PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 128 (1964)

SUR LES FONCTIONS DE BESSEL MODIFIÉES DE PREMIÈRE ESPÈCE D'ORDRE ENTIER DE PLUSIEURS VARIABLES*

Radovan R. Janić

B. Jekowsky [1] a donné la définition suivante: La fonction de Bessel modifiée de première espèse d'ordre k entier de n variables est le coefficient de u^k dans le développement suivant

$$\exp\left\{\sum_{m=1}^{n}\frac{x_m}{2}\left(u^m+u^{-m}\right)\right\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) u^k .$$

Dans l'article [1] on n'a considéré que le cas où $n=2$. Nous avons étendu des résultats obtenu dans l'article cité au cas où n est un nombre entier quelconque. Les résultats donnés ici, généralisant ceux de Jekowsky, ne sont pas une simple extension ou une analogie, mais, par contre, dans certains cas il fallait suivre une nouvelle voie. Nous avons obtenu, en substance, les résultats suivants:

1. $$I_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\sum_{p_n=-\infty}^{+\infty} I_{p_n}\left(x_n\right) I_{k-n p_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\right).$$

Une formule analogue ne se trouve pas dans [1]. Nous avons aussi démontré la formule suivante

$$I_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\sum_{p_n=-\infty}^{+\infty} \cdots \sum_{p_2=-\infty}^{+\infty} I_{p_n}\left(x_n\right) \cdots I_{p_2}\left(x_2\right) I_{k-\lambda}\left(x_1\right), \text{ avec } \lambda=\sum_{m=2}^{n} m p_m .$$

2. $$I_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=I_{-k}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

$$I_k\left(-x_1, x_2, \ldots,(-1)^n x_n\right)=(-1)^k I_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right),$$

$$I_k\left(x_1,-x_2, \ldots,(-1)^{n-1} x_n\right)=(-1)^k I_k\left(-x_1,-x_2, \ldots,-x_n\right).$$

3. Si $P_r\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ est un polynôme d'Appell de n variables (voir [2]), on a

$$I_k\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{P_{k+s}\left(x_1, x_2 \ldots, x_n\right) P_s\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{2^{k+2 s}(k+s)!\, s!}$$

$$\frac{P_r\left(x_1, x_2 \ldots, x_n\right)}{2^r r!}=\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{P_s\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)}{2^s s!} I_{r+s}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right).$$

* Présenté par D. S. Mitrinović.

4. Nous avons obtenu le théorème d'addition pour les fonctions $I_k(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n)$ suivi de quelques conséquences.

5. Les formules qui sont analogues à la formule de Neumann

$$I_p^2(x_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi I_0(2x_1\cos\theta)\cos 2p\theta\, d\theta$$

ont la forme suivante

$$I_{k+p}(x_1, \ldots, x_n)\, I_{k-p}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi I_{2k}(2x_1\cos\theta, \ldots, 2x_n\cos n\theta)\cos 2p\,\theta\, d\theta$$

$$I_{k+p+1}(x_1, \ldots, x_n)\, I_{k-p}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi I_{2k+1}(2x_1\cos\theta, \ldots, 2x_n\cos n\,\theta)\cos(2p+1)\,\theta\, d\theta$$

6. La fonction $I_k(px_1, p^2x_2, \ldots, p^nx_n)$ est représentée par la série suivante

$$I_k(px_1, p^2x_2, \ldots, p^nx_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} p^{k+i}\,\frac{P_i\{(p-p^{-1})\,x_1, \ldots, (p^n-p^{-n})\,x_n\}}{2^i\, i\,!}\, I_{k+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où P_i est un polynôme d'Appell. On a aussi la formule suivante:

$$I_k(px_1, p^2x_2, \ldots, p^nx_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} p^{k+i}\,\frac{P_i\{(p+p^{-1})\,x_1, \ldots, (p^n+p^{-n})\,x_n\}}{2^i\, i\,!}\, J_{k+i}(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où J_k est une fonction de Bessel de première espèce de n variables (voir [3]).

7. On a obtenu certaines formules récurrentes, comme par exemple,

$$I_{k-m}(x_1, \ldots, x_n) + I_{k+m}(x_1, \ldots, x_n) = 2\,\frac{\partial I_k(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

$$2kI_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m=1}^{n} mx_m\{I_{k-m}(x_1, \ldots, x_n) - I_{k+m}(x_1, \ldots, x_n)\},$$

$$2^p\,\frac{\partial^p I_k}{\partial x_m^p} = I_{k-pm} + \binom{p}{1} I_{k-(p-2)m} + \binom{p}{2} I_{k-(p-4)m} + \cdots + I_{k+m}.$$

8. En appliquant les identités précédentes on a sommé les séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k\,I_k, \quad \sum_{k=-1}^{-\infty} k\,I_k, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,I_k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k\,I_{2k}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty}(2k+1)\,I_{2k+1},$$

avec $I_k \equiv I_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

9. Dans son travail [1] B. Jekowsky a formé dans le cas où $n=2$ deux équations aux derivées partielles qui sont analogues à l'équation différentielle de Bessel. Nous avons également formé des équations analogues pour les cas $n=3$ et $n=4$.

Les démonstrations et des développements donnés plus haut paraîtront dans le journal Matematički vesnik, t. 1 (1964).

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Jekowsky: *Étude sur les fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordre k entier à deux variables*, Journal de Mathématiques pures et appliqués, t. 41, 1962.

[2] P. Appell: *Sur une classe de polynômes*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 9, 1880, p. 118—144.

[3] U. Akimoff: *Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables et leur application en mécanique*, Leningrad 1922 (cité d'après [1]).