x+G''\operatorname{Im}x,$$

gde su G' i G'' proizvoljne neprekidne funkcije od s.

Jednačina (3.53), prema tome, ima oblik

$$h(x, y)=h(0, x+y)+G'\operatorname{Re}x+G''\operatorname{Im}x. \tag{3.56}$$

Ako funkciju h, određenu sa (3.56) zamenimo u (3.47) na osnovu (3.50), dobijamo

$$\sum_{i=1}^{k} h\left(0, \sum_{j=0}^{m+n-1} t_{i+j}\right)-\sum_{i=k+1}^{m+n+k} h\left(0, \sum_{j=0}^{k-1} t_{m+n+i+j}\right)=0. \tag{3.57}$$

Ako u (3.57) stavimo $t_1=x$, $t_k=y$, $t_j=0$ $(j\neq 1, k)$, jednačina (3.57) postaje

$$h(0, x+y)=h(0, x)+h(0, y),$$

odakle dobijamo

(3.58) $$h(0, x)=G_3 \operatorname{Re} x+G_4 \operatorname{Im} x,$$

gde su G_3, G_4 proizvoljne funkcije kompleksne promenljive s.

Na osnovu (3.58) i (3.56), dobijamo

(3.59) $$h(x, y)=G_1 \operatorname{Re} x+G_2 \operatorname{Im} x+G_3 \operatorname{Re} y+G_4 \operatorname{Im} y,$$

gde je

$$G_1=G'+G_3, \quad G_2=G''+G_4.$$

Neka je $m<n<k$ i $m+n>k$. Na osnovu (3.51) i (3.54) dobijamo

$$h(x+y, 0)-h(-x-y, 0)-h(0, x+y)=h(x, 0)-h(-x, 0)-h(0,x)$$
$$+h(y, 0)-h(y0)-h(0, y),$$

odakle zaključujemo da je

(3.60) $$h(x, 0)-h(-x, 0)+h(0, x)=G_3 \operatorname{Re} x+G_4 \operatorname{Im} x,$$

gde su G_3 i G_4 proizvoljne funkcije od s.

Na osnovu (3.60), jednakost (3.51) postaje

(3.61) $$h(x, y)=h(x+y, 0)-h(-y, 0)+G_3 \operatorname{Re} y+G_4 \operatorname{Im} y.$$

Ako funkciju h, određenu sa (3.61), zamenimo u (3.47), dobijamo jednačinu

(3.62) $$\sum_{i=1}^{k} h\left(\sum_{i=1}^{m+n-1} t_{i+j}, 0\right)+\sum_{i=k+1}^{m+n+k} h\left(-\sum_{j=0}^{k-1} t_{m+n+i+j}, 0\right)$$
$$-\sum_{i=k+1}^{m+n+k} h\left(\sum_{j=0}^{m+k-1} t_{m+n+i+j}, 0\right)-\sum_{i=1}^{m+k} h\left(-\sum_{j=0}^{n-1} t_{i+j}, 0\right)=0.$$

Za $t_1=x$, $t_{m+k}=y$, $t_j=0$ $(j\neq 1,\ m+k)$, iz jednačine (3.62) imamo

$$h(x+y, 0)=h(x, 0)+h(y, 0),$$

odakle je

$$h(x, 0)=G_1 \operatorname{Re} x+G_2 \operatorname{Im} x.$$

Na osnovu ovoga, jednačina (3.61) postaje (3.59).

Neka je sada $n<m<k$ i $m+n<k$. Na osnovu jednakosti (3.53) i (3.51) dobijamo

$$h(x+y, 0)-h(0, x+y)=h(x, 0)-h(0, x)+h(y, 0)-h(0, y),$$

odakle sleduje

(3.63) $$h(x, 0)-h(0, x)=G_1' \operatorname{Re} x+G_2'' \operatorname{Im} x.$$

Na osnovu (3.63), jednakost (3.53) postaje

(3.64) $$h(x, y)=h(0, x+y)+G' \operatorname{Re} x+G'' \operatorname{Im} x.$$

Ako funkciju h, određenu pomoću (3.64), zamenimo u (3.47), dobijamo jednačinu

$$(3.65)\qquad \sum_{i=1}^{k} h\left(0, \sum_{j=0}^{m+n+1} t_{i+j}\right) = \sum_{i=k+1}^{m+n+k} h\left(0, \sum_{j=0}^{k-1} t_{m+n+i+j}\right).$$

Stavljajući u (3.65) $t_1 = x$, $t_{m+n} = y$, $t_j = 0$ $(j \neq 1, m+n)$ dobijamo

$$h(0, x+y) = h(0, x) + h(0, y),$$

odakle zaključujemo da je

$$h(0, x) = G_3 \operatorname{Re} x + G_4 \operatorname{Im} x.$$

Na osnovu ovoga, jednačina (3,64) postaje (3,59).

Posmatrajmo, najzad, slučaj $n < m < k$ i $m+n > k$. Na osnovu (3.53) i (3.54), dobijamo da funkcija h zadovoljava funkcionalnu jednačinu oblika

$$h(x+y, 0) + h(0, -x-y) - h(0, x+y) = h(x, 0) + h(0, -x) - h(0, y) + h(y, 0) + h(0, -y) - h(0, y).$$

Prema tome, funkcija $h(x, 0) + h(0, -x) - h(0, x)$ određena je sa

$$(3.66)\qquad h(x, 0) + h(0, -x) - h(0, x) = G_1 \operatorname{Re} x + G_2 \operatorname{Im} x.$$

Jednačina (2.53), na osnovu (3.66), postaje

$$(3.67)\qquad h(x, y) = h(0, x+y) - h(0, -x) + G' \operatorname{Re} x + G'' \operatorname{Im} x.$$

Funkcija h treba da zadovoljava jednačinu (3.47). Zamenom h iz (3.67) u (3.47), dobijamo

$$(3.68)\qquad \sum_{i=1}^{k} h\left(0, \sum_{j=0}^{m+n-1} t_{i+j}\right) + \sum_{i=k+1}^{m+n+k} h\left(0, -\sum_{j=0}^{k-1} t_{m+n+i+j}\right) - \sum_{i=1}^{k+1} h\left(0, -\sum_{j=0}^{m-1} t_{i+j}\right) - \sum_{i=n+k+1}^{m+n+k} h\left(0, \sum_{j-0}^{m-1} t_{m+n+i+j}\right) = 0.$$

Ako u (3.68) stavimo $t_1 = x$, $t_{n+k} = y$, $t_j = 0$ $(j \neq 1, n+k)$, jednačina (3.68) postaje

$$h(0, x+y) = h(0, x) + h(0, y),$$

odakle sleduje

$$h(0, x) = G_3 \operatorname{Re} x + G_4 \operatorname{Im} x.$$

Na osnovu poslednje jednakosti, jednakost (3.67) ima tačno oblik (3.59).

Dakle, u sva četiri slučaja, funkcija h je određena sa (3.59).

Po s proizvoljne kompleksne funkcije G_1, G_2, G_3, G_4, označimo redom sa $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$, $G_4(s)$. Na osnovu ovoga, jednakosti (3.59) i transformacija (3.46), (3,44), (3.41), (3.40), sleduje tvrđenje teorema.

Teorema 13 ovim je dokazana.

Teorema 14. *Ako je $m \neq n$ i $m+n=k$, opšte neprekidno rešenje frnkcionalne jednačine* (3.39) *određeno je sa*

$$f(x, y, z)=F\left(x+y-k \frac{x+y+z}{m+n+k}, x+y+z\right)-F\left(-x-y+k \frac{x+y+z}{m+n+k}, x+y+z\right)$$

$$+G_1(x+y+z) \operatorname{Re}\left(x-m \frac{x+y+z}{m+n+k}\right)+G_2(x+y+z) \operatorname{Im}\left(x-m \frac{x+y+z}{m+n+k}\right),$$

gde su F, G_1, G_2 proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

Dokaz. Neka je $m<n$. Kao u dokazu prethodne teoreme može se, na osnovu (3.51) i (3.53), pokazati da funkcija h ima oblik određen sa (3.56). Ako ovako određenu funkciju h zamenimo u (3.39), na osnovu (3.50), zaključujemo da je ona identički zadovoljava i da, prema tome, funkcija $h(0, x)$ može biti proizvoljna. S obzirom na (3.50), za $h(0, x)$ možemo da stavimo

$$h(0, x)=F(x)-F(-x),$$

gde je F proizvoljna neprekidna funkcija.

Na osnovu ovoga, jednakost (3.56) postaje

$$h(x, y)=F(x+y)-F(-x-y)+G_1 \operatorname{Re} x+G_2 \operatorname{Im} x. \tag{3.69}$$

Neka je sada $n<m$. Kako i u ovom slučaju važe jednakosti (3.51) i (3.53), funkcija h ima oblik određen sa (3.56). Zamenom (3.56) u (3.47), dobijamo da je jednačina (3.47) identički zadovoljena, što opet znači da je $h(0, x)$ proizvoljna funkcija za koju važi (3.50).

Na osnovu ovoga, dobijamo da funkcija h, i u ovom slučaju, ima oblik određen sa (3.69).

Ako stavimo da su G_1, G_2 respektivno $G_1(s)$, $G_2(s)$, inače proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije, na osnovu (3.46), (3.44), (3.41) i (3.40), sleduje tvrđenje teoreme.

Teorema 15. *Ako je $m<n=k$, funkcionalna jednačina* (3.39) *ima opšte neprekidno rešenje određeno sa*

$$f(x, y, z)=F\left(x+y-(m+n) \frac{x+y+z}{m+n+k}, x+y+z\right)-F\left(-y+n \frac{x+y+z}{m+n+k}, x+y+z\right)$$

$$+G_1(x+y+z) \operatorname{Re}\left(y-n \frac{x+y+z}{m+n+k}\right)+G_2(x+y+z) \operatorname{Im}\left(y-n \frac{x+y+z}{m+n+k}\right),$$

gde su F, G_1, G_2 proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih.

Dokaz. Na osnovu (3.51) i (3.54), kao i u dokazu teoreme 13, zaključujemo da važi (3.60), odnosno (3.61). Kako je $n=k$, ako (3.61) zamenimo u (3.47), dobijamo identitet. To znači da se za $h(x, 0)$ može uzeti proizvoljna funkcija, naravno neprekidna.

Na osnovu ovoga, za funkciju $h(x, y)$ dobijamo

$$h(x, y)=F(x+y)-F(-y)+G_1 \operatorname{Re} y+G_2 \operatorname{Im} y. \tag{3.70}$$

Iz (3.70), na osnovu transformacija (3.46), (3.44), (3.41) kao i (3.40), stavljajući da su G_1 i G_2 proizvoljne neprekidne funkcije po s, dobijamo da funkcija f ima oblik naveden u teoremi 15. Ovim je dokaz završen.

Teorema 16. *Ako je* $n<m=k$, *opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* (3.39) *je*

$$f(x, y, z)=F\left(x+y-(m+n) \frac{x+y+z}{m+n+k}, x+y+z\right)-F\left(-x+m \frac{x+y+z}{m+n+k}, x+y+z\right)$$

$$+G_1(x+y+z) \operatorname{Re}\left(x-m \frac{x+y+z}{m+n+k}\right)+G_2(x+y+z) \operatorname{Im}\left(x-m \frac{x+y+z}{m+n+k}\right),$$

gde su F, G_1, G_2 *proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih.*

Dokaz. Na osnovu (3.53), (3,54), (3.66), dobijamo da funkcija h zadovoljava jednačinu (3.67).

Ako funkciju h, određenu sa (3.67), zamenimo u (3.47), jednačina (3.47) postaje identitet, što znači da $h(0, x)$ možemo da zamenimo proizvoljnom neprekidnom funkcijom $F(x)$.

Na osnovu ovoga, jednakost (3.67) ima oblik

$$h(x, y)=F(x+y)-F(-x)+G_1 \operatorname{Re} x+G_1 \operatorname{Im} x. \tag{3.71}$$

Prema transformacijama (3.46), (3.44), (3.41), (3.40), iz jednačine (3.71), stavljajući da je $G_1=G_1(s)$ i $G_2=G_2(s)$, sleduje da funkcija f ima oblik naveden u teoremi.

Dokaz teoreme 16 je ovim završen.

Teorema 17. *Ako je* $m=n<k$ *i* $2m \neq k$, *opšte neprekidno rešenje jednačine* (3.39) *određeno je sa*

$$f(x, y, z)=F\left(x-m \frac{x+y+z}{m+n+k}, x+y+z\right)-F\left(y-n \frac{x+y+z}{m+n+k}, x+y+z\right)$$

$$+G_1(x+y+z) \operatorname{Re}\left(x-m \frac{x+y+z}{m+n+k}\right)+G_2(x+y+z) \operatorname{Im}\left(x-m \frac{x+y+z}{m+n+k}\right),$$

gde su F, G_1, G_2 *proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih.*

Dokaz. Neka je $2m<k$. Na osnovu (3.55), jedno za drugim možemo pisati

$$h(x, y)+h(y, 0)+h(0,-x-y)+h(-x-y, x)=0,$$

$$h(-x-y, x)+h(x, 0)+h(0, y)+h(y,-x-y)=0,$$

$$h(y,-x-y)+h(-x-y, 0)+h(0, x)+h(x, y)=0.$$

Ako iz ove tri jednakosti eleminišemo $h(-x-y, x)$ i $h(y,-x-y)$, dobijamo

$$2 h(x, y)=-h(-x-y, 0)-h(0,-x-y)+h(x, 0)-h(0, x)+h(0, y)-h(y, 0).$$

Zamenjujući ovu vrednost za h u jednačinu (3.47), dobijamo

$$(3.72)\qquad \sum_{i=1}^{k} h\left(-\sum_{j=0}^{m+n-1} t_{i+j},\, 0\right)+\sum_{i=1}^{k} h\left(0,\, -\sum_{j=0}^{m+n-1} t_{i+j}\right)$$

$$\sum_{i=k+1}^{m+n+k} h\left(\sum_{j=0}^{k-1} t_{m+n+i+j},\, 0\right)+\sum_{i=k+1}^{m+n+k} h\left(0,\, \sum_{j=0}^{k-1} t_{m+n+i+j}\right)=0.$$

Ako u (3.72) stavimo $t_1=x$, $t_{m+n}=y$, $t_j=0$ $(j\neq 1,\ m+n)$, jednačina (3.72) postaje

$$(3.73)\qquad h(x+y,0)+h(0,x+y)+(k-1)(h(y,0)+h(0,y))$$
$$+h(-x,0)+h(0,-x)+k(h(-y,0)+h(0,-y))=0.$$

Za $y=0$, iz (3.73) dobijamo

$$(3.74)\qquad h(-x,0)+h(0,-x)+h(x,0)+h(0,x)=0,$$

pa jednačina (3.73) ima oblik

$$h(x+y,0)+h(0,x+y)=h(x,0)+h(0,x)+h(y,0)+h(0,y).$$

Odavde sleduje

$$h(x,0)+h(0,x)=G_1 \operatorname{Re} x+G_1 \operatorname{Im} x.$$

Na osnovu ovoga, dobijamo da je funkcija $h(x,y)$ određena sa

$$h(x,y)=h(x,0)+h(0,y),$$

ili

$$(3.75)\qquad h(x,y)=F(x)-F(y)+G_1 \operatorname{Re} x+G_2 \operatorname{Im} y,$$

gde smo stavili $F(x)=-h(0,x)$.

Neka je sada $2m>k$. Ako u (3.72) stavimo $t_1=x$, $t_k=y$, $t_j=0$ za $j\neq 1,\ k$, jednačina (3.72) postaje

$$(3.76)\qquad h(x,0)+h(0,x)+(m+n)(h(y,0)+h(0,y))$$
$$+h(-x-y,0)+h(0,x-y)+(m+n-1)(h(-y,0)+h(0,-y))=0,$$

odakle, za $y=0$, dobijamo (3.74), pa jednačina (3.76) ima oblik

$$h(x+y,0)+h(0,x+y)=h(x,0)+h(0,x)+h(y,0)+h(0,y).$$

Odavde neposredno sleduje da funkcija h ima oblik (3.75).

Prema tome, na osnovu (3.75), (3.46), (3.44), (3.41), (3.40), zaključujemo da je funkcija f oblika navedenog u teoremi.

Teorema 17 ovim je dokazana.

Teorema 18. *Ako je* $2m=2n=k$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.39) *dato je sa*

$$f(x,y,z)=F(x,y+z)-F(y,z+x)+G(x+y,z)-G(z,x+y),$$

gde su F *i* G *proizvoljne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih.*

Dokaz. Iz jednačine (3.72), koja važi i u ovom slučaju, neposredno sleduje jednakost

$$h(x, 0)+h(0, x)+h(-x, 0)+h(0, -x)=0,$$

tj. može se staviti

$$h(x, 0)+h(0, x)=2G(x)-2G(-x), \tag{3.77}$$

gde je G proizvoljna funkcija.

Kaho iz (3.55) sleduje

$$2h(x, y)=-h(-x-y, 0)-h(0, -x-y)+h(x, 0)-h(0, x)+h(0, y)-h(y, 0),$$

na osnovu (3.77) imamo

$$h(x, y)=F(x)-F(y)+G(x+y)-G(-x-y), \tag{3.78}$$

gde smo uveli oznaku

$$2F(x)=h(x, 0)-h(0, x).$$

Iz jednakosti (3.78), (3.46), (3.44), (3.41), (3.40) sleduje tvrđenje teoreme.

Ovim je teorema 18 dokazana.

Teorema 19. *Ako je $m=n=k$, opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.39) *je*

$$f(x, y, z)=F(x, y, z)-F(y, z, x),$$

gde je F proizvoljna funkcija.

Dokaz. Ako u jednačinu (3.47) stavimo $t_1=x$, $t_{m+1}=y$, $t_j=0$ $(j\neq 1, m+1)$, jednačina (3.47) postaje (3.55), tj.

$$h(x, y)+h(y, -x-y)+h(-x-y, x)=0.$$

Opšte rešenje ove funkcionalne jednačine je (videti [4])

$$h(x, y)=F(x, y)-F(y, -x-y), \tag{3.79}$$

gde je F proizvoljna kompleksna funkcija kompleksnih promenljivih.

Na osnovu (3.79), (3.46), (3.44), (3.41), (3.40), zaključujemo da je funkcija f određena oblikom izraženim u teoremi.

Ovim je i dokaz teoreme 19 završen.

3.1.6. Funkcionalna jednačina (3.7)

U prethodnom paragrafu rešena je jednačina (3.7) u slučaju $a=1$. Ovde ćemo odrediti opšte rešenje funkcionalne jednačine (3.7) i u slučaju $a^{m+n+k}\neq 1$. Kada je $a^{m+n+k}=1$, nismo uspeli da rešimo navedenu jednačinu.

Aho stavimo

$$f(x, y, z)=g(x+a^{k+m}y+a^m z, y+a^{m+n}z+a^n x, z+a^{n+k}x+a^k y), \tag{3.80}$$

jednačina (3.7) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} g\left\{\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{m+n+k-1-j} x_{m+i+j} + \sum_{j=0}^{k-1} a^{m+k-1-j} x_{m+n+i+j},\right.$$
$$\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{m+i+j} + \sum_{j=0}^{k-1} a^{m+n+k-1-j} x_{m+n+i+j} + \sum_{j=0}^{m-1} a^{m+n-1-j} x_{i+j},$$
$$\left.\sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} x_{m+n+i+j} + \sum_{j=0}^{m-1} a^{m+n+k-1-j} x_{i+j} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n+k-1-j} x_{m+i+i}\right\} = 0,$$

ili

$$\sum_{i=0}^{m+n+k} g\left\{\sum_{j=0}^{m+n+k-1} a^j x_{m-1+i-j},\ \sum_{j=0}^{m+n+k-1} a^j x_{m+n-1+i-j},\ \sum_{j=0}^{m+n+k-1} a^j x_{m+n+k-1+i-j}\right\} = 0.$$

Ova transformacija jednačine (3.7) je mogrćna, jer je, po pretpostavci $a^{m+n+k} \neq 1$. Iz istog razloga, mogućno je uvesti nove promenljive y_i pomoću relacija

$$y_i = \sum_{j=0}^{m+n+k-1} a^j x_{m-1+i-j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+n+k),$$

pa prethodna jednačina postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} g(y_i, y_{i+n}, y_{i+n+k}) = 0. \tag{3.81}$$

Važi sledeći rezultat.

Lema 1. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.81) *određeno je pomoću*

1° $g(x, y, z) = F(x) - F(z) + G(y) - G(z)$,
$(m \neq n \neq k \neq m,\ m \neq n+k,\ n \neq m+k,\ k \neq m+n)$;

2° $g(x, y, z) = F(x) - F(y) + G(x, z) - G(z, x)$,
$(m \neq n \neq k \neq m,\ m = n+k)$;

3° $g(x, y, z) = F(z) - F(x) + G(x, y) - G(y, x)$,
$(m \neq n \neq k \neq m,\ n = m+k)$;

4° $g(x, y, z) = F(x) - F(y) + G(y, z) - G(z, y)$,
$(m \neq n \neq k \neq m,\ k = m+n)$;

5° $g(x, y, z) = F(x, y) - F(y, z)$,
$(m \neq n = k,\ m \neq n+k)$;

6° $g(x, y, z) = F(x, y) - F(y, z) + G(z, x) - G(x, z)$,
$(m \neq n = k,\ m = n+k)$;

7° $g(x, y, z) = F(x, y) - F(z, x)$,
$(m = n \neq k,\ k \neq m+n)$;

8° $g(x, y, z) = F(x, y) - F(z, x) + G(y, z) - G(z, y)$,
$(m = n \neq k,\ k = m+n)$;

9° $g(x, y, z) = F(y, z) - F(z, x)$,

$(m = k \neq n,\ n \neq k + m)$;

10° $g(x, y, z) = F(x, y) - F(y, x) + G(y, z) - G(z, x)$,

$(m = k \neq n,\ n = k + m)$;

11° $g(x, y, z) = F(x, y, z) - F(y, z, x)$,

$(m = n = k)$.

Funkcije F i G su proizvoljne kompleksne funkcije

Dokaz. S obzirom da su dokazi za pojedine slučajeve slični ili potpuno isti, dokaz leme ćemo izvesti samo u nekim slučajevima, napr. 3° i 8°.

Slučaj 3°. Ako u (3.81) stavimo da su sem x_i, x_{i+n}, x_{i+n+k}, sve druge promenljive jednake nekoj konstanti, dobijamo da je

$$g(x_i, x_{i+n}, x_{i+n+k}) = F(x_{i+n+k}) + H(x_i, x_{i+n}),$$

tj.

$$g(x, y, z) = F(z) + H(x, y). \tag{3.82}$$

Na osnovu ovoga, jednačina (3.81) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} F(x_i) + \sum_{i=1}^{m+n+k} H(x_i, x_{i+n}) = 0.$$

Ako ovde stavimo $x_r = 0$ $(r \neq i,\ i+n)$, dobijamo

$$F(x_i) + F(x_{i+n}) + H(x_i, x_{i+n}) + H(x_{i+n}, x_i) = 0,$$

odakle je

$$H(x, y) = G(x, y) - G(y, x) - F(x).$$

Jednakost (3.82) sada postaje

$$g(x, y, z) = F(z) - F(x) + G(x, y) - G(y, x).$$

Slučaj 8°. Ako u (3.81) stavimo $x_r = 0$ $(r \neq i,\ i+n,\ i+n+k)$, jednačina (3.81) postaje

$$g(x_i, x_{i+n}, x_{i+n+k}) = F(x_i, x_{i+n}) + F_1(x_{i+n}, x_{i+n+k}) + F_2(x_{i+n+k}, x_i),$$

tj.

$$g(x, y, z) = F(x, y) + F_1(y, z) + F_2(z, x),$$

gde su F, F_1, F_2 proizvoljne kompleksne funkcije.

Zamenjujući dobijenu vrednost za g u (3.81), dobijamo

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} F(x_i, x_{i+n}) + \sum_{i=1}^{m+n+k} F_1(x_i, x_{i+n}) + \sum_{i=1}^{m+n+k} F_2(x_i, x_{i+n}) = 0. \tag{3.83}$$

Za $x_r = 0$ $(r \neq i,\ i+k)$, odavde dobijamo

$$F_2(x_i, x_{i+k}) + F_2(x_{i+k}, x_i) + H(x_i) + H(x_{i+k}) = 0,$$

gde je H proizvoljna funkcija.

Iz ove jednačine sleduje da funkcija F_2 ima oblik

(3.84) $$F_2(x, y) = G(x, y) - G(y, x) - H(x),$$

gde je G proizvoljna funkcija.

Ako (3.84) zamenimo u (3.83), jednačina (3.83) postaje

(3.85) $$\sum_{i=1}^{m+n+k} \left(F(x_i, x_{i+n}) + F_1(x_i, x_{i+n}) + H(x_i)\right) = 0.$$

Iz poslednje jednačine, za $x_r = 0$ $(r \neq i,\ i+n)$, dobijamo

$$F_1(x, y) = -F(x, y) - 2H(x) - 2H(y).$$

Zamenjujući dobijenu vrednost za F_1 u (3.85), imamo da je $\sum_{i=1}^{m+n+k} H(x_i) = 0$, tj. $H(x) = 0$, pa je, na osnovu svega, funkcija g određena sa

$$g(x, y, z) = F(x, y) - F(z, x) + G(y, z) - G(z, y),$$

što je trebalo dokazati.

Kao što je ranije napomenuto, slično se dokazuje lema i za ostale slučajeve.

Na osnovu dokazane leme i transformacije (3.80), sleduju redom sledeće teoreme.

Teorema 20. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n \neq k \neq m$, $m \neq n+k$, $n \neq m+k$, $k \neq m+n$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.7) *je*

$$f(x, y, z) = F(x + a^{k+m} y + a^m z) - F(z + a^{n+k} x + a^k y)$$
$$+ G(y + a^{m+n} z + a^n x) - G(z + a^{n+k} x + a^k y),$$

gde su F *i* G *proizvoljne kompleksne funkcije.*

Teorema 21. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n \neq k \neq m$, $m = n+k$, *funkcionalna jednačina* (3.7) *ima opšte rešenje*

$$f(x, y, z) = F(x + a^{k+m} y + a^m z) - F(y + a^{m+n} z + a^n x)$$
$$+ G(x + a^{k+m} y + a^m z,\ z + a^{n+k} x + a^k y)$$
$$- G(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+n} y + a^m z),$$

gde su F *i* G *proizvoljne kompleksne funkcije.*

Teorema 22. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n \neq k \neq m$, $n = m+k$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.7) *je*

$$f(x, y, z) = F(z + a^{n+k} x + a^k y) - F(x + a^{k+m} y + a^m z)$$
$$+ G(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x)$$
$$- G(y + a^{m+n} z + a^n x,\ x + a^{k+m} y + a^m z),$$

gde su F *i* G *proizvoljne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih.*

Teorema 23. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n \neq k \neq m$, $k = m + n$, *funkcionalna jednačina* (3.7) *ima opšte rešenje*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & F(x + a^{k+m} y + a^m z) - F(y + a^{m+n} z + a^n x) \\ & + G(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) \\ & - G(z + a^{n+k} x + a^k y,\ y + a^{m+n} z + a^n x), \end{aligned}$$

gde su F *i* G *proizvoljne kompleksne funkcije.*

Teorema 24. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n = k$, $m \neq n + k$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.7) *je*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & F(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\ & - F(y + a^{m+n} z + a^n x,\ x + a^{k+m} y + a^m z), \end{aligned}$$

gde je F *proizvoljna kompleksna funkcija.*

Teorema 25. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n = k$, $m = 2n$, *jednačina* (3.7) *ima opšte rešenje određeno sa*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & F(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\ & - F(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) \\ & + G(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z) \\ & - G(x + a^{k+m} y + a^m z,\ z + a^{n+k} x + a^k y), \end{aligned}$$

gde su F *i* G *proizvoljne kompleksne funkcije.*

Teorema 26. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m = n \neq k$, $k \neq m + n$, *funkcionalna jednačina* (3.7) *ima opšte rešenje*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & F(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\ & - F(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z), \end{aligned}$$

gde je F *proizvoljna kompleksna funkcija.*

Teorema 27. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m = n \neq k$, $k = m + n$, *funkcionalna jednačina* (3.7) *ima opšte rešenje*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & F(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\ & - F(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z) \\ & + G(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) \\ & - G(z + a^{n+k} x + a^k y,\ y + a^{m+n} z + a^n x), \end{aligned}$$

gde su F *i* G *proizvoljne kompleksne funkcije.*

Teorema 28. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m = k \neq n$, $n \neq m + k$, *funkcionalna jednačina* (3.7) *ima opšte rešenje određeno sa*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & F(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) \\ & - F(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z), \end{aligned}$$

gde je F *proizvoljna kompleksna funkcija.*

Teorema 29. *Ako je* $a^{m+n+k}\neq 1$, $m=k\neq n$, $n=m+k$, *funkcionalna jednačina* (3.7) *ima opšte rešenje*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & F(x+a^{k+m} y+a^m z,\ y+a^{m+n} z+a^n x) \\ & -F(y+a^{m+n} z+a^n x,\ x+a^{k+m} y+a^m z) \\ & +G(y+a^{m+n} z+a^n x,\ z+a^{n+k} x+a^k y) \\ & -G(z+a^{n+k} x+a^k y,\ x+a^{k+m} y+a^m z), \end{aligned}$$

gde su F *i* G *proizvoljne kompleksne funkcije.*

Teorema 30. *Ako je* $a^{m+n+k}\neq 1$, $m=n=k$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.7) *je dato sa*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & F(x+a^{k+m} y+a^m z,\ y+a^{m+n} z+a^n x,\ z+a^{n+k} x+a^k y) \\ & -F(y+a^{m+n} z+a^n x,\ z+a^{n+k} x+a^k y,\ x+a^{k+m} y+a^m z), \end{aligned}$$

gde je F *proizvoljna kompleksna funkcija kompleksnih promenljivih.*

3.1.7. Funkcionalna jednačina (3.8)

Za funkcionalnu jednačinu (3.8) odredićemo opšte rešenje samo u slučaju $a^{m+n+k}\neq 1$. Ostali slučajevi ostaju otvoreni.

Pre svega transformisaćemo jednačinu (3.8).

Ako stavimo

$$f_i(x, y, z)=g_i(x+a^{k+m} y+a^m z,\ y+a^{m+n} z+a^n x,\ z+a^{n+k} x+a^k y), \tag{3.86}$$

jednačina (3.8) postaje

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+n+k} g_i \Big\{ & \sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{m+n+k-1-j} x_{m+i+j} + \sum_{j=0}^{k-1} a^{m+k-1-j} x_{m+n+i+j}, \\ & \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{m+i+j} + \sum_{j=0}^{k-1} a^{m+n+k-1-j} x_{m+n+i+j} + \sum_{j=0}^{m-1} a^{m+n-1-j} x_{i+j}, \\ & \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} x_{m+n+i+j} + \sum_{j=0}^{m-1} a^{m+n+k-1-j} x_{i+j} + \sum_{j=0}^{n-1} a^{n+k-1-j} x_{m+i+j} \Big\} = 0, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+n+k} g_i \Big\{ & \sum_{j=0}^{m+n+k-1} a^j x_{m-1+i-j},\quad \sum_{j=0}^{m+n+k-1} a^j x_{m+n-1+i-j}, \\ & \sum_{i=0}^{m+n+k-1} a^j x_{m+n+k-1+i-j} \Big\} = 0. \end{aligned} \tag{3.87}$$

S obzirom da je $a^{m+n+k}\neq 1$, ova transformacija jednačine (3.7) je moguća.

Kako su linearne forme

$$y_i=\sum_{j=0}^{m+n+k-1} a^j x_{m-1+i-j} \qquad (i=1, 2, \ldots, m+n+k)$$

linearno nezavisne, mogućno je uvesti nove promenljive y_i određene navedenim relacijama.

Na osnovu ovoga, jednačina (3.87) dobija oblik

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} g_i(y_i, y_{i+n}, y_{i+n+k}) = 0. \tag{3.88}$$

Za jednačinu (3.88) važi sledeća lema.

Lema 2. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.88) *određeno je jednakostima*:

1° $g_i(x, y, z) = F_i(x) - F_{i+n+k}(z) + G_i(y) - G_{i+k}(z) - \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^{m+n+k} \alpha_i = 0,$

ako je $m \neq n \neq k \neq m, \; m \neq n+k, \; n \neq m+k, \; k \neq m+n$;

2° $g_i(x, y, z) = F_i(y) - F_{i+k}(z) + G_i(x, z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$

$g_i(x, y, z) = F_i(y) - F_{i+k}(z) - G_{i+m}(z, x) - \alpha_{i+m}$

$(i = m+1, m+2, \ldots, 2m), \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0,$

ako je $m \neq n \neq k \neq m, \; m \neq n+k$;

3° $g_i(x, y, z) = F_i(z) - F_{i+m}(x) + G_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$

$g_i(x, y, z) = F_i(z) - F_{i+m}(x) - G_{i+n}(y, x) - \alpha_{i+n}$

$(i = n+1, n+2, \ldots, 2n), \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha = 0,$

ako je $m \neq n \neq k \neq m, \; n = m+k$;

4° $g_i(x, y, z) = F_i(x) - F_{i+n}(y) + G_i(y, z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$

$g_i(x, y, z) = F_i(x) - F_{i+n}(y) - G_{i+k}(z, y) - \alpha_{i+k}$

$(i = k+1, k+2, \ldots, 2k), \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0,$

ako je $m \neq n \neq k \neq m, \; k = m+n$;

5° $g_i(x, y, z) = F_i(x, y) - F_{i+n}(y, z) + \alpha_i$

$(i = 1, 2, \ldots, m+nk), \qquad \sum_{i+1}^{m+n+k} \alpha_i = 0,$

ako je $m \neq n = k, \; m \neq n+k$;

6° $g_i(x, y, z) = F_i(x, y) - F_{i+n}(y, z) + G_i(z, x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$

$g_i(x, y, z) = F_i(x, y) - F_{i+n}(y, z) - G_{i+m}(x, z)$

$(i = m+1 \; m+2, \ldots, 2m),$

ako je $m \neq n = k, \; m = n+k$;

7° $g_i(x, y, z) = F_i(x, y) - F_{i+n+k}(z, x) + \alpha_i$

$$(i = 1, 2, \ldots, m+n+k), \qquad \sum_{i=1}^{m+u+k} \alpha_i = 0,$$

ako ja $m = n \neq k,\ k \neq m+n$;

8° $g_i(x, y, z) = F_i(x, y) - F_{i+n+k}(z, x) + G_i(y, z) + \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \text{k}),$

$$g_i(x, y, z) = F_i(x, y) - F_{i+n+k}(z, x) - G_{i+k}(z, y)$$

$$(i = k+1, k+2, \ldots, 2k), \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0,$$

ako je $m = n \neq k,\ k \neq m+n$;

9° $g_i(x, y, z) = F_i(x, y) - F_{i+m+n}(z, y) + \alpha_i$

$$(i = 1, 2, \ldots\ m+n+k), \qquad \sum_{i=1}^{m+n+k} \alpha_i = 0,$$

ako je $m = k \neq n,\ n \neq m+k$;

10° $g_i(x, y, z) = F_i(y, z) - F_{i+k}(z, x) + G_i(x, y) + \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$

$$g_i(x, y, z) = F_i(y, z) - F_{i+k}(z, x) - G_{i+n}(y, x)$$

$$(i = n+1, n+2, \ldots, 2n), \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0,$$

ako je $m = k \neq n,\ n = m+k$;

11° $g_i(x, y, z) = F_i(x, y, z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2m),$

$$g_i(x, y, z) = -F_i(y, z, x) - F_{i+2m}(z, x, y)$$

$$(i = 2m+1, 2m+2, \ldots, 3m)$$

ako je $m = n = k$:

U svim slučajevima funkcije F_i i G_i su proizvoljne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih za koje je $F_{i+m+n+k} = F_i$, $G_{i+m+n+k} = G_i$.

Konstante α_i su proizvoljne kompleksne konstante za koje je takođe $\alpha_{i+m+n+k} = \alpha_i$.

Dokaz. Tvrđenja leme za pojedine slučajeve dokazuju se na dosta sličan način. Stoga će biti dovoljno da, primera radi, dokažemo lemu za samo neke slučajeve.

Slučaj 4°. Ako u (3.88) stavimo da su sem promenljivih y_i, y_{i+n}, y_{i+n+k}, sve druge promenljive jednake nekoj konstanti, dobijamo da mora biti

$$g_i(y_i, y_{i+n}, y_{i+n+k}) = F_i(y_i) + H_i(y_{i+n}, y_{i+n+k}),$$

tj.

$$g_i(x, y, z) = F_i(x) + H_i(y, z), \tag{3.89}$$

gde su F_i, G_i $(i = 1, 2, \ldots, m+n+k;\ F_{i+m+n+k} = F_i,\ G_{i+m+n+k} = G_i)$ proizvoljne kompleksne funkcije.

Na osnovu (3.89), jednačina (3.88) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} F_i(y_i) + \sum_{i=1}^{m+n+k} H_i(y_{i+n}, y_{i+n+k}) = 0,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} F_{i+n}(y_{i+n}) + \sum_{i=1}^{m+n+k} H_i(y_{i+n}, y_{i+n+k}) = 0.$$

Ako stavimo $y_r = 0$ $(r \neq i+n,\ i+n+k)$, prethodna jednačina postaje

$$\begin{aligned}(3.90)\qquad F_{i+n}(y_{i+n}) + F_{i+n+k}(y_{i+n+k}) + H_i(y_{i+n}, y_{i+n+k})&\\ + H_{i+k}(y_{i+n+k}, y_{i+n}) + \alpha_{i+k} &= 0,\end{aligned}$$

gde su α_i proizvoljne konstante.

Iz (3.90) dobijamo

$$H_i(y, z) = -H_{i+n}(z, y) - F_{i+n}(y) - F_{i+n+k}(z) - \alpha_{i+k},$$

pa jednačina (3.89) dobija oblik

$$g_i(x, y, z) = F_i(x) + H_i(y, z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$g_i(x, y, z) = F_i(x) - H_{i+k}(z, y) - F_{i+n}(y) - F_{i+n+k}(z) - \alpha_{i+k}$$
$$(i = k+1, k+2, \ldots, 2k)$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$.

Ako uvedemo nove funkcije G_i pomoću

$$G_i(y, z) = H_i(y, z) + F_{i+n}(y),$$

prethodne jednakosti dobijaju oblik

$$g_i(x, y, z) = F_i(x) - F_{i+n}(y) + G_i(y, z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$g_i(x, y, z) = F_i(x) - F_{i+n}(y) - G_{i+k}(z, y) - \alpha_{i+k} \qquad (i = k+1, k+2, \ldots, 2k),$$

gde je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$.

Ovim je dokazana lema za slučaj 4°.

Slučaj 5°. Za $y_j = 0$ $(j \neq i,\ i+n,\ i+n+k)$, iz jednačine (3.88) dobijamo

$$g_i(y_i, y_{i+n}, y_{i+n+k}) = H_i(y_i, y_{i+n}) + G_i(y_{i+n}, y_{i+n+k}),$$

tj.

$$(3.91)\qquad g_i(x, y, z) = H_i(x, y) + G_i(y, z),$$

gde su H_i i G_i proizvoljne kompleksne funkcije.

Na osnovu (3.91), funkcionalna jednačina (3.88) postaje,

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} H_i(y_i, y_{i+n}) + \sum_{i=1}^{m+n+k} G_i(y_{i+n}, y_{i+n+k}) = 0,$$

tj.

$$(3.92)\qquad \sum_{i=1}^{m+n+k} H_i(y_i, y_{i+n}) + \sum_{i=1}^{m+n+k} G_{i+m+n}(y_i, y_{i+n}) = 0.$$

Ako u (3.92) stavimo $y_r = 0$ $(r \neq i,\ i+n)$, jednačina (3.92) dobija oblik

$$H_i(y_i, y_{i+n}) + G_{i+m+n}(y_i, y_{i+n}) + A_i(y_i) - B_{i+n}(y_{i+n}) = 0, \tag{3.93}$$

gde su A i B proizvoljne kompleksne funkcije.

Na osnovu (3.93), jednačina (3.92) postaje

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} A_i(y_i) - \sum_{i=1}^{m+n+k} B_i(y_i) = 0,$$

odakle dobijamo

$$B_i(y_i) = A_i(y_i) + \beta_i, \quad \sum_{i=1}^{m+n+k} \beta_i = 0.$$

Jednakost (3.93), prema tome, ima oblik

$$H_i(y_i, y_{i+n}) + G_{i+m+k}(y_i, y_{i+n}) + A_i(y_i) - A_{i+n}(y_{i+n}) - \beta_{i+n} = 0.$$

Na osnovu ovoga i (3.91), dobijamo

$$g_i(x, y, z) = H_i(x, y) - H_{i+n}(y, z) + A_{i+n}(x) - A_{i+2n}(y) + \beta_{i+2n},$$

tj.

$$g_i(x, y, z) = F_i(x, y) - F_{i+n}(y, z) + \alpha_i, \quad \sum_{i=1}^{m+n+k} \alpha_i = 0,$$

gde smo stavili

$$F_i(x, y) = H_i(x, y) + A_{i+n}(x), \quad \alpha_i = \beta_{i+2n}.$$

Ovim je dokazana lema i za slučaj 5°.

Kao što smo ranije naveli, slično se dokazuje lema i za sve druge slučajeve.

Na osnovu leme 2 i transformacije (3.86), sleduju redom sledeće teoreme koje se odnose na jednačinu (3.8).

Teorema 31. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n \neq k \neq m$, $m \neq n+k$, $n \neq m+k$ *i* $k \neq m+n$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je*

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) &= F_i(x + a^{k+m} y + a^m z) - F_{i+n+k}(z + a^{n+k} x + a^k y) \\ &\quad + G_i(y + a^{m+n} z + a^n x) - G_{i+k}(z + a^{n+k} x + a^k y) - \alpha_i, \end{aligned}$$

gde su F_i i G_i $(i = 1, 2, \ldots, m+n+k)$ *proizvoljne kompleksne funkcije i* α_i *proizvoljne kompleksne konstante za koje je* $\sum_{i=1}^{m+n+k} \alpha_i = 0$.

Teorema 32. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n \neq k \neq m$, $m = n+k$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je dato sa*

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) &= F_i(y + a^{m+n} z + a^n x) - F_{i+k}(z + a^{n+k} x + a^k y) \\ &\quad + G_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ z + a^{n+k} x + a^k y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \\ f_i(x, y, z) &= F_i(y + a^{m+n} z + a^n x) - F_{i+k}(z + a^{n+k} x + a^k y) \\ &\quad - G_{i+m}(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z) - \alpha_{i+m} \\ &\qquad (i = m+1, m+2, \ldots, 2m), \end{aligned}$$

gde su F_i *i* G_i *proizvoljne kompleksne funkcije kompleksnih promeeljivih i* α_i *proizvoljne kompleksne konstante za koje je* $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$.

Teorema 33. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n \neq k \neq m$, $n = m + k$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je*

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) &= F_i(z + a^{n+k} x + a^k y) - F_{i+m}(x + a^{k+m} y + a^m z) \\ &\quad + G_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ f_i(x, y, z) &= F_i(z + a^{n+k} x + a^k y) - F_{i+m}(x + a^{k+m} y + a^m z) \\ &\quad - G_{i+n}(y + a^{m+n} z + a^n x,\ x + a^{k+m} y + a^m z) - \alpha_{i+n} \\ &\qquad\qquad (i = n+1, n+2, \ldots, 2n), \end{aligned}$$

gde su F_i *i* G_i *proizvoljne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih i* α_i *proizvoljne kompleksne konstante za koje je* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$.

Teorema 34. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n \neq k \neq m$, $k = m + n$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je*

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) &= F_i(x + a^{k+m} y + a^m z) - F_{i+n}(y + a^{m+n} z + a^n x) \\ &\quad + G_i(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \\ f_i(x, y, z) &= F_i(x + a^{k+m} y + a^m z) - F_{i+n}(y + a^{m+n} z + a^n x) \\ &\quad - G_{i+k}(z + a^{n+k} x + a^k y,\ y + a^{m+n} z + a^n x) - \alpha_{i+k} \\ &\qquad\qquad (i = k+1, k+2, \ldots, 2k), \end{aligned}$$

gde su F_i *i* G_i *proizvoljne kompleksne funkcije, a* α_i *proizvoljne kompleksne konstante čiji je zbir jednak nuli.*

Teorema 35. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n = k$, $m \neq n + k$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je*

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) &= F_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\ &\quad - F_{i+n}(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) + \alpha_i \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, m + n + k), \end{aligned}$$

gde su F_i *proizvoljne kompleksne funkcije i* α_i *proizvoljne kompleksne konstante za koje je* $\sum_{i=1}^{m+n+k} \alpha_i = 0$,

Teorema 36. *Ako je* $a^{m+n+k} \neq 1$, $m \neq n = k$, $m = n + k$, *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *određeno je sa*

$$\begin{aligned} f_i(x, y, z) &= F_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\ &\quad - F_{i+n}(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) \\ &\quad + G_i(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_i(x, y, z) = {} & F_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\
& - F_{i+n}(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) \\
& - G_{i+m}(x + a^{k+m} y + a^m z,\ z + a^{n+k} x + a^k y)
\end{aligned}
$$

$$(i = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ 2m),$$

gde su F_i i G_i proizvoljne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih.

Teorema 37. *Ako je $a^{m+n+k} \neq 1$, $m = n \neq k$, $k \neq m+n$, opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je*

$$
\begin{aligned}
f_i(x, y, z) = {} & F_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\
& - F_{i+n+k}(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z) + \alpha_i
\end{aligned}
$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m+n+k),$$

gde su F_i proizvoljne kompleksne funkcije i α_i proizvoljne kompleksne konstante za koje je $\sum_{i=1}^{m+n+k} \alpha_i = 0$.

Teorema 38. *Ako je $a^{m+n+k} \neq 1$, $m = n \neq k$, $k = m+n$, opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je*

$$
\begin{aligned}
f_i(x, y, z) = {} & F_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\
& - F_{i+n+k}(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z) \\
& + G_i(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y) + \alpha_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_i(x, y, z) = {} & F_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x) \\
& - F_{i+n+k}(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z) \\
& - G_{i+k}(z + a^{n+k} x + a^k y,\ y + a^{m+n} z + a^n x)
\end{aligned}
$$

$$(i = k+1,\ k+2,\ \ldots,\ 2k),$$

gde su F_i i G_i proizvoljne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih, a α_i proizvoljne kompleksne konstante čiji je zbir jednak nuli.

Teorema 39. *Ako je $a^{m+n+k} \neq 1$, $m = k \neq n$, $n \neq m+k$, opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je*

$$
\begin{aligned}
f_i(x, y, z) = {} & F_i(x + a^{k+m} y + a^m z, y + a^{m+n} z + a^n x) \\
& - F_{i+m+n}(z + a^{n+k} x + a^k y, y + a^{m+n} z + a^n x) + \alpha_i
\end{aligned}
$$

$$(i = 1, 2,\ \ldots,\ m+n+k),$$

gde su F_i proizvoljne kompleksne funkcije a α_i proizvoljne kompleksne konstante čiji je zbir jednak nuli.

Teorema 40. *Ako je $a^{m+n+k} \neq 1$, $m = k \neq n$, $n = m+k$, opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *određeno je sa*

$$
\begin{aligned}
f_i(x, y, z) = {} & F_i(y + a^{m+n} z + a^n x, z + a^{n+k} x + a^k y) \\
& - F_{i+k}(z + a^{n+k} x + a^k y, x + a^{k+m} y + a^m z) \\
& + G_i(x + a^{k+m} y + a^m z, y + a^{m+n} z + a^n x) + \alpha_i \qquad (i = 1, 2,\ \ldots,\ n),
\end{aligned}
$$

$$f_i(x, y, z) = F_i(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y)$$
$$- F_{i+k}(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z)$$
$$- G_{i+n}(y + a^{m+n} z + a^n x,\ x + a^{k+m} y + a^m z)$$
$$(i = n + 1, n + 2, \ldots, 2n),$$

gde su F_i i *G_i pvoizvoljne kompleksne funkcije promenljive i α_i proizvoljne kompleksne konstante čiji je zbir nula.*

Teorema 41. *Ako je $a^{m+n+k} \neq 1$ i $m = n = k$, opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.8) *je*

$$f_i(x, y, z) = F_i(x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2m),$$
$$f_i(x, y, z) = -F_i(y + a^{m+n} z + a^n x,\ z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z)$$
$$- F_{i+2m}(z + a^{n+k} x + a^k y,\ x + a^{k+m} y + a^m z,\ y + a^{m+n} z + a^n x)$$
$$(i = 2m + 1, 2m + 2, \ldots, 3m),$$

gde su F_i proizvoljne kompleksne funkcije.

3.1.8. Jedna primena na konveksne funkcije

Na međunarodnom Kolokvijumu za funkcionalne jednačine, koji je održan u Miškolcu (Mađarska) u maju 1966. godine, prikazan je rad G. N. Sakoviča u kome su rešene funkcionalne jednačine

$$f(x, y-z) + f(y, z-x) + f(z, x-y) = 0,$$
$$f_1(x, y-z) + f_2(y, z-x) + f_3(z, x-y) = 0.$$

Ove jednačine su partikularni slučajevi jednačina (3.5), odnosno (3.6), za $m = 1$, $n = 2$, $a = -1$, što se vidi ako se stavi

$$f(x, y) = g(x, -y), \text{ odnosno } f_i(x, y) = g_i(x, -y).$$

Međutim, rešenja ovih jednačina Sakovič je dobio nezavisno od nas.

Pored ovoga, Sakovič je u pomenutom radu dao jednu primenu ovih jednačina u teoriji konveksnih funkcija na sledeći način.

Za jednačinu

$$f(x)\, g(y-x) + f(y)\, g(z-x) + f(z)\, g(x-y) = 0, \tag{3.94}$$

Sakovič je pokazao da ima opšte merljivo rešenje oblika

$$f(x) = Ax + B, \quad g(x) = Cx,$$

ili

$$f(x) = A \sin rx + B \cos rx, \quad g(x) = C \sin rx,$$

ili

$$f(x)=A\operatorname{sh} rx+B\operatorname{ch} rx, \quad g(x)=C\operatorname{sh} rx,$$

Ova rešenja jednačine (3.94) G. N. Sakovič je dobio svodeći je na jednačinu

$$h(x, y-z)+h(y, z-x)+h(z, x-h)=0, \tag{3.95}$$

transformacijom

$$f(x)\, g(y)=h(x, y).$$

Kako je (videti 3.1.3) opšte rešenje funkcionalne jednačine (3.95) određeno sa

$$h(x, y)=F(x+y)-F(x-y),$$

imamo

$$f(x)\, g(y)=F(x, y)-F(x-y). \tag{3.96}$$

Odavde, na osnovu rezultata do koga je došao R. Sato (videti [31]), sleduje navedeno rešenje jednačine (3.94).

I. E. Ovčarenko (videti [19]) dao je sledeću definiciju konveksnosti funkcija:

Funkcija $f(x)$ je konveksna u intervalu (a, b) u odnosu na funkciju $g(x)$, ako sa svako $x\in(a, b)$ postoji $\delta_x>0$, takvo da za svako $x_1<x<x_2$ i $x_2-x_1<\delta_x$ važi nejednakost

$$f(x_1)\, g(x-x_2)+f(x)\, g(x_2-x_1)+f(x_2)\, g(x_1-x)\leqslant 0. \tag{3.97}$$

Ova definicija konveksnosti je, prema gore navedenom, prirodna ako i samo ako je

$$g(x)=Cx \quad \text{ili} \quad g(x)=C\sin rx \quad \text{ili} \quad g(x)=C\operatorname{sh} rx,$$

jer u ostalim slučajevima znak jednakosti u (3.97) ne može da nastupi.

Do istog rezultata došao je i sam Ovčarenko, ali pod pretpostavkom da je funkcija $g(x)$ dvaputa diferencijabilna.

3.2. JEDNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA BEZ PARAMETRA

3.2.1. Pretpostavke i objašnjenja

Pretpostavićemo da

1° Promenljive x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ pripadaju skupu kompleksnih brojeva C i $x_{i+n}=x_i$;

2° Funkcije f_1 i f_i $(i=2, 3, \ldots, n-1)$ vrše preslikavanja

$$f_1: C^2\to C \quad \text{i} \quad f_i: C^3\to C.$$

U ovom odeljku posmatraćemo funkcionalnu jednačinu

$$f_1\Big(x_1, \sum_{j=2}^{n} x_j\Big)+\sum_{i=2}^{n-1} f_i\Big(x_i, x_{i+1}, \sum_{j=i+2}^{n+i-1} x_j\Big)=0 \qquad (n\geqslant 4), \tag{3.1}$$

u kojoj nepoznate funkcije ne zavise od istog broja argumenata.

3.2.2. Funkcionalna jednačina (3.1)

Pre nego što odredimo opšte rešenje funkcionalne jednačine (3.1), dokazaćemo sledeću lemu.

Lema. *Opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine*

$$f(x, y+z+u)-f(x+y, z+u)-f(x+z, y+u)+f(x+y+z, u)=0 \tag{3.2}$$

određeno je sa

$$f(x, y)=H_3(x+y)+H_1(x+y)\operatorname{Re} x+H_2(x+y)\operatorname{Im} x, \tag{3.3}$$

gde su H_1, H_2, H_3 proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

Dokaz. Ako uvedemo novu funkciju pomoću

$$g(x, y)=f(x, x-y), \tag{3.4}$$

jednačina (3.2) postaje

$$\begin{aligned} g(x, x+y+z+u)-g(x+y, x+y+z+u) \\ -g(x+z, x+y+z+u)+g(x+y+z, x+y+z+u)=0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Za $x=0$ i $y+z+u=t$, jednačina (3.5) dobija oblik

$$g(y+z, t)-g(y, t)-g(z, t)+g(0, t)=0,$$

ili

$$h(y+z, t)=h(y, t)+h(z, t), \tag{3.6}$$

gde smo uveli oznaku

$$h(x, t)=g(x, t)-g(0, t). \tag{3.7}$$

Dakle, funkcija h je aditivna po prvom argumentu, pa je opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine (3.6) određeno sa (videti: [1])

$$h(x, y)=H_1(y)\operatorname{Re} x+H_2(y)\operatorname{Im} x, \tag{3.8}$$

gde su H_1 i H_2 proizvoljne neprekidne kompleksne funkcije kompleksne promenljive.

Na osnovu (3.8) i (3.7), za funkciju g dobijamo

$$g(x, y)=H_3(y)+H_1(y)\operatorname{Re} x+H_2(y)\operatorname{Im} x, \tag{3.9}$$

gde smo stavili $g(0, y)=H_3(y)$.

Iz jednakosti (3.9) i (3.4) sleduje (3.3).

Ovim je lema dokazana.

Sada ćemo dokazati dve teoreme koje se odnose na funkcionalnu jednačinu (3.1), za slučaj $n=4$ i $n=5$.

Teorema 1. *Funkcionalna jednačina*

$$f_1(x_1, x_2+x_3+x_4)+f_2(x_2, x_3, x_4+x_1)+f_3(x_3, x_4, x_1+x_2)=0 \tag{3.10}$$

ima opšte neprekidno rešenje dato sa

$$(3.11)\qquad \begin{aligned} f_2(x_1, x_2, x_3) &= -f_1(x_3, x_1+x_2) + F(x_2, x_3+x_1),\\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_2+x_3, x_1) - f_1(x_3, x_1+x_2) - F(x_1, x_2+x_3),\end{aligned}$$

gde je F proizvoljna funkcija sa vrednostima u C, a neprekidna funkcija f_1 zadovoljava funkcionalnu jednačinu (3.2).

Dokaz. Ako u (3.10) stavimo da je $x_4=0$, dobijamo

$$(3.12)\qquad f_2(x_2, x_3, x_1) = F(x_3, x_1+x_2) - f_1(x_1, x_2+x_3),$$

gde je $F(x_1, x_2) = -f_3(x_1, 0, x_2)$.

Za $x_2=0$, funkcionalna jednačina (3.10), na osnovu (3.12), postaje

$$(3.13)\qquad f_3(x_3, x_4, x_1) = f_1(x_4+x_1, x_3) - f_1(x_1, x_3+x_4) - F(x_3, x_4+x_1).$$

Iz jednakosti (3.12) i (3.13) sleduje (3.11).

Zamenjujući jednakosti (3.12) i (3.13) u (3.10), dobijamo da funkcija f_1 treba da zadovoljava jednačinu (3.2).

Prema tome, ovim je teorema dokazana.

Teorema 2. *Opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine*

$$(3.14)\qquad \begin{aligned} &f_1(x_1, x_2+x_3+x_4+x_5) + f_2(x_2, x_3, x_4+x_5+x_1)\\ &\quad + f_3(x_3, x_4, x_5+x_1+x_2) + f_4(x_4, x_5, x_1+x_2+x_3) = 0\end{aligned}$$

određeno je pomoću jednakosti

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} f_2(x_1, x_2, x_3) &= -f_1(x_3, x_1+x_2) + F_1(x_2, x_3+x_1),\\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_2+x_3, x_1) - f_1(x_3, x_1+x_2)\\ &\quad - F_1(x_1, x_2+x_3) + F_2(x_2, x_3+x_1),\\ f_4(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_2+x_3, x_1) - f_1(x_3, x_1+x_2) - F_2(x_1, x_2+x_3),\end{aligned}$$

gde su F_1 i F_2 proizvoljne funkcije sa vrednostima u C, a funkcija f_1 predstavlja opšte neprekidno rešenje jednačine (3.2).

Dokaz. Ako u (3.14) stavimo $x_4=x_5=0$, dobijamo

$$(3.16)\qquad f_2(x_2, x_3, x_1) = -f_1(x_1, x_2+x_3) + F_1(x_3, x_1+x_2),$$

gde je

$$F_1(x_1, x_2) = -f_3(x_1\, 0, x_2) - f_4(0, 0, x_1+x_2).$$

Za $x_5=x_2=0$ funkcionalna jednačina (3.14), na osnovu (3.16), postaje

$$(3.17)\qquad \begin{aligned} f_3(x_3, x_4, x_1) &= f_1(x_4+x_1, x_3) - f_1(x_1, x_3+x_4)\\ &\quad - F_1(x_3, x_4+x_1) + F_2(x_4, x_1+x_3),\end{aligned}$$

sa oznakom $F_2(x_1, x_2) = -f_4(x_1, 0, x_2)$.

Stavljajući $x_2=x_3=0$ u (3.14), na osnovu (3.16) i (3.17), dobijamo

$$(3.18)\qquad f_4(x_4, x_5, x_1) = f_1(x_5+x_1, x_4) - f_1(x_1, x_4+x_5) - F_2(x_4, x_5+x_1).$$

Iz jednakosti (3.16), (3.17), (3,18) sleduje (3.15).

Zamenjujući funkcije f_i $(i=2, 3, 4)$, određene sa (3.15), tj. sa (3.16), (3.17), (3.18) u (3.14), dobijamo jednačinu

$$f_1(x_1, x_2+x_3+x_4+x_5)-f_1(x_4+x_5+x_1, x_2+x_3)+f_1(x_4+x_5+x_1+x_2, x_3)$$
$$-f_1(x_5+x_1+x_2, x_3+x_4)-f_1(x_1+x_2+x_3, x_4+x_5)+f_1(x_5+x_1+x_2+x_3, x_4)=0.$$

Za $x_5=0$ ova jednačina postaje upravo jednačina (3.2).

Ovim je teorema dokazana.

Sada ćemo odrediti opšte rešenje funkcionalne jednačine (3.1) za slučaj $n>5$.

Teorema 3. *Opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* (3.1) *za* $n \geqslant 5$ *je*

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2, x_3) &= -f_1(x_3, x_1+x_2)+F_1(x_2, x_3+x_1), \\ f_k(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_2+x_3, x_1)-f_1(x_3, x_1+x_2)-F_{k-2}(x_1, x_2+x_3) \\ &\quad + F_{k-1}(x_2, x_3+x_1) \qquad (k=3, 4, \dots, n-2), \\ f_{n-1}(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_2+x_3, x_1)-f_1(x_3, x_1+x_2)-F_{n-3}(x_1, x_2+x_3), \end{aligned} \tag{3.19}$$

gde su F_i $(i=1, 2, \dots, n-3)$ *proizvoljne kompleksne funkcije kompleksnih promenljivih, a neprekidna funkcija* f_1 *zadovoljava funkcionalnu jednačinu* (3.2).

Dokaz. Za $n=5$ teorema je tačna na osnovu teoreme 2. Pretpostavimo sada da je teorema tačna za neko fiksirano $n(\geqslant 5)$. Tada jednačina (3.1), za $n+1$, ima oblik

$$f_1\left(x_1 \sum_{j=2}^{n+1} x_j\right)+\sum_{i=2}^{n} f_i\left(x_i, x_{i+1}, \sum_{j=i+2}^{n+i} x_j\right)=0. \tag{3.20}$$

Ako u (3.20) stavimo $x_{n+1}=0$, zaključujemo da jednačina (3.20) ima oblik

$$f_1\left(x_1, \sum_{j=2}^{n} x_j\right)+\sum_{i=2}^{n-2} f_i\left(x_i, x_{i+1}, \sum_{j=i+2}^{n+k-2} x_j\right)+g_{n-1}\left(x_{n-1}, x_n, \sum_{j=1}^{n-2} x_j\right)=0, \tag{3.21}$$

gde je

$$g_{n-1}(x_1, x_2, x_3)=f_{n-1}(x_1, x_2, x_3)+f_n(x_2, 0, x_3+x_1). \tag{3.22}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke, opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine (3.21) dato je sa (3.19), gde umesto f_{n-1} treba staviti g_{n-1}.

Ako uvedemo novu funkciju

$$F_{n-2}(x_1, x_2)=-f_n(x_1, 0, x_2),$$

na osnovu rešenja (3.19) i jednakosti (3.22), dolazimo do zaključka da f_{n-1} ima oblik

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_2+x_3, x_1)-f_1(x_3, x_1+x_2) \\ &\quad -F_{n-3}(x_1, x_2+x_3)+F_{n-2}(x_2, x_3+x_1). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Zamenjujući (3.23) i funkcije f_i $(i=1, 2, \ldots, n-2)$, određene jednakostima (3.19), u jednačini (3.20), na osnovu pretpostavke da neprekidna funkcija f_1 zadovoljava jednačinu (3.2), dobijamo

$$f_n(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_2+x_3, x_1) - f_1(x_3, x_1+x_2) - F_{n-2}(x_1, x_2+x_3),$$

čime je teorema dokazana.

Ako u (3.1) stavimo $f_1=f$, $f_2=f_3=\cdots=f_{n-1}=g$, funkcionalna jednačina (3.1) postaje

$$f\left(x_1, \sum_{j=2}^{n} x_j\right) + \sum_{i=2}^{n-1} g\left(x_i, x_{i+1}, \sum_{j=i+2}^{n+i-1} x_j\right) = 0 \qquad (n \geqslant 4). \tag{3.24}$$

Za jednačinu (3.24) dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 4. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.24) *određeno je sa*

$$f(x_1, x_2) = F)x_1 + x_2),$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{n-2} F(x_1+x_2+x_3),$$

gde je F proizvoljna funkcija sa vrednostima u C.

Dokaz. Ako u (3.24) izvršimo substituciju $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \cdots n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 \quad\; n & 2 \end{pmatrix}$, dobijamo jednačinu

$$f\left(x_1, \sum_{j=2}^{n} x_j\right) + \sum_{i=3}^{n-1} g\left(x_i, x_{i+1}, \sum_{j=i+2}^{n+i-1} x_j\right) + g\left(x_n, x_2, x_1 + \sum_{j=3}^{n-1} x_j\right) = 0. \tag{3.25}$$

Iz jednačina (3.24) i (3.25) sleduje da funkcija g zadovoljava jednačinu

$$g\left(x_2, x_3, x_1 + \sum_{j=4}^{n} x_j\right) - g\left(x_n, x_2, x_1 + \sum_{j=3}^{n-1} x_j\right) = 0,$$

ili, za $i=2, 3, \ldots, n-1$,

$$g\left(x_i, x_{i+1}, \sum_{j=1}^{i-1} x_j + \sum_{j=i+2}^{n} x_j\right) = g\left(x_2, x_3, x_1 + \sum_{j=4}^{n} x_j\right). \tag{3.26}$$

Na osnovu (3.26), funkcionalna jednačina (3.24) postaje

$$f\left(x_1, \sum_{j=2}^{n} x_j\right) + (n-2)\, g\left(x_2, x_3, x_1 + \sum_{j=4}^{n} x_j\right) = 0. \tag{3.27}$$

Ako u (3.27) stavimo $x_2=x_3=0$ i $x_4+x_5+\cdots+x_n=s$, dobijamo

$$f(x_1, s) = F(x_1+s), \tag{3.28}$$

gde smo stavili $F(x, y) = -(n-2)\, g(0, 0, x+y)$.

Na osnovu (3.28), iz (3.27) sleduje

$$g(x_2, x_3, x_1) = -\frac{1}{n-2} F(x_1+x_2+x_3).$$

Teorema je ovim dokazana.

4. NEKI SISTEMI LINEARNIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

4.1. SISTEMI PRVE VRSTE

4.1.1. Neke uvodne napomene

U ovoj glavi pretpostavićemo da:

1° S predstavlja neprazan skup;

2° Promenljive $x_i\,(i=1, 2, \ldots, 6)$ pripadaju skupu S, tj. $x_i \in S$;

3° M predstavlja aditivnu Abelovu grupu;

4° Funkcije $f_i\,(i=0, 1, 2)$ i $g_j\,(j=1, 2)$ vrše preslikavanja

$$f_i: S^{i+2} \to M \quad \text{i} \quad g_j: S^{j+2} \to M.$$

Posmatraćemo sledeće sisteme jednačina:

Sistem E_1:

(4.1) $$f_0(x_1, x_2) + f_1\, x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3, x_4) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0,$$

(4.2) $$f_0(x_1, x_2) + f_1(x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3, x_4) + g_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + f_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0;$$

Sistem E_2:

(4.3) $$f_0(x_1, x_2) + f_1(x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3, x_4) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0,$$

(4.4) $$f_0(x_1, x_2) + g_1(x_2, x_3, x_4) + f_1(x_1, x_3, x_4) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0;$$

Sistem E_3:

(4.5) $$f_0(x_1, x_2) + f_1(x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3, x_4) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0,$$

(4.6) $$f_0(x_1, x_2) + g_1(x_2, x_3, x_4) + f_1(x_1, x_3, x_4) + g_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + f_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0;$$

Sistem E_4:

(4.7) $$f_0(x_1, x_2)+f_1(x_2, x_3, x_4)+g_1(x_1, x_3, x_4)+f_2(x_3, x_4, x_5, x_6)+g_2(x_1, x_3, x_5, x_6)=0,$$

(4.8) $$f_0(x_1, x_2)+f_1(x_2, x_3, x_4)+g_1(x_1, x_3, x_4)+g_2(x_3, x_4, x_5, x_6)+f_2(x_1, x_3, x_5, x_6)=0,$$

(4.9) $$f_0(x_1, x_2)+g_1(x_2, x_3, x_4)+f_1(x_1, x_3, x_4)+f_2(x_3, x_4, x_5, x_6)+g_2(x_1, x_3, x_5, x_6)=0.$$

4.1.2. Sistem funkcionalnih jednačina E_1

Za sistem funkcionalnih jednačina E_1 dokazaćemo sledeći rezultat.

Teorema 1. *Opšte rešenje sistema funkcionalnih jednačina E_1 određeno je sa*

(4.10) $$\begin{aligned} f_0(x_1, x_2)&=F_1(x_1)-F_2(x_2),\\ f_1(x_1, x_2, x_3)&=F_2(x_1)+G_1(x_2, x_3),\\ g_1(x_1, x_2, x_3)&=-F_1(x_1)+G_2(x_1, x_3)-G_1(x_2, x_3)+G_2(x_2, x_3)+\alpha,\\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)&=-G_2(x_1, x_2)+G_3(x_3, x_4),\\ g_2(x_1, x_2, x_3, x_4)&=-G_2(x_1, x_2)-G_3(x_3, x_4)-\alpha, \end{aligned}$$

gde su F_1, F_2, G_i $(i=1, 2, 3)$ proizvoljne funkcije sa vrednostima u M, a α proizvoljna konstanta iz M.

Dokaz. Ako u (4.1) stavimo $x_i=x_i^0$ $(i=3, 4, 5, 6)$, dobijamo

(4.11) $$f_0(x_1, x_2)=F_1(x_1)-F_2(x_2),$$

gde smo uveli oznake

$$F_1(x_1)=-g_1(x_1, x_3^0, x_4^0)-g_2(x_1, x_3^0, x_5^0, x_6^0),$$

$$F_2(x_2)=f_1(x_2, x_3^0, x_4^0)+f_2(x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0).$$

Na osnovu (4.11), stavljajući u (4.1) $x_i=x_i^0$ $(i=1, 5, 6)$, iz jednačine (4.1) dobijamo

(4.12) $$f_1(x_2, x_3, x_4)=F_2(x_2)+G_1(x_3, x_4),$$

gde je

$$G_1(x_3, x_4)=-F_1(x_1^0)-g_1(x_1^0, x_3, x_4)-f_2(x_3, x_4, x_5^0, x_6^0)-g_2(x_1^0, x_3, x_5^0, x_6^0).$$

Ako u (4.1) stavimo $x_i=x_i^0$ $(i=2, 5, 6)$, imamo da je

(4.13) $$g_1(x_1, x_3, x_4)=-F_1(x_1)-G_1(x_3, x_4)+G_2'(x_3, x_4)-H(x_1, x_3),$$

gde su uvedene oznake

$$G_2'(x_3, x_4)=-f_2(x_3, x_4, x_5^0, x_6^0), \quad H(x_1, x_3)=g_2(x_1, x_3, x_5^0, x_6^0).$$

Zamenjujući (4.11), (4.12), (4.13) u (4.1) i (4.2) sistem E_1 postaje

(4.14) $$G_2'(x_3, x_4) - H(x_1, x_3) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0,$$

(4.15) $$G_2'(x_3, x_4) - H(x_1, x_3) + g_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + f_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0.$$

Ako u (4.15) stavimo $x_i = \overset{0}{x_i}$ $(i = 1, 3)$, a zatim izvršimo supstituciju $x_4 \to x_3$, i ako u (4.14) stavimo $x_1 = \overset{0}{x_1}$, jednačine (4.14) i (4.15) postaju

(4.16) $$G_2'(x_3, x_4) - H(\overset{0}{x_1}, x_3) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + g_2(\overset{0}{x_1}, x_3, x_5, x_6) = 0,$$

(4.17) $$G_2'(\overset{0}{x_1}, x_3) - H(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_1}) + g_2(\overset{0}{x_1}, x_3, x_5, x_6) + f_2(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_1}, x_5, x_6) = 0.$$

Oduzimanjem (4.17) od (4.16) dobijamo

(4.18) $$f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) = F_3(x_3) - G_2'(x_3, x_4) + G_3(x_5, x_6),$$

gde smo stavili

$$F_3(x_3) = G_2'(\overset{0}{x_1}, x_3) - H(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_1}) + H(\overset{0}{x_1}, x_3), \quad G_3(x_5, x_6) = f_2(\overset{0}{x_1}, \overset{0}{x_1}, x_5, x_6).$$

Iz (4.14), stavljajući $x_4 = \overset{0}{x_4}$, na osnovu (4.18), dobijamo

(4.19) $$g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = H(x_1, x_3) - F_3(x_3) - G_3(x_5, x_6).$$

Da bi funkcije f_2 i g_2, određene sa (4.18) i (4.19), zadovoljavale i jednačinu (4.15), mora biti

(4.20) $$G_2'(x_3, x_4) + H(x_3, x_4) - G_2'(x_1, x_3) - H(x_1, x_3) + F_3(x_1) - F_3(x_4) = 0.$$

Stavljajući u (4 20) da je $x_1 = \overset{0}{x_1}$, jednakost (4.20) postaje

(4.21) $$G_2'(x_3, x_4) + H(x_3, x_4) = F_3(x_4) - F_4(x_3),$$

gde smo stavili

$$F_4(x_3) = G_2'(\overset{0}{x_1}, x_3) - F_3(\overset{0}{x_1}) + H(\overset{0}{x_1}, x_3).$$

Na osnovu (4.21), jednačina (4.20) postaje

$$F_3(x_1) + F_4(x_1) = F_3(x_3) + F_4(x_3),$$

odakle stavljajući da je $x_1 = \overset{0}{x_1}$, sleduje

$$F_4(x_3) = -F_3(x_3) + \alpha,$$

gde je $\alpha = F_3(\overset{0}{x_1}) + F_4(\overset{0}{x_1})$.

Na osnovu ovoga, jednakost (4.21) ima oblik

(4.23) $$H(x_3, x_4) = -G_2(x_3, x_4) + F_3(x_4) - \alpha,$$

gde je uvedena nova funkcija

(4.23) $$G_2(x_3, x_4) = G_2'(x_3, x_4) - F_3(x_3).$$

Na osnovu (4.23), (4.22), (4.19), (4.18), (4.13), (4.12), (4.11), dobijamo (4.10).

Ovim je teorema dokazana.

4.1.3. Sistem funkcionalnih jednačina E_2

Za sistem funkcionalnih jednačina E_2 važi sledeći rezultat.

Teorema 2. *Opšte rešenje sistema* E_2 *određeno je sa*

$$
\begin{aligned}
f_0(x_1, x_2) &= F_1(x_1) - F_2(x_2),\\
f_1(x_1, x_2, x_3) &= F_2(x_1) + F_3(x_2) + G_2(x_2, x_3),\\
g_1(x_1, x_2, x_3) &= F_2(x_1) - G_1(x_2, x_3) - G_2(x_2, x_3),\\
f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= G_1(x_1, x_2) - H(x_1, x_3, x_4),\\
g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -F_1(x_1) - F_2(x_1) - F_3(x_2) + H(x_2, x_3, x_4),
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

ge su $F_i\,(i=1, 2, 3)$, $G_j\,(j=1, 2)$, H *proizvoljne funkcije sa vrednostima u* M.

Dokaz. Ako u (4.3) stavimo da je $x_i = \overset{0}{x}_i$ $(i=3, 4, 5, 6)$, dobijamo

$$f_0(x_1, x_2) = F_1(x_1) - F_2(x_2), \tag{4.25}$$

gde smo uveli oznake

$$F_1(x_1) = -g_1(x_1, \overset{0}{x}_3, \overset{0}{x}_4) - g_2(x_1, \overset{0}{x}_3, \overset{0}{x}_5, \overset{0}{x}_6),$$

$$F_2(x_2) = f_1(x_2, \overset{0}{x}_3, \overset{0}{x}_4) + f_2(\overset{0}{x}_3, \overset{0}{x}_4, \overset{0}{x}_5, \overset{0}{x}_6).$$

Stavljajući u (4.3) $x_i = \overset{0}{x}_i$ $(i=2, 4)$, na osnovu (4.25), dobijamo

$$g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = -F_1(x_1) - G(x_1, x_3) + H(x_3, x_5, x_6), \tag{4.26}$$

gde je

$$H(x_3, x_5, x_6) = -f_1(\overset{0}{x}_2, x_3, \overset{0}{x}_4) - f_2(x_3, \overset{0}{x}_4, x_5, x_6) + F_2(\overset{0}{x}_2),$$

$$G(x_1, x_3) = -g_1(x_1, x_3, \overset{0}{x}_4).$$

Na osnovu (4.25) i (4.26), stavljajući u (4.3) da je $x_i = \overset{0}{x}_i\,(i=1, 2)$, imamo

$$f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) = -H(x_3, x_5, x_6) + G_1(x_3, x_4), \tag{4.27}$$

gde smo stavili

$$G_1(x_3, x_4) = -f_1(\overset{0}{x}_2, x_3, x_4) - g_1(\overset{0}{x}_1, x_3, x_4) + G(\overset{0}{x}_1, x_3) + F_2(\overset{0}{x}_2).$$

Na osnovu (4.25), (4.26), (4.27), sistem E_2 postaje

$$f_1(x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3, x_4) - F_2(x_2) - G(x_1, x_3) + G_1(x_3, x_4) = 0, \tag{4.28}$$

$$g_1(x_2, x_3, x_4) + f_1(x_1, x_3, x_4) - F_2(x_2) - G(x_1, x_3) + G_1(x_3, x_4) = 0. \tag{4.29}$$

Ako u (4.28) stavimo $x_2 = \overset{0}{x}_2$, a u (4.29) izvršimo supstituciju $x_1 \leftrightarrow x_2$ i tada od jednačine (4.29) oduzmemo jednačinu (4.28), dobijamo

$$f_1(x_2, x_3, x_4) = F_2(x_1) + G(x_2, x_3) - G(x_1, x_3) + f_1(\overset{0}{x}_2, x_3, x_4) - F_2(\overset{0}{x}_2),$$

ili, ako stavimo $x_1 = \overset{0}{x}_2$,

$$f_1(x_2, x_3, x_4) = G(x_2, x_3) + G_2(x_3, x_4), \tag{4.30}$$

gde je

$$G_2(x_3, x_4) = f_1(\overset{0}{x}_2, x_3, x_4) - G(\overset{0}{x}_2, x_3).$$

Na osnovu (4.30), iz jednačine (4.29) sleduje

(4.31) $$g_1(x_2, x_3, x_4) = F_2(x_2) - G_1(x_3, x_4) - G_2(x_3, x_4).$$

Da bi funkcije f_1 i g_1, određene sa (4.30) i (4.31), zadovoljavale i jednačinu (4.28), mora biti

$$G(x_2, x_3) - G(x_1, x_3) + F_2(x_1) - F_2(x_2) = 0,$$

odakle, za $x_1 = x_1^0$, dobijamo

(4.32) $$G(x_2, x_3) = F_2(x_2) + F_3(x_3),$$

gde je $F_3(x_3) = G(x_1^0, x_3) - F_2(x_1^0)$.

Prema tome, na osnovu jednakosti (4.32), (4.31), (4.30), (4.27), (4.26), (4.25), dobijamo (4.24).

Dokaz teoreme 2 je ovim završen.

4.1.4. Sistem funkcionalnih jednačina E_3

Za sistem funkcionalnih jednačina E_3 dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 3. *Opšte rešenje sistema funkcionalnih jednačina E_3 određeno je jednakostima*

(4.33) $$\begin{aligned} f_0(x_1, x_2) &= F_1(x_1) - F_2(x_2), \\ f_1(x_1, x_2, x_3) &= F_2(x_1) + G_1(x_2, x_3), \\ g_1(x_1, x_2, x_3) &= F_2(x_1) + F(x_2) + F_3(x_3) - G_1(x_2, x_3) - \alpha, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= F_3(x_1) - F(x_1) - F_3(x_2) + G_2(x_3, x_4) + \alpha, \\ g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= F_3(x_1) - F(x_1) - F_3(x_2) - G_2(x_3, x_4), \end{aligned}$$

gde su F_i $(i = 1, 2, 3)$, G_j $(j = 1, 2)$ proizvoljne funkcije sa vrednostima u M, $F = F_1 + F_2 + F_3$, i α proizvoljna konstanta iz M.

Dokaz. Iz jednačine (4.5), stavljajući $x_i = x_i^0$ $(i = 3, 4, 5, 6)$, dobijamo

(4.34) $$f_0(x_1, x_2) = F_1(x_1) - F_2(x_2),$$

gde je

$$F_1(x_1) = -g_1(x_1, x_3^0, x_4^0) - g_2(x_1, x_3^0, x_5^0, x_6^0),$$

$$F_2(x_2) = f_1(x_2, x_3^0, x_4^0) + f_2(x_3^0, x_4^0, x_5^0, x_6^0).$$

Ako u (4.5) stavimo $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 5, 6)$, na osnovu (4.34) imamo

(4.35) $$f_2(x_2, x_3, x_4) = F_2(x_2) + G_1(x_3, x_4),$$

gde je

$$G_1(x_3, x_4) = -F_1(x_1^0) - g_1(x_1^0, x_3, x_4) - f_2(x_3, x_4, x_5^0, x_6^0) - g_2(x_1^0, x_3, x_5^0, x_6^0).$$

Stavljajući u (4.6) $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 5, 6)$, na osnovu (4.34) i (4.35), dobijamo

(4.36) $$g_1(x_2, x_3, x_4) = F_2(x_2) + G(x_3, x_4),$$

gde smo stavili

$$G(x_3, x_4) = -F_1(x_1^0) - f_1(x_1^0, x_3, x_4) - g_2(x_3, x_4, x_5^0, x_6^0) - f_2(x_1^0, x_3, x_5^0, x_6^0).$$

Na osnovu (4.34), (4.35), (4.36), sistem E_3 postaje

$$F_1(x_1) + F_2(x_1) + G_1(x_3, x_4) + G(x_3, x_4) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + g_1(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0, \tag{4.37}$$

$$F_1(x_1) + F_2(x_1) + G_1(x_3, x_4) + G(x_3, x_4) + g_2(x_3, x_4, x_5, x_6) + f_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0. \tag{4.38}$$

Stavimo u jednačinu (4.38) $x_i = x_i^0$ $(i = 1, 2, 3)$, a zatim izvršimo supstituciju $x_4 \to x_3$. U (4.37) stavimo $x_1 = x_1^0$. Oduzimanjem tako dobijenih jednačina imamo

$$f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) = F_3(x_3) - G_1(x_3, x_4) - G_2(x_5, x_6) - G(x_3, x_4), \tag{4.39}$$

gde smo uveli oznake

$$F_3(x_3) = G_1(x_1^0, x_3) + G(x_1^0, x_3),$$

$$G_2(x_5, x_6) = f_2(x_1^0, x_1^0, x_5, x_6).$$

Iz jednačine (4.37), na osnovu (4.3.9), dobijamo

$$g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = -F_1(x_1) - F_2(x_1) - F_3(x_3) - G_2(x_5, x_6). \tag{4.40}$$

Da bi funkcije f_2 i g_2, određene jednakostima (4.39) i (4.40) zadovoljavale i jednačinu (4.38), mora biti

$$F_1(x_1) + F_2(x_1) + F_3(x_1) - F_1(x_3) - F_2(x_3) - F_2(x_4) + G_1(x_3, x_4) + G(x_3, x_4) - G_1(x_1, x_3) - G(x_1, x_3) = 0. \tag{4.41}$$

Ako stavimo $x_1 = x_1^0$, jednačina (4.41) postaje

$$G_1(x_3, x_4) + G(x_3, x_4) = F_1(x_3) + F_2(x_3) + F_3(x_3) + F_3(x_4) - \alpha, \tag{4.42}$$

jer je

$$G_1(x_1^0, x_3) + G(x_1^0, x_3) = F(x_3),$$

i gde smo stavili $\alpha = F_1(x_1^0) + F_2(x_1^0) + F_3(x_1^0)$.

Na osnovu (4.42), jednakosti (4.36) i (4.39) respektivno dobijaju oblike

$$g_1(x_2, x_3, x_4) = F_2(x_2) + F(x_3) + F_3(x_4) - G_1(x_3, x_4) - \alpha, \tag{4.43}$$

$$f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) = F_3(x_3) - F(x_3) - F_3(x_4) + G_2(x_5, x_6) + \alpha, \tag{4.44}$$

gde smo, jednostavnijeg pisanja radi, uveli novu funkciju

$$F(x_3) = F_1(x_3) + F_2(x_3) + F_3(x_3). \tag{4.45}$$

Na osnovu jednakosti (4.45), (4.44), (4.43), (4.40), (4.35), (4.34), dobijamo jednakosti (4,33).

Ovim je teorema 3 dokazana.

4.1.5. Sistem funkcionalnih jednačina E_4

Za sistem funkcionalnih jednačina E_4 važi sledeća teorema.

Teorema 4. *Opšte rešenje sistema funkcionalnih jednačina E_4 određeno je jednakostima*

$$
\begin{aligned}
f_0(x_1, x_2) &= F_1(x_1) - F_2(x_2), \\
f_1(x_1, x_2, x_3) &= F_2(x_1) + G_1(x_2, x_3), \\
g_1(x_1, x_2, x_3) &= F_2(x_1) + F_1(x_2) + F_2(x_2) - G_1(x_2, x_3) + \gamma, \\
f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -F_1(x_1) - F_2(x_1) + G(x_3, x_4) \\
g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= = F_1(x_1) - F_2(x_1) - G(x_3, x_4) - \gamma,
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

gde su F_1, F_2, G, G_1 proizvoljne funkcije sa vrednostima u M, i γ proizvoljna konstanta iz M.

Dokaz. Jednačine (4.7) i (4.8) čine sistem funkcionalnih jednačina E_1. Prema tome, funkcije određene jednačinama (4.10) zadovoljavaju jednačine (4.7) i (4.8). Da bi funkcije (4.1) zadovoljavale i jednačinu (4.9) mora biti

$$F_1(x_1) + F_2(x_1) - F_1(x_2) - F_2(x_2) - G_2(x_1, x_3) + G_2(x_2, x_4) = 0. \tag{4.47}$$

Stavljajući u (4,47) $x_i = x_i^0$ $(i = 2, 4)$, jednačina (4.47) postaje

$$G_2(x_1, x_3) = F_1(x_1) + F_2(x_1) + \beta, \tag{4.48}$$

gde smo stavili $\beta = G_2(x_2^0, x_4^0) - F_1(x_2^0) - F_2(x_2^0)$.

Ako uvedemo novu funkciju G pomoću jednakosti

$$G(x_1, x_2) = G_3(x_1, x_2) + \beta$$

i označimo $\gamma = \alpha - 2\beta$, iz (4.48) i (4.10) sleduje (4.46).

Teorema 4 je ovim dokazana.

4.2. SISTEMI DRUGE VRSTE

4.2.1. Pretpostavke i oznake

U ovom paragrafu odredićemo opšta rešenja nekih sistema funkcionalnih jednačina kod kojih jednačine sistema ne sadrže jednak broj nepoznatih funkcija.

Prethodno ćemo pretpostaviti da:

1° S predstavlja neprazan skup;

2° Promenljive x_i $(i = 1, 2, \ldots, 2n+2)$ pripadaju skupu S;

3° M predstavlja aditivnu Abelovu grupu;

4° Jednačina $2x = a$ $(x, a \in M)$ ima jedinstveno rešenje $x = a/2$;

5° Funkcije f_i i g_j vrše preslikanja

$$f_i : S^{i+2} \to M \qquad (i = 0, 1, \ldots, m) \quad \text{i} \quad g_j : S^{j+2} \to M \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Kao i u paragrafu 2.1.2. koristićemo oznake:

$$Q_p^q X = (x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{q-1}, x_q) \qquad (p,\ q \text{ prirodni brojevi});$$

$$\begin{aligned} R_p^q X &= (x_p, x_{p+2}, \ldots, x_{q-2}, x_q) && (p,\ q \text{ neparni}),\\ &= (x_p, x_{p+2}, \ldots, x_{q-3}, x_{q-1}) && (p \text{ neparno},\ q \text{ parno}),\\ &= (x_{p+1}, x_{p+3}, \ldots, x_{q-2}, x_q) && (p \text{ parno},\ q \text{ neparno}),\\ &= (x_{p+1}, x_{p+3}, \ldots, x_{q-3}, x_{q-1}) && (p,\ q \text{ parni}), \end{aligned}$$

gde su p i q $(p<q)$ prirodni brojevi.

Odredićemo opšta rešenja sledećih sistema funkcionalnih jednačina:

Sistem E_5:

(4.1) $$f_0(x_1, x_2) + f_1(x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3, x_4) = 0,$$

(4.2) $$f_0(x_1, x_2) + g_1(x_2, x_3, x_4) + f_1(x_1, x_3, x_4) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) = 0;$$

Sistem E_6:

$$f_0(x_1, x_2) + f_1(x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3, x_4) = 0,$$

$$f_0(x_1, x_2) + g_1(x_2, x_3, x_4) + f_1(x_1, x_3, x_4) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) = 0,$$

$$\begin{aligned} f_0(x_1, x_2) + f_1(x_2, x_3, x_4) + g_1(x_1, x_3, x_4) &+ f_2(x_3, x_4, x_5, x_6)\\ &+ g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) = 0, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f_0(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{k-1} g_i(Q_{i+1}^{2i+2} X) + \sum_{i=1}^{k-1} f_i(R_1^{2i+2} X, x_{2i+2}) + f_k(Q_{k+1}^{2k+2} X) = 0,$$

$$f_0(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{k} f_i(Q_{i+1}^{2i+2} X) + \sum_{i=1}^{k} g_i(R_1^{2i+2} X, x_{2i+2}) = 0,$$

$$\vdots$$

$$f_0(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{m-1} g_i(Q_{i+1}^{2i+2} X) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i(R_1^{2i+2} X, x_{2i+2}) + f_m(Q_{m+1}^{2m+2} X) = 0,$$

$$f_0(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^{m} f_i(Q_{i+1}^{2i+2} X) + \sum_{i=1}^{m} g_i(R_1^{2i+2} X, x_{2i+2}) = 0.$$

4.2.2. Sistem funkcionalnih jednačina E_5

Za sistem funkcionalnih jednačina E_5 važi sledeća teorema.

Teorema 5. *Opšte rešenje sistema funkcionalnih jednačina E_5 određeno je jednakostima:*

$$
(4.3) \quad
\begin{aligned}
f_0(x_1, x_2) &= -F(x_1) - F(x_2),\\
f_1(x_3, x_2, x_3) &= F(x_1) - G(x_2, x_3),\\
g_1(x_1, x_2, x_3) &= F(x_1) + G(x_2, x_3),\\
f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0,
\end{aligned}
$$

gde su F i G proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

Dokaz. Opšte rešenje funkcionalne jednačine (4.19) odredio je D. S. Mitrinović (videti [14]). Ono glasi

$$
(4.4) \quad
\begin{aligned}
f_0(x_1, x_2) &= H_1(x_1) - F_1(x_2),\\
f_1(x_1, x_2, x_3) &= F_1(x_1) - G_1(x_2, x_3),\\
g_1(x_1, x_2, x_3) &= -H_1(x_1) + G_1(x_2, x_3),
\end{aligned}
$$

gde su F_1, H_1, G_1 proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

Da bi funkcije f_0, f_1, g_1, određene jednačinama (4.4), zadovoljavale i jednačinu (4.2) mora biti

$$
(4.5) \quad F_1(x_1) + H_1(x_1) - F_1(x_2) - H_1(x_2) + f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) = 0.
$$

Stavljajući u (4.5) da je $x_1 = x_2$, dobijamo

$$
(4.6) \quad f_2(x_3, x_4, x_5, x_6) = 0,
$$

a zatim

$$
(4.7) \quad F_1(x_1) + H_1(x_1) = F_1(x_2) + H_1(x_2) = 2\alpha,
$$

gde je α konstanta iz M.

Uvodeći nove funkcije F i G pomoću jednakosti

$$
\begin{aligned}
F(x_1) &= F_1(x_1) - \alpha,\\
G(x_1, x_2) &= G_1(x_1, x_2) - \alpha,
\end{aligned}
$$

na osnovu jednakosti (4.7), (4.6), (4.4), dobijamo (4.3), čime je teorema dokazana.

4.2.3. Sistem funkcionalnih jednačina E_6

Sistem funkcionalnih jednačina E_6 ima opšte rešenje određeno sledećom teoremom.

Teorema 6. *Opšte rešenje sistema funkcionalnih jednačina E_6 dato je sa*

$$
\begin{aligned}
f_0(x_1, x_2) &= -F(x_1) - F(x_2),\\
f_1(x_1, x_2, x_3) &= F(x_1) - G(x_2, x_3),\\
g_1(x_1, x_2, x_3) &= F(x_1) + G(x_2, x_3),\\
f_i = g_i &= 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, m),
\end{aligned}
$$

gde su F i G proizvoljne funkcije sa vrednostima u M.

Dokaz. Dokaz neposredno sleduje iz teoreme 5.

5. OTVORENA PITANJA I MOGUĆNOSTI GENERALIZACIJA

5.1. OTVORENA PITANJA

5.1.1. Jednačina (3.7) iz poglavlja 3.1., tj. jednačina

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j}, \ \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}, \ \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} x_{i+m+k+j}\right)=0,$$

rešena je za slučaj $a=1$ i $a^{m+n+k}\neq 1$. Za $a^{m+n+k}=1$ nije dobijeno rešenje ove jednačine.

5.1.2. Isto tako, za jednačinu (3.8) iz poglavlja 3.1., tj. za jednačinu

$$\sum_{i=1}^{m+n+k} f_i\left(\sum_{j=0}^{m-1} a^{m-1-j} x_{i+j}, \ \sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} x_{i+m+j}, \ \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-1-j} x_{i+m+n+j}\right)=0,$$

određeno je rešenje samo u slučaju $a^{m+n+k}\neq 1$. Prema tome, ostaje otvoreno pitanje rešenja ove jednačine u ostalim slučajevima.

5.2. MOGUĆNOSTI GENERALIZACIJA

5.2.1. Jedna prirodna generalizacija jednačina (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) iz poglavlja 3.1 su redom jednačine (3.1), (3.2) (3.3) (3.4) gde su a_i proizvoljni kompleksni brojevi.

Bilo bi interesantno odrediti rešenja ovih jednačina.

5.2.2. Jednačine u odeljku 3. posmatrane su u kompleksnom području. Svakako je mogućno odrediti rešenja tih funkcionalnih jednačina u slučaju kada i promenljive i vrednosti funkcija pripadaju apstraktnim vektorskim prostorima.

6. BIBLIOGRAFIJA

[1] J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, New York 1966.

[2] J. Aczél — M. Ghermănescu — M. Hosszú, *On cyclic equations*, Publications of the Hungarian Academy of Sciences, series A, **5** (1960), 215—221.

[3] P. M. Vasić — R. Ž. Đorđević, *Sur l'équation fonctionnelle cyclique généralisée*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Serija: Matematika i fizika, № 132 — № 141 (1965), 33—38.

[4] M. Ghermănescu, *Sur quelques équations fonctionnelles linéaires*, Bulletin de la Société mathématique de France, 68 (1940), 109—128.

[5] M. Ghermănescu, *Ecuaţii funcţionale*, Bucureşti 1960.

[6] D. Ž. Đoković, *Rešenje jedne ciklične funkcionalne jednačine*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. Serbie, **13** (1961), 185—198.

[7] D. Ž. Đoković, *O nekim klasama cikličnih funkcionalnih jednačina*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Serija: Matematika i fizika, № 114 (1963).

[8] D. Ž. Đoković, *A special cyclic functional equations*, Ibidem, № 143 — № 155 (1965), 45—50.

[9] D. Ž. Đoković — R. Ž. Đorđević — P. M. Vasić, *On a class of functional equations*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, **6** (20) (1966), 65—76.

[10] R. Ž. Đorđević, *Solution d'une équation fonctionnelle à plusieurs fonctions inconnues*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Serija: Matematika i fizika, № 132 — № 142 (1965), 51—53.

[11] R. Ž. Đorđević, *Solution d'un système d'équations fonctionnelles linéaires*, Ibidem, № 143 — № 155 (1965), 61—62.

[12] R. Ž. Đorđević, *Sur une équation fonctionnelle linéaire*, Ibidem, № 159 — № 170 (1966), 35—39.

[13] J. K. Jong, *A class of linear functional equation*, Ibidem, № 143 — № 155 (1965), 39—44.

[14] M. Kuczma, *A Survey of the Theory of Functional Equations*, Ibidem, № 139 (1964).

[15] D. S. Mitrinović, *Équation fonctionnelle à fonctions inconnues dont toutes ne dépendent pas du même nombre d'arguments*, Ibidem, № 115 — № 121 (1963), 29—30.

[16] D. S. Mitrinović, *Équation fonctionnelle cyclique généralisée*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, **4** (18) (1964), 29—41.

[17] D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković, *Neki nerešeni problemi u teoriji funkcionalnih jednačina*, Matematička biblioteka, sv. 25, Beograd 1963, 153—168.

[18] D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković, *Ciklične funkcionalne jednačine*, Matematička biblioteka, sv. 22, Beograd 1962, 5—23.

[19] И. Е. Овчаренко, *О трех типах выпуклости*, Учение записки Харьковского Университета, (1964), 138.

[20] S. Prešić — D. Ž. Đoković, *Sur une équation fonctionnelle*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, **13** (1961), 149—152.

[21] R. Sato, *A Study of Functional Equations*, Proceedings of the Physical-Mathematical Society of Japan, (3) **10** (1928), 212—222.

[22] M. Hosszú, *A lineáris fuggvényegyenletek egy osztályáról*, A Magyar Tudományos Akadémia matematikai és fizikai tudományok osztályának Kozlemenyei, t. **11**, 249—261.

Résumé

SUR CERTAINES CLASSES GÉNÉRALISÉES D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES

Radosav Ž. Đorđević

1.1. Ce travail qui représente la thèse de doctorat contient six parties:

1. Introduction,
2. Certaines équations fonctionnelles linéaires,
3. Certaines équations fonctionnelles liées à l'équation de Cauchy,
4. Certains systèmes d'équations fonctionnelles linéaires,
5. Questions ouvertes et possibilités de généralisations,
6. Bibliographie.

1.2. La deuxième partie contient la généralisation d'un résultat du prof. D. S. Mitrinović concernant l'équation

$$f_1(x_1, x_2)+f_2(x_2, x_3, x_4)+f_3(x_1, x_3, x_4)=0,$$

où les fonctions inconnues f_i $(i=1, 2, 3)$ ne dépendent pas du même nombre d'arguments. On trouve la solution générale de l'équation fonctionnelle suivante

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2)+f_2(x_2, x_3, x_4)+\cdots+f_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n})+g_1(x_1, x_3, x_4) \\ +g_2(x_1, x_3, x_5, x_6)+\cdots+g_{n-1}(x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})=0. \end{aligned}$$

On a considéré aussi des équations fonctionnelles cycliques généralisées. J. Aczél, M. Ghermănescu et M. Hosszú ont résolu les équations fonctionnelles cycliques

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1})=0 \qquad (x_{i+n}=x_i;\ i=1, 2, \ldots, n-1), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1})=0 \qquad (p\leqslant n), \tag{1.2}$$

sous les conditions suivantes:

1° $x_i\in S$, S ensemble arbitraire,

2° $f: S\to M$, où M est un groupe abelien,

3° pour $x, a\in M$ et m $(\leqslant n)$ nombre naturel, l'équation $mx=a$ possède une solution unique.

Deux cas sont à distinguer: 1° $n\geqslant 2p-1$ (le cas facile) et 2° $p<n<2p-1$ (le cas difficile).

Dans le cas facile l'équation (1.2) a été résolue par D. Ž. Đoković sans l'hypothèse 3° (cf. [7]).

Pour l'équation fonctionnelle cyclique généralisée

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1})=0 \qquad (p\leqslant n) \tag{1.3}$$

il faut distinguer aussi le cas facile et le cas difficile.

Dans le cas facile, sous les hypothèses 1° et 2° (l'hypothèse 2° s'applique à toutes les fonctions f_i), l'équations (1.3) est complètement résolue (sf. [7]). Dans le cas difficile on n'avait pas des résultats analogues. Pour certaines valeurs particulières de p et n D. S. Mitrinović (cf. [6]) a trouvé dans le cas difficile les solutions de l'équation (1.3).

Ici, on donne la solution de l'équation (1.3) pour le cas difficile $p<n<2p-1$. On retrouve aussi la solution générale de (1.2) en ajoutant l'hypothèse 3°.

1.3. Dans la troisième partie on considère les équations fonctionnelles (3.5), (3.6), (3.7), (3.8).

Les solutions des équations (3.5) et (3.6) sont déterminées pour a nombre complexe arbitraire.

L'équation (3.7) est résolue dans le cas $a=1$ ou $a^{m+n+k}\neq 1$.

L'équation (3.8) est résolue dans le cas $a^{m+n+k}\neq 1$.

En connexion avec ces équations on prouve plusieurs théorèmes et on indique quelques applications de ces résultats dans la théorie des fonctions convexes.

L'idée pour de l'étude ces équations fonctionnelles contenant des paramètres a été sugérée par prof. D. S. Mitrinović. Cette idée s'est montrée très féconde dans les résultats obtenus.

Dans cette partie se trouve aussi la solution générale continue de l'équation fonctionnelle suivante

$$f_i\left(x_i,\ \sum_{j=2}^{n} x_j\right)+\sum_{i=2}^{n-1} f_i\left(x_i,\ x_{i+1},\ \sum_{j=i+2}^{n+i-1} x_j\right)=0 \qquad (n\geqslant 4).$$

Dans le cas $f_2=f_3=\cdots=f_{n-1}$ on a trouvé la solution générale.

1.4. On a traité certains systèmes d'équations fonctionnelles linéaires dans lesquelles les fonctions inconnues ne dépendent pas du même nombre d'arguments.

D'abord, on a considéré des systèmes dans lesquels chaque équation contient toutes les fonctions inconnues (des systèmes de première espèce).

Des systèmes de deuxième espèce sont des systèmes dans lesquels certaines équations ne contiennent pas toutes les fonctions inconnues. On a traité aussi des systèmes de deuxième espèce.

1.5. Cette partie contient l'exposition des problèmes ouverts. On a indiqué des généralisations possibles de résultas obtenus.

*

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaissance au professeur D. S. Mitrinović qui m'a initié aux travaux scientifiques, a dirigé la préparation de cette dissertation et a contribué à ce que les résultats exposés dans cette thèse obtiennent les formes définitives.

De même, je désire exprimer ma reconnaissance à P. M. Vasić pour l'aide généreuse qu'il m'a donnée au cours de mon travail à cette thèse.