PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 167 (1966)

COMPLÉMENT À L'ARTICLE "SUR UNE INÉGALITÉ ÉLÉMENTAIRE OÙ INTERVIENNENT DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES"

D. S. Mitrinović et D. D. Adamović

0. Dans l'article [**1**], nous avons étudié la validité de l'inégalité

(1) $$(\cos x)^c < \frac{(\sin x)^a}{x^b} \qquad (a,\, b,\, c \text{ nombres réels})$$

pour $x \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Partant de la remarque que:

(R) *pour* $b \neq 0$ *l'inégalite* (1) *équivaut à*

$$f(x) = x - (\sin x)^p\,(\cos x)^q < 0 \quad \left(p = \frac{a}{b},\ q = -\frac{c}{b}\right)$$

ou à $f(x) > 0$ *suivant que l'on a* $b > 0$ *ou* $b < 0$, on y a établi une proposition sur le signe de $f(x)\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ dans tous les cas possibles (proposition 3 dans [**1**]). On a cependant omis, dans l'article [**1**], de formuler explicitement une proposition qui résumerait, d'une manière directe, la discussion complète de l'inégalité (1), c'est-à-dire la discussion complète du signe de la fonction

$$g(x) = (\cos x)^c - \frac{(\sin x)^a}{x^b} \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

y compris le cas $b = 0$ (d'ailleurs facile à étudier). C'est cet énoncé final que nous donnons dans cette note.

Désignons, dans ce qui suit, par $\boxed{-}$ le fait que l'on a $g(x) < 0$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, par $\boxed{-0+}$ le fait que l'on a $g(x) < 0$ $(0 < x < x_1)$, $g(x_1) = 0$, $g(x) > 0$ $\left(x_1 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, et employons les symbôles correspondants pour les autres cas qui auront lieu.

0.1. En ce qui concerne le signe de

$$g(x) = (\cos x)^c - (\sin x)^a \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

c'est-à-dire le cas $b = 0$, on remarque tout d'abord que l'on a, sous l'hypothèse $a^2 + c^2 > 0$, $\boxed{-}$ et $\boxed{+}$ dans les cas $c \geqslant 0$, $a \leqslant 0$ et $c \leqslant 0$, $a \geqslant 0$ recpectivement. Dans le cas $a > 0$, $c > 0$, on a: $g(x) \downarrow \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$, $g(0) = 1$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et par conséquent $\boxed{+0-}$. Enfin, dans le cas $a<0$, $c<0$, on a: $g(x)\uparrow\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, $g(+0)=-\infty$, $g\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=+\infty$ et par conséquent $\boxed{-0+}$.

1. Soit $\lambda(p)$ la fonction réelle mentionnée dans l'énoncé de la proposition 3 dans [**1**]. Rappelons qu'elle est définie, continue et strictement décroissante de la valeur 0 jusqu'à la valeur $-\frac{1}{3}$ dans l'intervalle $(-\infty, 1)$.

La proposition 3 de [**1**], combinée à la remarque (R), et le résultat **0.1** conduisent immédiatement à la proposition suivante sur le signe de $g(x)$:

Proposition. On a:

$\boxed{-}$ *si et seulement si*: α) $a\leqslant b\leqslant 0\leqslant c$, $a^2+b^2+c^2>0$, *ou* β) $a>b$, $c>-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b>0$, *ou* γ) $0<a<b<3c$;

$\boxed{+}$ *si et seulement si*: α) $a\geqslant b\geqslant 0\geqslant c$, $a^2+b^2+c^2>0$, *ou* β) $a>b$, $c<-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b<0$, *ou* γ) $3c<a<b<0$;

$\boxed{-0+}$ *si et seulement si*: α) $a<b\leqslant 0$, $c<0$, *ou* β) $b>\max\{a, 0\}$, $c\leqslant 0$, *ou* γ) $a=b<3c<0$;

$\boxed{+0-}$ *si et seulement si*: α) $a>b\geqslant 0$, $c>0$, *ou* β) $b<\min\{a, 0\}$, $c\geqslant 0$, *ou* γ) $0<3c<a=b$;

$\boxed{-0+0-}$ *si et senlement si*: $a<b$, $0<c<-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b$;

$\boxed{+0-0+}$ *si et seulement si*: $a>b$, $0>c>-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b$;

$\boxed{-0-}$ *si et seulement si*: $b<\min\{a, 0\}$, $c=-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b$;

$\boxed{+0+}$ *si et seulement si*: $b>\max\{a, 0\}$, $c=-\lambda\left(\frac{a}{b}\right)b$;

$\boxed{0}$ $\left(g(x)=0\right.$ *pour* $\left.0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ *si et seulement si*: $a=b=c=0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinovic et D. D. Adamović *Sur une inégalité élémentaire où interviennent des fonctions trigonométriques*, Ces *Publications*, № 143—155 (1965), p. 23—34.