PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 129 (1964)

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE D. S. MITRINOVIĆ CONCERNANT UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE*

Marek Kuczma

D. S. Mitrinović (Problème 1, Matematički Vesnik 1 (16), 1964, p. 53) a posé le problème suivant:

Soit E un ensemble quelconque et M un groupe abélien. Déterminer la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$f(x, y, z)-f(y, x, z)=f(x, x, z)+f(y, x, y) \tag{1}$$

dans la classe des fonctions $f(x, y, z)$ définies dans $E\times E\times E$ et prenant ses valeurs dans M.

Nous décomposons l'ensemble $E\times E\times E$ en trois sous-ensembles disjoints A, B, C. Nous posons (dans ce qui suit x, y, z signifient toujours des éléments de l'ensemble E):

$$A=\{(x, y, z): \; x=y\}.$$

Soit B_0 un ensemble qui contient exactement un élément de chaque paire (x, y), (y, x) où $x\neq y$. (Nous profitons ici de l'axiome du choix!). Nous posons $B=B_0\times E$ et nous définissons l'ensemble C par l'égalité

$$C=(E\times E\times E)\setminus(A\cup B).$$

Alors $(x, y, z)\in C$ si, et seulement si, $(y, x, z)\in B$, et réciproquement. Nous posons encore;

$$D=\{(x, y, z): \; y=z\}\cap B,$$

$$F=\{(x, y, z): \; x=z\}\cap C.$$

Nous allons maintenant démontrer notre

P r o p o s i t i o n. *La solution générale de l'équation* (1) *est donnée par la formule suivante:*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= g(x, y, z) && \textit{pour } (x, y, z)\in B\setminus D\\ &= -2g(x, y, x)+a(x) && \textit{pour } (x, y, z)\in D\\ &= g(y, x, z)+g(y, x, y)+a(x) && \textit{pour } (x, y, z)\in C\setminus F\\ &= -g(y, x, y)+a(x)+a(y) && \textit{pour } (x, y, z)\in F\\ &= a(x) && \textit{pour } (x, y, z)\in A, \end{aligned} \tag{2}$$

* Présenté par D. S. Mitrinović.

où $g(x, y, z)$ est une fonction arbitraire définie dans $B \setminus D$ et prenant ses valeurs dans M et $a(x)$ est une fonction arbitraire définie dans E et prenant ses valeurs dans M et satisfaisant à la condition

(3) $$a(x) = -a(x).$$

Démonstration. D'abord nous démontrerons que la fonction (2) satisfait en effet à l'équation (1). Nous devons distinguer cinq cas.

1. $(x, y, z) \in B \setminus D$. Alors $(y, x, z) \in C \setminus F$, $(x, x, z) \in A$, $(y, x, y) \in F$. Nous avons $f(x, y, z) = g(x, y, z)$, $f(y, x, z) = g(x, y, z) + g(x, y, x) + a(y)$, $f(x, x, z) = a(x)$, $f(y, x, y) = -g(x, y, x) + a(x) + a(y)$ et

$$f(x, y, z) - f(y, x, z) = -g(x, y, x) + a(y) = f(x, x, z) + f(y, x, y).$$

2. $(x, y, z) \in D$. Alors $(y, x, z) \in F$, $(x, x, z) \in A$, $(y, x, y) \in F$. Nous avons $f(x, y, z) = -2g(x, y, x) + a(x)$, $f(y, x, z) = -g(x, y, x) + a(x) + a(y)$, $f(x, x, z) = a(x)$, $f(y, x, y) = -g(x, y, x) + a(x) + a(y)$ et

$$f(x, y, z) - f(y, x, z) = -g(x, y, x) + a(y) = f(x, x, z) + f(y, x, y).$$

3. $(x, y, z) \in C \setminus F$. Alors $(y, x, z) \in B \setminus D$, $(x, x, z) \in A$, $(y, x, y) \in B \setminus D$. Nous avons $f(x, y, z) = g(y, x, z) + g(y, x, y) + a(x)$, $f(y, x, z) = g(y, x, z)$, $f(x, x, z) = a(x)$, $f(y, x, y) = g(y, x, y)$ et

$$f(x, y, z) - f(y, x, z) = g(y, x, y) + a(x) = f(x, x, z) + f(y, x, y).$$

4. $(x, y, z) \in F$. Alors $(y, x, z) \in D$, $(x, x, z) \in A$, $(y, x, y) \in B \setminus D$. Nous avons $f(x, y, z) = -g(y, x, y) + a(x) + a(y)$, $f(y, x, z) = -2g(y, x, y) + a(y)$, $f(x, x, z) = a(x)$, $f(y, x, y) = g(y, x, y)$ et

$$f(x, y, z) - f(y, x, z) = g(y, x, y) + a(x) = f(x, x, z) + f(y, x, y).$$

5. $(x, y, z) \in A$. Alors $(y, x, z) \in A$, $(x, x, z) \in A$, $(y, x, y) \in A$, et nous avons $f(x, y, z) = f(y, x, z) = f(x, x, z) = f(y, x, y) = a(x)$ et en vertu de (3) l'équation (1) est remplie.

Nous démontrerons maintenant que chaque solution de (1) a la forme (2). Soit $f(x, y, z)$ une solution de l'équation (1). Posons

$$g(x, y, z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x, y, z) \qquad \textit{pour } x \in B \setminus D,$$

$$a(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x, x, x) \qquad \textit{pour } x \in E.$$

Alors (1) pour $x = y = z$ donne la relation (3).

Posons dans (1) $y = x$. Nous obtenons

(4) $$f(x, x, z) = a(x),$$

ce qui signifie que pour $x \in A$ la relation (2) est vrai.

En permutant x et y dans (1), nous obtenons en vertu de (4)

(5) $$f(y, x, z) = f(x, y, z) + a(y) + f(x, y, x).$$

En posant $z = y$ dans (5), il vient

(6) $$f(y, x, y) = f(x, y, y) + a(y) + f(x, y, x).$$

Il s'ensuit de (4), (5) et (6) que

$$f(x, y, z) - f(y, x, z) = -a(y) - f(x, y, x),$$

$$f(x, x, z) + f(y, x, y) = a(x) + f(x, y, y) + a(y) + f(x, y, x).$$

Ainsi, vu (1), (3) et (4), on a

$$f(x, y, y) = -2f(x, y, x) + a(x). \tag{7}$$

Si $(x, y, y) \in D$, alors $(x, y, x) \in B \setminus D$ et $f(x, y, x) = g(x, y, x)$. La relation (7) montre que (2) est valable pour $(x, y, z) \in D$.

Si $(x, y, z) \in C \setminus F$, alors $(y, x, z) \in B \setminus D$ et $(y, x, y) \in B \setminus D$. La relation (1) donne dans ce cas

$$f(x, y, z) = f(y, x, z) + f(x, x, z) + f(y, x, y) = g(y, x, z) + g(y, x, y) + a(x),$$

c'est-à-dire nous trouvons la formule (2) valable pour $(x, y, z) \in C \setminus F$. Finalement, si $(x, y, z) \in F$, alors $(y, x, z) \in D$ et $(y, x, y) \in B \setminus D$ et nous obtenons de (1)

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(y, x, z) + f(x, x, z) + f(y, x, y) \\ &= -2g(y, x, y) + a(y) + a(x) + g(y, x, y) \\ &= -g(y, x, y) + a(x) + a(y), \end{aligned}$$

ce n'est que la relation (2). Ainsi notre proposition est complètement démontrée.