PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SERIE: MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 6 (1956)

SUR UNE QUESTION D'ANALYSE DIOPHANTIENNE

Dragoslav S. Mitrinovitch

1. Partons de la formule sommatoire suivante

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} [a+(k-1)p]\,[b+(k-1)q]$$

$$\equiv \frac{1}{6}\, n\,[2pq\,n^2+3\,(aq+bp-pq)\,n+pq-3\,(aq+bp)+6\,ab]\,,$$

avec: $pq \neq 0$.

Dans le cas où les a, b, p, q sont des nombres rationnels, la somme

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} [a+(k-1)p]\,[b+(k-1)q]$$

s'exprime comme le produit de trois facteurs linéaires en n, à coefficients rationnels, si — et seulement si — l'expression

$$(3) \qquad 9\,(aq+bp-pq)^2-8\,pq\,[pq-3\,(aq+bp)+6\,ab]$$

est le carré d'un nombre rationnel. S'il en est ainsi, nous dirons, dans la suite, que la somme (2) jouit de la *propriété* (P).

Nous avons indiqué $\{cf\,[\mathbf{1}]$, p. 69—72$\}$ que la somme (2) jouit de la *propriété* (P) dans les cas particuliers que voici:

1^0 $p=a$;

2^0 $p/a=(3q-2\,b)/(5\,q-3\,b)$, $\qquad (5\,q \neq 3\,b)$;

3^0 $p/a=(3\,q-4\,b)/(2\,q-3\,b)$, $\qquad (2\,q \neq 3\,b)$;

avec a, b, q nombres rationnels.

Comme la somme (2) reste invariable lorsqu'on y échange à la fois a avec b et p avec q, on conclut que la somme (2) jouit aussi de la *propriété* (P) dans les cas suivants:

4^0 $q=b$;

5^0 $q/b=(3\,p-2\,a)/(5\,p-3\,a)$, $\qquad (5\,p \neq 3\,a)$;

6^0 $q/b=(3\,p-4\,a)/(2\,p-3\,a)$, $\qquad (2\,p \neq 3\,a)$,

avec a, b, p nombres rationnels.

2. *G. Palamà* nous a communiqué, dans une lettre, une infinité de solutions répondant à la question posée, solutions qu'il a trouvées de la manière suivante.

Si l'on pose

$$9(aq+bp-pq)^2 - 8pq[pq-3(aq+bp)+6ab] = [3(aq+bp-pq)+2\alpha pq]^2,$$

où α est un nombre rationnel quelconque, on obtient, les calculs nécessaires étant effectués, ce qui suit:

$$\frac{p}{a} = \frac{3[(2-\alpha)q-4b]}{(\alpha-2)[(\alpha-1)q+3b]} \tag{4}$$

avec: $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq 1-(3b)/q$.

Les α, a, b, q étant rationnels, l'équation (4) fournit p, qui est également rationel. On a ainsi une infinité de nombres rationnels a, b, p, q, pour lesquels la somme (2) s'exprime comme le produit de trois facteurs linéaires en n, à coefficients rationnels.

G. Palamà a montré aussi que les cas particuliers 2^0 et 3^0 sont englobés par la solution (4). En effet, si l'on y pose $\alpha = -4$ et $\alpha = -1$, on retrouve respectivement les cas 2^0 et 3^0.

3. Inspirés par la solution de *Palamà*, nous avons ensuite trouvé les solutions suivantes répondant à la question posée dans cette Note.

Remarquons, tout d'abord, que l'expression (3) se transforme en

$$[3(aq+bp)+pq]^2 - 48\,abpq, \tag{5}$$

ce qui est une forme commode pour ce qui suit.

Si $abpq=0$, alors (2) jouit de la *propriété* (P). Dans la suite nous supposerons $abpq \neq 0$.

Posons maintenant

$$[3(aq+bp)+pq]^2 - 48\,abpq = [3(aq+bp)+pq-R_K M_K]^2, \tag{6}$$

où R_K désigne un nombre rationnel quelconque, tandis que M_K a une des formes suivantes:

$$ab,\ ap,\ aq,\ bp,\ bq,\ pq. \tag{7}$$

Les transformations nécessaires étant faites, on obtient respectivement:

$$\frac{p}{a} = \frac{R_1(R_1 b - 6q)}{2[(R_1-24)q+3R_1 b]}, \tag{8}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{6(8b-R_2 a)}{R_2(6b-R_2 a+2q)}, \tag{9}$$

$$\frac{p}{a} = \frac{R_3 q(6-R_3)}{2[(24-3R_3)b-R_3 q]}, \tag{10}$$

$$(11)\qquad \frac{q}{b}=\frac{R_4 p(6-R_4)}{2[(24-3R_4)a-R_4 p]},$$

$$(12)\qquad \frac{q}{p}=\frac{6(8a-R_5 b)}{R_5(6a-R_5 b+2p)},$$

$$(13)\qquad \frac{p}{a}=\frac{6(8b-R_6 q)}{R_6[6b+(2-R_6)q]}.$$

On suppose remplies les conditions s'imposant pour que les relations $(8)-(13)$ aient un sens. Les cas écartés doivent être considérés à part; nous les omettons car leur étude peut être faite sans difficulté.

Par suite, nous avons obtenu plusieurs ensembles de solutions. Chacun de ces ensembles définit une infinité de solutions répondant à la question énoncée au début de cette Note.

Les relations $(8)-(13)$ font voir que l'on peut choisir à volonté par exemple, les R_K, a, b, q et alors p sera rationnel, s'il en est ainsi des a, b, q, R_K.

La solution de *Palamà* est précisément notre solution (8). En effet, si dans (4) on pose

$$\alpha=2-(24/R_1),$$

on retrouve (8).

La solution (13) se déduit également à partir de (4), en y posant $\alpha=2-(R_6/2)$.

Étant donné que la somme (2) reste invariable si l'on y échange a avec b et p avec q, la solution (12) se réduit à (9).

Par le même raisonnement on conclut que la solution (11) se ramène à (10).

Parmi les solutions $(8)-(13)$, les trois sont indépendantes, à savoir: (8), (9), (10).

Dans le cas où les paramètres a, b, p, q vérifient, par exemple, la relation (8), la somme (1) s'écrit comme suit

$$\frac{1}{3}pqn(n-n_1)(n-n_2),$$

où

$$n_1=1-(R_1\,ab)/(4pq),$$
$$n_2=[2pq+R_1\,ab-6(aq+bp)]/(4pq).$$

4. *Exemples numériques.* 1⁰ Lorsqu'on pose, dans (9),

$$a=-1,\quad b=1/2,\quad q=2,\quad R_2=-1,$$

on trouve $p=-6$.

Dans ce cas, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(-6k+5)\left(2k-\frac{3}{2}\right)\equiv-\frac{1}{2}n^2(8n-7).$$

2⁰ Posons dans (10)

$$a=1,\quad b=2,\quad q=1/2,\quad R_3=1/2.$$

On obtient $p=11/716$.

En ce cas

$$\frac{1}{1432}\sum_{k=1}^{n}(11\,k+705)(k+3)\equiv\frac{1}{8592}\,n\,(n+95)(22\,n+157).$$

5. Le problème envisagé ci-dessus est le cas particulier du problème s'énonçant comme suit:

Trouver tous les ensembles des nombres rationnels

$$a_\nu,\ p_\nu\ \ (\nu=1,\ 2,\ldots.N)$$

tels que la somme

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\prod_{\nu=1}^{N}[a_\nu+(k-1)p_\nu]\right\}$$

soit le produit de $N+1$ *facteurs linéaires en* n, *à coefficients rationnels.*

Nous avons proposé ce problème dans notre article **[1]**, à la page 72. Dans cette Note nous avons indiqué plusieurs classes de solutions du problème en question pour $N=2$. Il serait aussi intéressant de résoudre le même problème pour $N=3,\ 4,\ldots$, mais celui-ci est beaucoup plus difficile que pour $N=2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinovitch:

Sur les nombres de Stirling (Annuaire de la Faculté de philosophie de l'Université à Skopje, Section des sciences naturelles, t. 1, 1948, p. 49—95).

REZIME

O JEDNOM PITANJU IZ DIOFANTOVE ANALIZE

Dragoslav S. Mitrinović

Problem da se odrede racionalni brojevi a, b, p, q, pod uslovom da se zbir (2) može izraziti kao proizvod tri linearna faktora po n, sa racionalnim koeficijentima, svodi se na ispitivanje kada će izraz (3) biti kvadrat jednog racionalnog broja.

U članku su data tri nezavisna rešenja: (8), (9) i (10) ovog problema. U (8), (9) i (10) parametri R_1, R_2, R_3 označavaju tri proizvoljna racionalna broja.

Ustvari, u ovom članku navedeni su skupovi racionalnih rešenja (a, b, p, q, N) jednačine

$$[3\,(aq+bp)+pq]^2-48\,abpq=N^2.$$