PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 126 (1964)

UN THÉORÈME SUR LA CONVERGENCE UNIFORME DE LA SÉRIE DE TAYLOR À LA BORDURE*

Lazar Karadžić

Théorème — Pour que la série de Taylor

(1) $$\sum a_n z^n$$

sur l'arc $\alpha+\delta<\arg z<2\pi+\alpha-\delta$ $(\delta>0)$ *de la bordure de convergence* $|z|=1$ *converge uniformément, il faut et il suffit que*

(2) $$\sum |a_n|^2 \lg_p n<\infty$$

(3) $$\left|\frac{a_n}{a_{n+r}}\right|=1+O\left((n\lg n\ldots\lg_{p-1}n)^{-\frac{1}{2}}\right)\quad(r=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm s)$$

(4) $$0<\arg a_2-\arg a_1\leqslant\cdots\leqslant\arg a_n-\arg a_{n-1}\leqslant\cdots<\beta<2\pi$$

où

$$e^{\alpha i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Nous pouvons réduire les parties réelle et imaginaire de la somme partielle de la série (1) à la forme

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k-\beta_k b_k$$

selon le procédé suivant:

(5) $$s_n(e^{\theta i})=\sum_0^n a_k e^{k\theta i}=\sum_{k=0}^{n}|a_k|\cos(\alpha_k+k\theta)+i\sum_{k=0}^{n}|a_k|\sin(\alpha_k+k\theta)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{|a_k|}{c_k}c_k\cos(\alpha_k+k\theta)+i\sum_{k=0}^{n}\frac{|a_k|}{c_k}c_k\sin(\alpha_k+k\theta)=$$

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{|a_{m_k}|}{c_{m_k}}c_{m_k}\cos(\alpha_{m_k}+m_k\theta)+\sum_{k=0}^{q}\frac{|a_{n_k}|}{c_{n_k}}c_{n_k}\cos(n_k\theta+\alpha_{n_k})+$$

$$i\left[\sum_{k=0}^{r}\frac{|a_{p_k}|}{c_{p_k}}c_{p_k}\sin(\alpha_{p_k}+p_k\theta)+\sum_{k=0}^{s}\frac{|a_{q_k}|}{c_{q_k}}c_{q_k}\sin(\alpha_{q_k}+q_k\theta)\right],$$

* Présenté par D. Mihailović, S. Fempl et S. Ćetković.

où

$$p+q=r+s=n;\ \alpha_n=\arg a_n;\ \cos\,(\alpha_{m_k}+m_k\theta)>0,$$

$$\cos\,(\alpha_{n_k}+n_k\theta)<0;\ \sin\,(\alpha_{p_k}+p_k\theta)>0,\ \sin\,(a_{q_k}+q_k\theta)<0;$$

$$c_1>c_2>\cdots>c_n\to 0,\, n\to\infty;\ \sum c_n^2<\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=1.$$

D'après le théorème 2 du travail [2], pour que la suite (5) converge uniformément, il faut et il suffit que soient satisfaites nom seulement les conditions (2) et (3) mais aussi les conditions

$$\sum_1^p \alpha_k-\beta_k=\sum_0^n \cos\,(\alpha_k+k\theta)\ \left(=\sum_0^n \sin\,(\alpha_k+k\theta)\right)=O\,(1),$$

qui peuvent être écrites sous la forme suivante

$$\left|\sum_1^n e^{(\alpha_k+k\theta)\,i}\right|=O\,(1),\quad \theta\in(\alpha,\beta). \tag{6}$$

La condition (6) est satisfaite dans le cas spécial où la condition (4) est satisfaite. La relation (6) est, donc, satisfaite dans le cas spécial pour $\theta\in(\alpha+\delta,\ 2\pi+\alpha-\delta)$ où $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}(\arg a_n-\arg a_{n+1})$. Dans cet intervalle, alors, les suites

$$\left\{\lg\frac{\sum\limits_{k=0}^{q}(1+c_{n_k}\cos(\alpha_{n_k}+n_n\theta))}{\sum\limits_{k=0}^{p}(1-c_{m_k}\cos(\alpha_{m_k}+m_k\theta))}\right\},$$

$$\left\{\lg\frac{\prod\limits_{k=0}^{s}(1+c_{q_k}\sin(\alpha_{q_k}+q_k\theta))}{\prod\limits_{k=0}^{r}(1-c_{p_k}\sin(\alpha_{p_k}+p_k\theta))}\right\},$$

lorsque

$$c_n=(n\lg n\ldots\lg_{p-1}n)^{-\frac{1}{2}}(\lg_p^{\alpha}n)^{-1}\quad\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$$

convergent uniformément elles aussi.

Du théorème précédant il s'enssuit le résultat suivant:

Si

$$\sum|a_n|^2\,\lg_p n<\infty$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1+O\,((n\lg n\ldots\lg_{p-1}n)^{-\frac{1}{2}})\quad(r=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm s) \tag{7}$$

$$|a_n|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\quad\left(\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1\right)$$

la fonction $f(z)$, *définie par la série de Taylor* (1), *possède alors, sur la bordure de convergence* $|z|=1$ *un seul point singulier* z_0, *à savoir* $z_0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = e^{\alpha i}$.

Fabry a démontré dans le travail [1]:

La limite de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$, *si elle existe, donne un point singulier.*

Le résultat ci-dessus précise le cas lorsque la limite de $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ est l'unique point singulier de la fonction sur la bordure de convergence.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Fabry: *Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans lès cas très généraux.* Annales scientifiques de l'Ecole Normale supérieure, 3e série, T. XIII, 1896.

[2] L. Karadžić: *Remarques sur certains théorèmes de la théorie de séries* — travail paru dans ces Publications.