PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 138 (1965)

SOLUTION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE À PLUSIEURS FONCTIONS INCONNUES*

Radosav Ž. Đorđević

Dans l'article [1] D. S. Mitrinović a trouvé la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f_1(x_1, x_2) + f_2(x_2, x_3, x_4) + f_3(x_1, x_3, x_4) = 0 \tag{1}$$

dans laquelle les fonctions inconnues f_1, f_2, f_3 ne dépendent pas du même nombre d'arguments et

$$f_i : S^3 \to M \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où S est un ensemble non vide arbitraire et M un groupe abélien additif.

En partant de cette remarque, dans cet article nous allons considérée l'équation fonctionnelle

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2) + f_2(x_2, x_3, x_4) + \cdots + f_n(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) \\ + g_1(x_1, x_3, x_4) + g_2(x_1, x_3, x_5, x_6) + \cdots + g_{n-1}(x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = 0 \ (n > 1) \end{gathered} \tag{2}$$

dans laquelle, aussi, les fonctions inconnues ne dépendent pas du même nombre d'arguments et

$$f_i : S^{i+1} \to M, \ g_j : S^{j+2} \to M \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots n-1),$$

où S est un ensemble non vide arbitraire et M un groupe abélien additif.

Nous allons introduire d'abord les notations suivantes

$$\begin{aligned} R_{p,q}\,x &= (x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{q-1}, x_q) && (p, q \text{ nombres naturels}); \\ T_{p,q}\,x &= (x_p, x_{p+2}, \ldots, x_{q-2}, x_q) && (p, q \text{ impairs}), \\ &= (x_p, x_{p+2}, \ldots, x_{q-3}, x_{q-1}) && (p \text{ impair, } q \text{ pair}), \\ &= (x_{p+1}, x_{p+3}, \ldots, x_{q-2}, x_q) && (p \text{ pair, } q \text{ impair}), \\ &= (x_{p+1}, x_{p+3}, \ldots, x_{q-3}, x_{q-1}) && (p, q \text{ pairs}), \end{aligned}$$

où p et q $(p < q)$ sont deux nombre naturels.

* Présenté le 25 décembre 1964 par D. S. Mitrinović.

Alors, l'équation fonctionnelle (2) a la forme suivante

$$f_1(R_{1,2}x)+f_2(R_{2,4}x)+\cdots+f_n(R_{n,2n}x)$$
$$+g_1(T_{1,4}x,x_4)+g_2(T_{1,6}x,x_6)+\cdots+g_{n-1}(T_{1,2n}x,x_{2n})=0. \tag{3}$$

Dans ce qui suit, nous allons prouver le résultat suivant.

Théorème. — *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (3) *est donnée par*

$$\begin{aligned} (4)\qquad f_1(R_{1,2}x)&=H_1(T_{1,2}x)-F_1(R_{2,2}x),\\ f_r(R_{r,2r}x)&=(-1)^r F_{r-1}(R_{r,2r-2}x)+(-1)^{r+1}G_{r-1}(T_{r,2r}x,x_{2r})\\ &\quad+(-1)^r F_r(R_{r+1,2r}x)\quad (r=2,3,\ldots,n-1),\\ f_n(R_{n,2n}x)&=(-1)^n F_{n-1}(R_{n,2n-2}x)+(-1)^{n+1}G_{n-1}(T_{n,2n}x,x_{2n}),\\ g_k(T_{1,2k+2}x,x_{2k+2})&=(-1)^k H_k(T_{1,2k}x)+(-1)^{k+1}G_k(T_{k+1,2k+2}x,x_{2k+2})\\ &\quad+(-1)^k H_{k+1}(T_{1,2k+2}x)\quad (k=1,2,\ldots,n-2),\\ g_{n-1}(T_{1,2n}x,x_{2n})&=(-1)^{n-1}H_{n-1}(T_{1,2n-2}x)+(-1)^n G_{n-1}(T_{n,2n}x,x_{2n}), \end{aligned}$$

où F_i, H_j, G_s $(i,j,s=1,2,\ldots,n-1)$ *désignent des fonctions quelconques à valeurs appartenant à* M.

Démonstration. — Nous allons démontré ce théorème par induction. Dans le cas où $n=2$, l'équation (3) a la forme suivante

$$f_1(R_{1,2}x)+f_2(R_{2,4}x)+g_1(T_{1,4}x,x_4)=0.$$

La solution générale de cette équation est (*voir*: [1])

$$f_1(R_{1,2}x)=H_1(T_{1,2}x)-F_1(R_{2,2}x),\qquad f_2(R_{2,4}x)=F_1(R_{2,2}x)-G_1(T_{2,4}x,x_4),$$
$$g_1(T_{1,4}x,x_4)=-H_1(T_{1,2}x)+G_1(T_{2,4}x,x_4).$$

Donc, le théorème est vrai pour $n=2$.

Supposons à présent que le théorème est vrai pour n naturel fixe. L'équation (2) pour $n+1$ a la forme suivante

$$f_1(R_{1,2}x)+f_2(R_{2,4}x)+\cdots+f_n(R_{n,2n}x)+f_{n+1}(R_{n+1,2n+2}x)$$
$$+g_1(T_{1,4}x,x_4)+\cdots+g_{n-1}(T_{1,2n}x,x_{2n})+g_n(T_{1,2n+2}x,x_{2n+2})=0. \tag{5}$$

En posant dans (5) $x_i=x_i^0$ $(x_i^0=\text{const}\in S;\ i=1,2,\ldots,n)$, on obtient

$$f_{n+1}(R_{n+1,2n+2}x)=(-1)^{n+1}F_n(R_{n+1,2n}x)+(-1)^n G_n(T_{n+1,2n+2}x,x_{2n+2}), \tag{6}$$

où F_n, G_n designent deux fonctions quelconques.

En substituant (6) dans (5), on obtient l'équation

$$A_1(R_{1,2}x)+A_2(R_{2,4}x)+\cdots+A_n(R_{n,2n}x)$$
$$+B_1(T_{1,4}x,x_4)+\cdots+B_{n-1}(T_{1,2n}x,x_{2n})+B_n(T_{1,2n+2}x,x_{2n+2})=0, \tag{7}$$

avec

(8) $A_i = f_i,\ B_i = g_i\,(i = 1, 2, \ldots, n-1),\ A_n = f_n + (-1)^{n+1} F_n,\ B_n = g_n + (-1)^n G_n.$

En posant $x_i = x_i^0\ (i = 2, 4, \ldots, 2n-2, 2n)$ dans l'équation fonctionnelle (7), on obtient

(9) $B_n(T_{1,2n+2}\,x, x_{2n+2}) = (-1)^n H_n(T_{1,2n}\,x)$ (H_n la fonction quelconque).

D'après (9), l'équation (7) prend la forme que voici

$$A_1(R_{1,2}\,x) + A_2(R_{2,4}\,x) + \cdots + A_n(R_{n,2n}\,x) + C_1(T_{1,4}\,x, x_4) + \cdots + C_{n-1}(T_{1,2n}\,x, x_{2n}) = 0, \tag{10}$$

avec

$$C_i = B_i\ (i = 1, 2, \ldots, n-2),\ C_{n-1} = B_{n-1} + (-1)^n H_n. \tag{11}$$

L'équation fonctionnelle (10) est précisément l'équation (3). Grâce à l'hypothèse inductive, la soloution générale de l'équation (10) est donnée par (4) où il faut remplacer f_i par A_i et g_i par C_i.

Grâce aux égalités (11), (9), (8), (6), on trouve que la solution générale de l'équation (5) est donnée par

$$\begin{aligned}
f_r(R_{r,2r}\,x) &= A_r(R_{r,2r}\,x) \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1),\\
f_n(R_{n,2n}\,x) &= A_n(R_{n,2n}\,x) + (-1)^n F_n(R_{n+1,2n}\,x),\\
f_{n+1}(R_{n+1,2n+2}\,x) &= (-1)^{n+1} F_n(R_{n+1,2n}\,x) + (-1)^n G_n(T_{n+1,2n+2}\,x, x_{2n+2}),\\
g_k(T_{1,2k+2}\,x, x_{2k+2}) &= C_k(T_{1,2k+2}\,x, x_{2k+2}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n-2),\\
g_{n-1}(T_{1,2n}\,x, x_{2n}) &= C_{n-1}(T_{1,2}x, x_{2n}) + (-1)^{n+1} H_n(T_{1,2n}x),\\
g_n(T_{1,2n+2}\,x, x_{2n+2}) &= (-1)^n H_n(T_{1,2n}\,x) + (-1)^{n+1} G_n(T_{n+1,2n+2}\,x, x_{2n+2}).
\end{aligned} \tag{12}$$

Le théorème énoncé est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović: *Équation fonctionnelle à fonctions inconnues dont toutes ne dépendent pas du même nombre d'arguments.* Ces Publications, № 120 (1963).