PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 160 (1966)

UNE CLASSE D'INÉGALITÉS OÙ INTERVIENNENT LES MOYENNES D'ORDRE ARBITRAIRE

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

0. Soient $a=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $p=(p_1, p_2, \dots, p_n)$ des suites de nombres positifs. La moyenne d'ordre r (r, réel) est définie par les formules:

$$M_n^{[r]}(a; p) = \left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu^{\,r}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu} \right)^{1/r} \qquad (r \neq 0;\ |r| < +\infty),$$

$$= \left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\,p_\nu} \right)^{\frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu}} \qquad (r=0),$$

$$= \min(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (r=-\infty),$$

$$= \max(a_1, a_2, \dots, a_n) \qquad (r=+\infty).$$

Pour $r=-1$, $r=0$, $r=+1$, on obtient respectivement les moyennes harmonique, géométrique et arithmétique, c'est-à-dire:

$$M_n^{[-1]}(a; p) = H_n(a; p) = \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{\dfrac{p_1}{a_1}+\dfrac{p_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{p_n}{a_n}},$$

$$M_n^{[0]}(a; p) = G_n(a; p) = \left(a_1^{\,p_1} a_2^{\,p_2} \dots a_n^{\,p_n}\right)^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}},$$

$$M_n^{[1]}(a; p) = A_n(a; p) = \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

1. Dans ce qui suit, nous allons démontrer le

Théorème 1. *Pour $r<1$, on a l'inégalité*

$$(1.1) \qquad \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right) A_n(a; q) - \lambda \frac{q_n}{p_n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) M_n^{[r]}(a; p)$$

$$\geqslant\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right) A_{n-1}(a;\, q)-\lambda\,\frac{q_n}{p_n}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)$$

$$\times\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)^{\frac{1-r}{r}}\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu-p_n\,\lambda^{\frac{r}{1-r}}\right)^{\frac{r-1}{r}}\right\} M_{n-1}^{[r]}(a;\, p),$$

où $0<\lambda^{\frac{r}{1-r}}<\dfrac{1}{p_n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)$.

Pour $r>1$, *on a l'inégalité contraire.*

Démonstration. — Pour la fonction

$$f(a_n)=a_1 q_1+\cdots+a_n q_n-\lambda\,\frac{q_n}{p_n}(p_1+\cdots+p_n)\left(\frac{p_1 a_1{}^r+\cdots+p_n a_n{}^r}{p_1+\cdots+p_n}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$=\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right) A_n(a;\, q)-\lambda\,\frac{q_n}{p_n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) M_n^{[r]}(a;\, p)$$

$$(\lambda>0;\ r\neq 0;\ |r|<+\infty),$$

on a

$$f'(a_n)=q_n\left\{1-\lambda\, a_n{}^{r-1}\left(M_n^{[r]}(a;\, p)\right)^{1-r}\right\},$$

$$f''(a_n)=-\lambda(r-1)\, q_n\,\frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}\, a_n{}^{r-2}\,(M_n^{[r]})^{1-2r}\,(M_{n-1}^{[r]})^r.$$

Le seul zéro positif de la fonction f' est

$$a_n=\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;\, p)}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu-p_n\,\lambda^{\frac{r}{1-r}}\right)^{\frac{1}{r}}}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)^{\frac{1}{r}}\lambda^{\frac{1}{1-r}},$$

donc, il faut que

$$\lambda^{\frac{r}{1-r}}<\frac{1}{p_n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right).$$

Étant donné que pour $r<1$ on a $f''(a_n)>0$, il en résulte l'inégalité suivante:

$$f(a_n)\geqslant \min f(a_n)=\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right) A_{n-1}(a;\, q)$$

$$-\frac{q_n}{p_n}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)^{\frac{1}{r}}\lambda\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu-p_n\,\lambda^{\frac{r}{1-r}}\right)^{\frac{r-1}{r}} M_{n-1}^{[r]}(a;\, p).$$

De là on tire l'inégalité (1.1).

Dans ce qui précède, l'inégalité (1.1) a été démontrée sous la condition que $r \neq 0$ et $|r| < +\infty$. Si l'on fait $r \to 0$, on obtient

$$\lim_{r \to 0} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu \right)^{\frac{1-r}{r}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu - p_n \lambda^{\frac{r}{1-r}} \right)^{\frac{r-1}{r}} = \lambda^{p_n \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu},$$

$$\lim_{r \to 0} M_n^{[r]}(a;\, p) = G_n(a;\, p).$$

D'après les dernières égalités, l'inégalité (1.1) devient

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \right) A_n(a;\, q) - \lambda \frac{q_n}{p_n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \right) G_n(a;\, p) \tag{1.2}$$

$$\geqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu \right) A_{n-1}(a;\, q) - \frac{q_n}{p_n} \lambda^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu \right) G_{n-1}(a;\, p).$$

On peut également établir cette inégalité en procédant directement comme l'on a fait dans la démonstration de (1.1). En effet, en partant de la fonction

$$g(a_n) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \right) A_n(a;\, q) - \lambda \frac{q_n}{p_n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \right) G_n(a;\, p),$$

on obtient

$$g'(a_n) = q_n \left(1 - \lambda\, G_{n-1}(a;\, p)^{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right) \Big/ \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)} a_n^{-\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right) \Big/ \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)} \right),$$

$$g''(a_n) = \lambda\, q_n\, G_{n-1}(a;\, p)^{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right) \Big/ \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)} \frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}\, a_n^{-\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right) \Big/ \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) - 1} > 0.$$

Le seul zéro positif de g' est

$$a_n = \lambda^{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) \Big/ \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)} G_{n-1}(a;\, p).$$

Pour cette valeur de a_n, puisque $g''(a_n) > 0$, on a

$$\min g(a_n) = \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu \right) A_{n-1}(a;\, q) - \frac{q_n}{p_n} \lambda^{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) \Big/ \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu \right) G_{n-1}(a;\, p),$$

d'où l'on déduit l'inégalité (1.2).

Pour $r \to +\infty$, à partir de (1.1), on trouve

$$(1.3) \quad \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right) A_n(a; q) - \lambda \frac{q_n}{p_n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right) A_{n-1}(a; q) - \lambda \frac{q_n}{p_n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu - \frac{1}{\lambda} p_n\right) \max(a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Si dans (1.1) on fait $r \to -\infty$, on obtient l'inégalité (1.3), où il faut remplacer max par min et $\leqslant$ par $\geqslant$.

2. L'inégalité (1.2) conduit à

Théorème 2. *Pour* $\mu > 0$, *on a les inégalités suivantes*

$$(2.1) \quad \left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right) A_n(a; q) - \mu \left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) G_n(a; p)$$

$$\geqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right) A_{n-1}(a; q) - \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu} \mu^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu} \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right) G_{n-1}(a; p)$$

$$\geqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right) A_{n-2}(a; q)$$

$$- \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^{p_{n-1} \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-2} p_\nu} \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-2} p_\nu} \mu^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \Big/ \sum_{\nu=1}^{n-2} p_\nu} \left(\sum_{\nu=1}^{n-2} p_\nu\right) G_{n-2}(a; p)$$

$$\geqslant \cdots$$

$$\geqslant \left(\sum_{\nu=1}^{3} q_\nu\right) A_2(a; q)$$

$$- \left(\frac{p_3}{q_3}\right)^{p_3 \Big/ \sum_{\nu=1}^{2} p_\nu} \cdots \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n \Big/ \sum_{\nu=1}^{2} p_\nu} \mu^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \Big/ \sum_{\nu=1}^{2} p_\nu} \left(\sum_{\nu=1}^{2} p_\nu\right) G_2(a; p)$$

$$\geqslant q_1 A_1(a; q) - \left(\frac{p_2}{q_2}\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \cdots \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{\frac{p_n}{p_1}} \mu^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \Big/ p_1} \cdot p_1 \cdot G_1(a; p)$$

avec $\mu = \lambda \dfrac{q_n}{p_n}$.

3. En posant $p_\nu = q_\nu \, (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ et $\mu = 1$, on obtient de (2.1) les inégalités démontrées dans [1].

4. Pour des valeurs de λ, convenablement choisies, en partant de (1.1) on peut obtenir diverses inégalités (classiques et autres). Cependant, la question si les valeurs correspondentes de λ satisfont à la condition $0<\lambda^{\frac{r}{1-r}}<\frac{1}{p_n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)$, reste ouverte dans quelques cas.

Par exemple, si l'on fait dans (2.1)

$$\mu=\frac{p_n\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right) A_n(a;q)}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) G_n(a;p)},$$

on obtient l'inégalité

$$\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} \left(\frac{G_n(a;p)}{A_n(a;q)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}$$

$$\leqslant\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n}\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}\left(\frac{G_{n-1}(a;p)}{A_{n-1}(a;q)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}.$$

Cette inégalité a été demontrée dans l'article [2].

Pour

$$\lambda=\frac{p_n\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right) A_n(a;q)}{q_n\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right) M_n^{[r]}(a;p)}$$

à partir de (1.1) on obtient l'inégalité

$$\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)^{\frac{1}{1-r}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right)^{\frac{r}{1-r}}}\left(\frac{M_n^{[r]}(a;p)}{A_n(a;q)}\right)^{\frac{r}{1-r}} \geqslant \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)^{\frac{1}{1-r}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right)^{\frac{r}{1-r}}}\left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;p)}{A_{n-1}(a;q)}\right)^{\frac{r}{1-r}}+\frac{p_n^{\frac{1}{1-r}}}{q_n^{\frac{r}{1-r}}} \qquad (r<0).$$

Étant donné que

$$M_n^{[r]}(a^k;p)=(M_n^{[rk]}(a;p))^k,$$

si l'on pose $s=rk$ et a^k au lieu de a, à partir de la dernière inégalité on trouve l'inégalité

$$\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)^{\frac{k}{k-s}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right)^{\frac{s}{k-s}}}\left(\frac{M_n^{[s]}(a;\,p)}{M_n^{[k]}(a;\,q)}\right)^{\frac{ks}{k-s}} \geqslant \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)^{\frac{k}{k-s}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right)^{\frac{s}{k-s}}}\left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;\,p)}{M_{n-1}^{[k]}(a;\,q)}\right)^{\frac{ks}{k-s}} + \frac{p_n^{\frac{k}{k-s}}}{q_n^{\frac{s}{k-s}}} \qquad (rs<0).$$

Cette inégalité a été déjà démontré dans l'article [2].

5. Il serait intéressant de rapprocher les résultats de cet article de ceux obtenus par T. Popoviciu [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović, *Inequalities of R. Rado type for weighted means*, Publications de l'Institut mathématique 6 (20), 1966, 105—106.

[2] D. S. Mitrinović et P. M. Vasić, *Nouvelles inégalités pour les moyennes d'ordre arbitraire*, Ces Publications № 159 (1966).

[3] Т. Попович, *Относительно некоторых неравенств между средними*, Mathematica, 1 (24) (1959), 81—93.