PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 161 (1966)

О ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ИНТЕГРАЛОВ СВЯЗАННЫХ С ЧИСЛАМИ СТИРЛИНГА И ДЗЕТА—ФУНКЦИЕЙ РИМАНА*

Я. А. Габович

Рассмотрим последовательность интегралов

$$A_n(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s+n-2}}{(e^x-1)^n}\,dx, \tag{1}$$

где $n=1, 2, 3, \ldots$. Легко выяснить, что эти интегралы сходятся при любом комплексном s, удовлетворяющем условию $\operatorname{Re} s>1$. Интегрированием по частям получаем

$$A_n(s)=\frac{n}{s+n-1}\int_0^\infty \frac{x^{s+n-1}}{(e^x-1)^{n+1}}\,e^x\,dx=\frac{n}{s+n-1}\left[\int_0^\infty \frac{x^{s+n-1}}{(e^x-1)^n}\,dx+\int_0^\infty \frac{x^{s+n-1}}{(e^x-1)^{n+1}}\,dx\right]$$
$$=\frac{n\,A_n(s+1)+n\,A_{n+1}(s)}{s+n+1}.$$

Отсюда следует рекуррентная формула для вычисления интегралов (1):

$$A_{n+1}(s)=\frac{s+n-1}{n}A_n(s)-A_n(s+1). \tag{2}$$

Известно, что

$$A_1(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx=\Gamma(s)\,\zeta(s), \tag{3}$$

где $\zeta(s)$ есть дзета-функция Римана, и поэтому при $n=1$ из формулы (2) получаем

$$A_2(s)=s A_1(s)-A_1(s+1)=\Gamma(s+1)\,[\zeta(s)-\zeta(s+1)]. \tag{4}$$

Далее, при $n=2$ можем вычислить

$$A_3(s)=\frac{1}{2}\Gamma(s+2)\,[2\,\zeta(s+2)-3\,\zeta(s+1)+\zeta(s)] \tag{5}$$

и т. д. Докажем индуктивно действительность формулы

$$A_n(s)=\frac{\Gamma(s+n-1)}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n} S_n^k\,\zeta(s+n-k) \qquad (S_n^k \text{— числа Стирлинга}). \tag{6}$$

При малых значениях n, как видно из равенств (3)—(5), формула (6) действительна. Таким образом действительность формулы (6) проверена

* Представлено 1 декабром 1966 Д. С. Митриновичем.

до некоторго $n \geqslant 1$ включительно. В таком случае мы можем вычислить интеграл $A_{n+1}(s)$ по рекуррентной формуле (2):

$$A_{n+1}(s) = \frac{s+n-1}{n} \cdot \frac{\Gamma(s+n-1)}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} S_n^k \zeta(s+n-k) - \frac{\Gamma(s+n)}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} S_n^k \zeta(s+n-k+1) = \frac{\Gamma(s+n)}{n!} \left[\sum_{k=2}^{n+1} S_n^{k-1} \zeta(s+n-k+1) - n \sum_{k=1}^{n} S_n^k \zeta(s+n-k+1) \right]. \tag{7}$$

Введем для чисел Стирлинга следующие дополнительные определения:

$$S_n^0 = S_n^{n+1} = 0.$$

Тогда мы можем в суммах (7) принять общие нижние и верхние пределы: $k=1$ и $k=n+1$. В результате получаем

$$A_{n+1}(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{n!} \sum_{k=1}^{n+1} (S_n^{k-1} - n S_n^k) \zeta(s+n-k+1).$$

Однако, известно, что

$$S_n^{k-1} - n S_n^k = S_{n+1}^k, \tag{8}$$

так что окончательно получаем

$$A_{n+1}(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{n!} \sum_{k=1}^{n+1} S_{n+1}^k \zeta(s+n-k+1).$$

Эту формулу можно получить из формулы (6) простой заменой n на $n+1$, чем и доказана действительность формулы (6) при любом натуральном n.

Обратимся теперь к рассмотрению интегралов

$$C_n(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{(e^x+1)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9}$$

сходящихся при $\operatorname{Re} s > 0$. Как и выше, интегрированием по частям можно прийти к рекуррентной формуле

$$C_{n+1}(s) = C_n(s) - \frac{s-1}{n} C_n(s-1). \tag{10}$$

Известно, что

$$C_1(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,dx}{e^x+1} = \Gamma(s)\,\Phi(s), \quad \text{где} \quad \Phi(s) = \zeta(s)(1-2^{1-s}).$$

Поэтому с помощью формулы (10) последовательно получаем:

$$C_2(s) = \Gamma(s)[\Phi(s) - \Phi(s-1)], \quad C_3(s) = \frac{1}{2}\Gamma(s)[2\Phi(s) - 3\Phi(s-1) + \Phi(s-2)]$$

и т. д. Общая формула для вычисления интегралов (9) доказывается аналогично формуле (6) и имеет следующий вид:

$$C_n(s) = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(s)}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{n} S_n^k \Phi(s-k+1).$$