PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 159 (1966)

NOUVELES INÉGALITÉS POUR LES MOYENNES D'ORDRE ARBITRAIRE

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

0. Notations

Soient $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ des suites des nombres positifs. La moyenne d'ordre $r\,(r$, réel) est définie par les formules:

$$M_n^{[r]}(a;p)=\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu a_\nu^{\,r}}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu}\right)^{1/r} \qquad (r\neq 0;\ |r|<+\infty),$$

$$=\left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\,p_\nu}\right)^{\frac{1}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu}} \qquad (r=0),$$

$$=\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (r=-\infty),$$

$$=\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad (r=+\infty).$$

Pour $r=1$ ces formules contiennent la moyenne arithmétique $A_n(a;p)$, c'est-à-dire

$$M_n^{[1]}(a;p)=A_n(a;p)=\frac{p_1 a_1+p_2 a_2+\cdots+p_n a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

Pour $r=0$ nouz avons la moyenne géométrique $G_n(a;p)$, c'est-à-dire

$$M_n^{[0]}(a;p)=G_n(a;p)=(a_1^{p_1} a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}}.$$

Pour $r=-1$ nous avons la moyenne harmonique $H_n(a;p)$, c'est-à-dire

$$M_n^{[-1]}(a;p)=H_n(a;p)=\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{\frac{p_1}{a_1}+\frac{p_2}{a_2}+\cdots+\frac{p_n}{a_n}}.$$

Dans la littérature, on compare exclusivement des moyennes formées avec le même système de poids, ce qui est souligné dans [1]. Cependant, dans cet article nous allons considérer les moyennes composées par deux systèmes de poids:

$$p=(p_1, p_2, \ldots, p_n) \quad \text{et} \quad q=(q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

avec $p_k, q_k>0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

1. INÉGALITÉS POUR LES MOYENNES D'ORDRE ZÉRO OU UN

1.1. Nous allons prouver le résultat suivant:

Théorème 1. *L'inégalité suivante a lieu:*

$$(1.1)\qquad \left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} q_\nu}\right)^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu} \times \left(\frac{G_n(a;p)}{A_n(a;q)}\right)^{\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu}$$

$$\leqslant \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n} \left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} q_\nu}\right)^{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} p_\nu} \times \left(\frac{G_{n-1}(a;p)}{A_{n-1}(a;q)}\right)^{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}.$$

Démonstration. — Considérons la fonction f définie par

$$(1.2)\qquad f(a_n)=p_1 \log a_1+\cdots+p_n \log a_n - (p_1+\cdots+p_n)\big(\log(q_1 a_1+\cdots+q_n a_n)-\log(q_1+\cdots+q_n)\big).$$

Les deux premières dérivées f' et f'' de la fonction f sont

$$f'(a_n)=\frac{p_n}{a_n}-(p_1+\cdots+p_n)\frac{q_n}{q_1 a_1+\cdots+q_n a_n},$$

$$f''(a_n)=-\frac{p_n}{a_n^2}+(p_1+\cdots+p_n)\frac{q_n^2}{(q_1 a_1+\cdots+q_n a_n)^2}.$$

Le seul zéro de la dérivée f' est

$$(1.3)\qquad a_n=\frac{p_n}{q_n}\,\frac{q_1 a_1+\cdots+q_{n-1} a_{n-1}}{p_1+\cdots+p_{n-1}}$$

et pour cette valeur de a_n on obtient

$$f''(a_n)=-\frac{q_n^2}{p_n}\,\frac{(p_1+\cdots+p_{n-1})^3}{(q_1 a_1+\cdots+q_{n-1} a_{n-1})^2(p_1+\cdots+p_n)}<0;$$

donc, la fonction f atteint son maximum pour la valeur de a_n déterminée par (1.3).

Le maximum de la foction f est

$$\max f(a_n) = \log \left\{ \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n} \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} \times \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu} \times \left(\frac{G_{n-1}(a;p)}{A_{n-1}(a;q)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu} \right\}.$$

Par conséquent, nous avons demontré l'inégalité (1.1).

1.2. Par itération de l'inégalité (1.1), on obtient:

Théorème 2. *Les inégalités suivantes sont valables:*

$$(1.4) \qquad \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} \times \left(\frac{G_n(a;p)}{A_n(a;q)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}$$

$$\leqslant \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n} \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu} \times \left(\frac{G_{n-1}(a;p)}{A_{n-1}(a;q)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}$$

$$\leqslant \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n} \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^{p_{n-1}} \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n-2} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n-2} q_\nu}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-2} p_\nu} \times \left(\frac{G_{n-2}(a;p)}{A_{n-2}(a;q)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-2} p_\nu}$$

$$\leqslant \cdots$$

$$\leqslant \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{p_n} \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^{p_{n-1}} \cdots \left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{p_1}.$$

1.3. Dans le cas où $p_k = q_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, les inégalités (1.4) prennent la forme plus simple suivante:

$$(1.5) \qquad \left(\frac{G_n(a;p)}{A_n(a;p)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu} \leqslant \left(\frac{G_{n-1}(a;p)}{A_{n-1}(a;p)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}$$

$$\leqslant \left(\frac{G_{n-2}(a;p)}{A_{n-2}(a;p)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-2} p_\nu}$$

$$\leqslant \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant\left(\frac{G_2(a;\,p)}{A_2(a;\,p)}\right)^{\sum\limits_{\nu=1}^{2} p_\nu}\\
&\leqslant\left(\frac{G_1(a;\,p)}{A_1(a;\,p)}\right)^{p_1}\\
&=1.
\end{aligned}
$$

On en tire l'inégalité classique

$$G_n(a;\,p)\leqslant A_n(a;\,p)$$

et de même le fait que dans cette inégalité le signe de l'égalité a lieu si et seulement si

$$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n.$$

Les inégalités (1.5) lorsque l'on a $p_1=p_2=\cdots=p_n$, deviennent

$$\left(\frac{G_n}{A_n}\right)^n\leqslant\left(\frac{G_{n-1}}{A_{n-1}}\right)^{n-1}\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{G_2}{A_2}\right)^2\leqslant\left(\frac{G_1}{A_1}\right)^1, \tag{1.6}$$

avec

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\qquad G_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}.$$

Les inégalités (1.6) sont connues (voir: [1], [2]).

2. INÉGALITÉS POUR LES MOYENNES D'ORDRE ARBITRAIRE

2.1. Nous allons démontrer le théorème suivant

Théorème 3. *Si $rs<0$, on a*

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)^{\frac{s}{s-r}}}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} q_\nu\right)^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M_n^{[r]}(a;\,p)}{M_n^{[s]}(a;\,q)}\right)^{\frac{rs}{s-r}}\\
&\qquad\geqslant\frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)^{\frac{s}{s-r}}}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right)^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;\,p)}{M_{n-1}^{[s]}(a;\,q)}\right)^{\frac{rs}{s-r}}+\frac{p_n^{\frac{s}{s-r}}}{q_n^{\frac{r}{s-r}}}.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Si $rs>0$, le sens de l'inégalité dans (2.1) *se change.*

Démonstration. — Considérons la fonction f définie par

$$(2.2)\quad f(a_n)=\frac{1}{r}\log(p_1 a_1^r+\cdots+p_n a_n^r)-\frac{1}{s}\log(q_1 a_1^s+\cdots+q_n a_n^s)$$

$$-\frac{1}{r}\log(p_1+\cdots+p_n)+\frac{1}{s}\log(q_1+\cdots+q_n),$$

avec $rs\neq 0$ et $|rs|<+\infty$.

De (2.2) il vient

$$f'(a_n)=\frac{p_n a_n^{r-1}}{p_1 a_1^r+\cdots+p_n a_n^r}-\frac{q_n a_n^{s-1}}{q_1 a_1^s+\cdots+q_n a_n^s},$$

$$f''(a_n)=\frac{(r-1)\,p_n a_n^{r-2}(p_1 a_1^r+\cdots+p_{n-1}a_{n-1}^r)-p_n^2 a_n^{2r-2}}{(p_1 a_1^r+\cdots+p_n a_n^r)^2}$$

$$-\frac{(s-1)\,q_n a_n^{s-2}(q_1 a_1^s+\cdots+q_{n-1}a_{n-1}^s)-q_n^2 a_n^{2s-2}}{(q_1 a_1^s+\cdots+q_n a_n^s)^2}.$$

La fonction f' a seulement un zéro positif, à savoir

$$(2.3)\quad a_n=\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^{\frac{1}{r-s}}\left(\frac{p_1 a_1^r+\cdots+p_{n-1}a_{n-1}^r}{q_1 a_1^s+\cdots+q_{n-1}a_{n-1}^s}\right)^{\frac{1}{r-s}}.$$

Pour cette valeur de a_n on obtient

$$f''(a_n)$$

$$=(r-s)\,a_n^{-2}\,\frac{p_n^{\frac{s}{r-s}}\,q_n^{\frac{r}{r-s}}(p_1 a_1^r+\cdots+p_{n-1}a_{n-1}^r)^{\frac{s}{r-s}}(q_1 a_1^s+\cdots+q_{n-1}a_{n-1}^s)^{\frac{r}{r-s}}}{\left(p_n^{\frac{s}{r-s}}(q_1 a_1^s+\cdots+q_{n-1}a_{n-1}^s)^{\frac{r}{r-s}}+q_n^{\frac{r}{r-s}}(p_1 a_1^r+\cdots+p_{n-1}a_{n-1}^r)^{\frac{s}{r-s}}\right)^2}$$

et

$$(2.4)\quad f(a_n)=m=\log\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n}q_\nu\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}p_\nu\right)^{\frac{1}{r}}M_{n-1}^{[r]}(a;p)\right\}$$

$$-\log\left\{\left(\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}q_\nu\right)^{\frac{1}{s}}M_{n-1}^{[s]}(a;q)\right\}$$

$$+\frac{s-r}{rs}\log\left\{1+\frac{q_n^{\frac{r}{r-s}}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}p_\nu\right)^{\frac{s}{r-s}}}{p_n^{\frac{s}{r-s}}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}q_\nu\right)^{\frac{r}{r-s}}}\left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;p)}{M_{n-1}^{[s]}(a;q)}\right)^{\frac{rs}{r-s}}\right\}.$$

Étant donné que, pour $r>s$, on a $f''(a_n)>0$, on obtient

$$f(a_n)\geqslant m. \tag{2.5}$$

Pour $r<s$, d'après $f''(a_n)<0$, on a

$$f(a_n)\leqslant m. \tag{2.6}$$

De (2.5) il vient

$$\begin{aligned} &\frac{rs}{r-s}f(a_n)\geqslant\frac{rs}{r-s}m \qquad (rs>0,\ r>s),\\ &\frac{rs}{r-s}f(a_n)\leqslant\frac{rs}{r-s}m \qquad (rs<0,\ r>s), \end{aligned} \tag{2.7}$$

et de (2.6)

$$\begin{aligned} &\frac{rs}{r-s}f(a_n)\geqslant\frac{rs}{r-s}m \qquad (rs>0,\ r<s),\\ &\frac{rs}{r-s}f(a_n)\leqslant\frac{rs}{r-s}m \qquad (rs<0,\ r<s). \end{aligned} \tag{2.8}$$

En confrontant les inégalités (2.7) et (2.8), on arrive au théorème 3.

Par suite, l'inégalité (2.1) est démontrée dans le cas $|rs|<+\infty$. Mais, d'après la condition

$$\lim_{s\to-\infty} M_n^{[s]}(a;q)=\min(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

elle reste valable aussi dans le cas où $s=-\infty$, et prend la forme suivante

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}p_\nu\right)\left(\frac{M_n^{[r]}(a;p)}{\min(a_1,\ldots,a_n)}\right)^r\geqslant p_n+\left(\sum_{\nu=1}^{n-1}p_\nu\right)\left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;p)}{\min(a_1,\ldots,a_{n-1})}\right)^r.$$

Si dans (2.1) $s\to+\infty$ on obtient l'inégalité précédente où il faut remplacer min par max et $\geqslant$ par $\leqslant$.

En faisant $s\to 0$, dans (2.4), pour $r>0$ on obtient

$$\lim_{s\to 0}f(a_n)=\log\left\{\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}p_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}q_\nu}\right)^{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}q_\nu\Big/ r\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}q_n\right)}\times\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{q_n\Big/ r\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}q_\nu\right)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}q_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}p_\nu}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;p)}{G_{n-1}(a;q)}\right)^{\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}q_\nu\Big/\sum\limits_{\nu=1}^{n}q_\nu}\right\}.$$

Ainsi, on obtient pour $r>0$, l'inégalité

$$(2.9)\quad \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu}\right)^{\frac{1}{r}\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right)} \times \left(\frac{M_n^{[r]}(a;p)}{G_n(a;q)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu}$$

$$\geqslant \left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{\frac{q_n}{r}} \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu}\right)^{\frac{1}{r}\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right)} \times \left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;p)}{G_{n-1}(a;q)}\right)^{\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu}.$$

Au reste, on déduit directement cette inégalité à partir de (1.1) et mettant à profit l'inégalité suivante

$$M_n^{[r]}(a^k;p)=\left(M_n^{[rk]}(a;p)\right)^k,$$

où il faut poser $s=rk$ et a^k au lieu de a.

Dans les inégalités (2.1) et (2.9) le signe de l'égilité a lieu si et seulement si

$$a_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^{\frac{1}{r-s}} = a_{n-1}\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^{\frac{1}{r-s}} = \cdots = a_1\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^{\frac{1}{r-s}}.$$

2.2. Une conséquence de l'inégalite (2.1) est

Théorème 4. *Si l'on a $rs<0$, les inégalités suivantes sont valables:*

$$(2.10)\quad \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)^{\frac{s}{s-r}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right)^{\frac{r}{s-r}}} \left(\frac{M_n^{[r]}(a;p)}{M_n^{[s]}(a;q)}\right)^{\frac{rs}{s-r}}$$

$$\geqslant \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} p_\nu\right)^{\frac{s}{s-r}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} q_\nu\right)^{\frac{r}{s-r}}} \left(\frac{M_{n-1}^{[r]}(a;p)}{M_{n-1}^{[s]}(a;q)}\right)^{\frac{rs}{s-r}} + \frac{p_n^{\frac{s}{s-r}}}{q_n^{\frac{r}{s-r}}}$$

$$\geqslant \cdots$$

$$\geqslant \frac{\left(\sum_{\nu=1}^{2} p_\nu\right)^{\frac{s}{s-r}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{2} q_\nu\right)^{\frac{r}{s-r}}} \left(\frac{M_2^{[r]}(a;p)}{M_2^{[s]}(a;q)}\right)^{\frac{rs}{s-r}} + \sum_{\nu=1}^{n-2} \frac{p_{n-\nu+1}^{\frac{s}{s-r}}}{q_{n-\nu+1}^{\frac{r}{s-r}}}$$

$$\geqslant \frac{p_1^{\frac{s}{s-r}}}{q_1^{\frac{r}{s-r}}}\left(\frac{M_1^{[r]}(a;p)}{M_1^{[s]}(a;q)}\right)^{\frac{rs}{s-r}} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{p_{n-\nu+1}^{\frac{s}{s-r}}}{q_{n-\nu+1}^{\frac{r}{s-r}}}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_{n-\nu+1}^{\frac{s}{s-r}}}{q_{n-\nu+1}^{\frac{r}{s-r}}}.$$

Dans le cas $rs>0$, *le sens des inégalités* (2.10) *se change.*

Pour $r>s$, de (2.10) il vient

$$\frac{M_n^{[r]}(a;p)}{M_n^{[s]}(a;q)} \geqslant \left(\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right)^{\frac{r}{s-r}}}{\left(\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right)^{\frac{s}{s-r}}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{p_\nu^{\frac{s}{s-r}}}{q_\nu^{\frac{r}{s-r}}}\right)^{\frac{s-r}{rs}}. \tag{2.11}$$

2.3. Lorsque l'on a $p_\nu = q_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) l'inégalité (2.11) conduit à l'inégalite bien connue

$$M_n^{[r]}(a;p) \geqslant M_n^{[s]}(a;p) \qquad (r>s).$$

Cette inégalité exprime le fait que $M_n^{[r]}$ est une fonction non décroissante de r.

2.4. Il serait intéressant de rapprocher les résultats de cet article de ceux obtenus par E. Beckenbach [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Kestelman, *On arithmetic and geometric means*, The Mathematical Gazette, **46** (1962), 130.

[2] A. Dinghas, *Zum Beweis der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel von n Zahlen*, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, **9** (1963), 157—163.

[3] E. F. Beckenbach, *On the inequality of Kantorovich*, American Mathematical Monthly, **71** (1964), 606—619.