PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 143 (1965)

CONGRUENCE OÙ INTERVIENNENT DES POLYNOMES HOMOGÈNES

Dragoslav S. Mitrinović

1. Soient h_p et H_q deux polynomes homogènes des degrés respectifs p et $q \geqslant p+1$ dépendant des n variables $a_1, a_2, \ldots, a_n \in N$ (N, ensemble des nombres naturels) et dont les coefficients sont des entiers non négatifs.

Dans cette petite note, on considère la congruence suivante

$$H_q(a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv 0 \pmod{h_p(a_1, a_2, \ldots, a_n)}. \tag{1}$$

Une solution de cette congruence est donnée par les formules suivantes

$$a_\nu = k\, b_\nu\, h_p(b_1, b_2, \ldots, b_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

où $k \in N$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n \in N$.

En prenant en considération les formules (2), on obtient immédiatement

$$H_q(a_1, a_2, \ldots, a_n) = k^q \{h_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)\}^q \; H_q(b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

$$h_p(a_1, a_2, \ldots, a_n) = k^p \{h_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)\}^{p+1}.$$

On en tire

$$\frac{H_q(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h_p(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = k^{q-p} \{h_p(b_1, b_2, \ldots, b_n)\}^{q-p-1} \; H_q(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Puisque, d'après l'hypothèse $q-p-1 \geqslant 0$, l'expression figurant au second membre de la dernière égalité est un nombre naturel, toutes les fois que les $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des nombres naturels. Donc, l'assertion énoncée plus haut est démontrée.

Pour la congruence

$$a_1 a_2 \equiv 0 \pmod{(a_1 + a_2)},$$

qui est un cas très particulier de la congruence (1), on a démontré [1] que sa solution complète est donnée par les formules que voici:

$$a_1 = kb_1(b_1 + b_2),$$
$$a_2 = kb_2(b_1 + b_2).$$

Exemple 1. L'expression

$$a_1 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4$$

est divisible par

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4$$

si les a_1, a_2, a_3, a_4 sont donnés par les formules:

$$a_1 = kb_1 (b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4),$$
$$a_2 = kb_2 (b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4),$$
$$a_3 = kb_3 (b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4),$$
$$a_4 = kb_4 (b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_1 b_4 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4).$$

Le quotient de la division est

$$k (b_1 b_2 b_3 + b_1 b_2 b_4 + b_1 b_3 b_4 + b_2 b_3 b_4).$$

Exemple 2. L'expression

$$a_1^3 + 3 a_2^3$$

est divisible par

$$a_1^2 + 2 a_1 a_2$$

dans le cas où a_1 et a_2 ont les formes suivantes:

$$a_1 = kb_1 (b_1^2 + 2 b_1 b_2),$$
$$a_2 = kb_2 (b_1^2 + 2 b_1 b_2)$$

et le quotient de la division est

$$k (b_1^3 + 3 b_2^3).$$

Remarque. Avec une légère modification, le résultat obtenu s'étend au cas où les variables a_1, a_2, ... , a_n prennent aussi leurs valeurs dans l'ensemble des nombres entiers.

2. En connexion avec ce qui précède, on peut proposer, entre autres, les problèmes [2] suivants:

1° Trouver la solution complète de la congruence (1);

2° Sous quelle condition la formule (2) l'est?

3° Trouver la solution complète de la congruence (1) dans le cas où h_p et H_q sont des fonctions symétriques élémentaires.

Des questions analogues se présentent dans le cas où N est l'ensemble des nombres entiers.

RÉFÉRENCES

[1] Problème E 1452 [1961, 177; 1961, 804] proposé par N. A. Court et résolu par D. M. Danvers, *The American Mathematical Monthly*, **68** (1961), p. 804.

[2] D. S. Mitrinović, **P 491**, *Colloqium Mathematicum*, **13** (1964), 127.