PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 147 (1965)

NOTE BIBLIOGRAPHIQUF SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX FONCTIONS DE LEGENDRE

D. S. Mitrinović et *D. Ž. Djoković*

D. Ž. Djoković [2] a indiqué la formule hypothétique

$$\frac{d^k}{dx^k} P_{n+k}(x) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) \sum P_{i_1}(x) P_{i_2}(x) \cdots P_{i_{2k+1}}(x), \tag{1}$$

où $P_i(x)$ est le polynome de Legendre, la sommation étant étendue à toutes les permutations des tous les systèmes d'indices non-négatifs $i_1, i_2, \ldots, i_{2k+1}$ dont la somme est n. Il n'a prouvé cette formule que pour $k=1, 2, 3$.

Un peu plus tard, B. S. Popov a donné une démonstration simple de la formule (1). Sa démonstration est publiée dans le livre [4, p. 435—436]. Indépendamment de Popov, mais après lui, Mary L. Boas [1] a prouvé la formule (1) par un procédé identique à celui de Popov.

Suivant un procédé plus général, L. Toscano [9] a établi la formule

$$P_n^{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k)}(x) = \sum P_{i_1}^{(\alpha_1)}(x) P_{i_2}^{(\alpha_2)}(x) \cdots P_{i_k}^{(\alpha_k)}(x) \tag{2}$$

$$(i_1+i_2+\cdots+i_k=n; \quad k>1),$$

valable pour les polynomes ultrasphériques (ou polynomes de Gegenbauer). Cette formule contient la formule (1) pour $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=1/2$, car on a

$$\frac{d^k}{dx^k} P_{n+k}^{(\alpha)}(x) = 2^k \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+k-1) P_n^{(\alpha+k)}(x), \tag{3}$$

où les polynomes ultrasphériques $P_n^{(\alpha)}(x)$ sont definis, par exemple, par le développement

$$(1-2tx+t^2)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n^{(\alpha)}(x) \qquad (|t|<1). \tag{4}$$

En passant à la limite, Toscano [9] a aussi déduit la formule suivante

$$k^{n/2} H_n(x\sqrt{k}) = \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_k!} H_{i_1}(x) H_{i_2}(x) \cdots H_{i_k}(x) \tag{5}$$

$$(i_1+i_2+\cdots+i_k=n),$$

où $H_n(x)$ sont les polynomes d'Hermite, définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2/2}). \tag{6}$$

Dans l'article cité, Toscano a indiqué que la formule (6) est connue, mais il n'a donné aucune référence.

Dans une lettre, adressée à D. S. Mitrinović à propos de la note [5], R. P. Boas a attiré son attention sur le mémoire de Gegenbauer [3], qui contient la formule (2), retrouvée par Toscano. Dans le même mémoire de Gegenbauer on trouve aussi la formule particulière suivante

$$\frac{d^{\alpha k}}{dx^{\alpha k}} P_{n+\alpha k}^{(\alpha)}(x) = 2^{\alpha k} \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+\alpha k-1) \sum P_{i_1}^{(\alpha)}(x) P_{i_2}^{(\alpha)}(x) \cdots P_{i_{k+1}}^{(\alpha)}(x) \tag{7}$$
$$(\alpha k \text{ entier, } i_1+i_2+\cdots+i_{k+1}=n).$$

Le cas particulier de (1) pour $k=1$ a été a attribué à Catalan par Geganbauer sans aucune référence bibliographique.

En plus de cela, deux auteurs, F. E. Rodeja [6] et E. J. Scott [7], ont démontré de nouveau la formule (1). Scott a prouvé en outre la formule que voici

$$\frac{d^k}{dx^k} U_{n+k}(x) = 2^k k! \sum U_{i_1}(x) U_{i_2}(x) \cdots U_{i_{k+1}}(x) \tag{8}$$
$$(i_1+i_2+\cdots+i_{k+1}=n),$$

en désignant par $U_i(x)$ des polynomes de Tchebychef de seconde espèce, à savoir:

$$U_i(x) = P_i^{(1)}(x). \tag{9}$$

La formule (8) est aussi un cas particulier de la formule (7) pour $\alpha=1$.

Une fois encore les formules (2) et (7) ont été retrouvées par R. P. Singh [8]. En dehors de ces formules Singh a prouvé aussi une formule analogue pour les polynomes de Laguerre, à savoir:

$$L_n^{k+\alpha k-1}(xk) = \sum L_{i_1}^{\alpha}(x) L_{i_2}^{\alpha}(x) \cdots L_{i_k}^{\alpha}(x) \tag{10}$$
$$(\alpha k \text{ entier}; \ i_1+i_2+\cdots+i_k=n),$$

avec

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha}} e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n L_n^{\alpha}(x) \qquad (|t|<1). \tag{11}$$

Les faits précédents montrent l'intérêt très vif que l'on attache toujours à la théorie classique des fonctions spéciales. Cependant, la littérature très abodante sur les fonctions spéciales et l'absence d'une oeuvre complète relative à ces fonctions, arrangée systématiquement, rendent très difficile la question de savoir si un résultat concernant les fonctions spéciales est vraiment nouveau. C'est pourquoi, on ne peut pas aussi dire avec certitude que la formule (10) est nouvelle, tandis que l'on voit que tous les autres résultats mentionnés sont contenus dans la formule de Gegenbauer, datée de 1884.

RÉFÉRENCES

[1] Mary L. Boas, *A formula for the derivatives of Legendre polynomials.* The American Mathematical Monthly, **70** (1963), 643—644.

[2] D. Ž. Djoković, *Nouvelle formule relative aux polynômes de Legendre.* Ces Publications, № **66** (1961).

[3] L. Gegenbauer, *Zur Theorie der Functionen* $C_n^\nu(x)$. Denkschriften der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien), Math.-Naturw. Classe, **48** (1884), 293—334.

[4] D. S. Mitrinović, *Zbornik matematičkih problema,* t. I, troisième edition, Belgrade 1962.

[5] D. S. Mitrinović, *Sur une formule concernant les dérivées des polynomes de Legendre.* Matematički Vesnik **1 (16)** (1964), p. 51.

[6] F. E. Rodeja, *Sobre una formula relativa a polinomios de Legendre.* Gaceta Matematica (Madrid), **15** № 5—6, (1963), 125—126.

[7] E. J. Scott, *A formula for the derivatives of Tchebyshef polinomials of the second kind.* The American Mathematical Monthly, **71** (1964), 524—525.

[8] R. P. Singh, *A note on Gegenbauer and Laguerre polynomials.* Mathematica Japonicae, **9** (1964), 1—4.

[9] L. Toscano, *Formule d'addition des polynômes ultrasphériques par rapport au paramètre.* Ces Publications, № **98** (1963).