PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 168 (1966)

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉE À PLUSIEURS VARIABLES*

Radovan R. Janić

Dans [1], [2] et [3] a été sommée la série suivante

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+k) J_n(x) J_{n+k}(x),$$

où $J_n(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce.

Dans cette note nous allons sommer la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+k) I_n(x_1, x_2, \dots, x_r) I_{n+k}(x_1, x_2, \dots, x_r),$$

où k est un nombre entier et $I_n(x_1, x_2, \dots, x_r)$ la fonction de Bessel modifiée de première espèce de r variables.

Désignons par S la somme de cette série. Alors, nous avons

$$S = 2P(k) + kQ(k), \tag{1}$$

avec

$$P(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} n I_n(x_1, x_2, \dots, x_r) I_{n+k}(x_1, x_2, \dots, x_r), \tag{2}$$

$$Q(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n(x_1, x_2, \dots, x_r) I_{n+k}(x_1, x_2, \dots, x_r). \tag{3}$$

En utilisant la formule (*voir*: [4])

$$2nI_n = \sum_{m=1}^{r} mx_m (I_{n-m} - I_{n+m}), \tag{4}$$

où $I_m \equiv I_m(x_1, x_2, \dots, x_r)$, la formule (2) devient

$$P(k) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{m=1}^{r} mx_m (I_{n-m} - I_{n+m}) I_{n+k} \right]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r} mx_m \left[\sum_{n=-m}^{+\infty} I_n I_{n+k+m} - \sum_{n=m}^{+\infty} I_n I_{n+k-m} \right]$$

---

* Présenté le 1 décembre 1965 par D. S. Mitrinović et P. M. Vasić.

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r} m x_m \left[\sum_{n=0}^{+\infty} I_n I_{n+k+m} - \sum_{n=0}^{+\infty} I_n I_{n+k-m} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r} m x_m \left(I_{-m} I_k + \cdots + I_{-1} I_{k+m-1} + I_0 I_{k-m} + \cdots + I_{m-1} I_{k-1} \right).$$

De là, au moyen des formules (3) et $I_{-s} = I_s$, on trouve

$$P(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r} m x_m \left(Q(k+m) - Q(k-m) \right) \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r} m x_m \left[\sum_{s=1}^{m} I_s \left(I_{k+(m-s)} + I_{k-(m-s)} \right) - I_m I_k + I_0 I_{k-m} \right].$$

En posant $n+k=m$ dans

$$P(k) + k Q(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k) I_n I_{n+k},$$

et en utilisant la formule (4), on obtient

$$P(k) + k Q(k) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r} m x_m \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \left(I_n I_{n+k-m} - I_n I_{n+k+m} \right) \right] \tag{6}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r} m x_m \left(Q(k-m) - Q(k+m) \right).$$

Si l'on ajoute, membre à membre des égalités (5) et (6), on parvient à

$$2P(k) + k Q(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+k) I_n I_{n+k} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{r} m x_m \left[\sum_{s=1}^{m} I_s \left(I_{k+(m-s)} + I_{k-(m-s)} \right) - I_m I_k + I_0 I_{k-m} \right].$$

Dans le cas $r=1$, de (7), on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+k) I_n(x) I_{n+k}(x) = \frac{1}{2} x \left(I_0(x) I_{k-1}(x) + I_1(x) I_k(x) \right). \tag{8}$$

En utilisant la formule $I_n(ix) = i^n J_n(x)$, la relation (8) donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (2n+k) J_n(x) J_{n+k}(x) = \frac{1}{2} x \left(J_0(x) J_{k-1}(x) - J_1(x) J_k(x) \right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. S. Stojanović, *Izračunavanje sume nekih beskonačnih redova obrazovanih od proizvoda Besselovih funkcija*, Ces Publications, № **51** (1961).

[2] D. Ž. Djoković, *Sur une formule relative aux fonctions de Bessel*, Ces Publications, № **52** (1961).

[3] D. S. Mitrinović — E. Hansen, *Summation of Products of Bessel Functions*, The American Mathematical Monthly, **71** (1964), 448—449.

[4] R. R. Janić, *O modifikovanim Besselovim funkcijama prve vrste celog indeksa od više argumenata*, Matematički vesnik, **1** (16), (1964), 193—201.