PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 125 (1964)

UN THÉORÈME RELATIF AUX SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES*

Lazar Karadžić

Dans le travail [1] Fatou a démontré: *Si la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_1^{\infty} a_n \cos n x + b_n \sin n x, \tag{1}$$

où

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

est une série de Fourier de la fonction continue, elle converge alors presque partout uniformément.

Dans le présent article sera traitée la question de la convergence uniforme de la série (1) uniquement pour le cas où ses coefficients sont positifs.

Théorème — Pour que la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2}+\sum^{\infty} a_n \cos n x + b_n \sin n x \quad (a_n > 0, \quad b_n > 0) \tag{2}$$

converge uniformément dans l'intervalle $(\delta,\ 2\pi-\delta)$ $(\delta > 0)$ *il faut et il suffit que*

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \lg_p n < \infty \tag{3}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+r}} = O\left((n \lg n \ldots \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{b_n}{b_{n+r}} = O\left((n \lg n \ldots lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{4}$$

$$(r = \pm 1,\ \pm 2, \ldots,\ \pm s).$$

La somme partielle de la série trigonométrique (2) peut être réduite à la forme $\sum_1^n \alpha_k a_k - \beta_k b_k$ de la façon suivante:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k x + b_k \sin k x = \tag{5}$$

$$\frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{c_k} c_k \cos k x + \frac{b_k}{c_k} c_k \sin k x = \right.$$

$$\frac{a_0}{2} + \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{a_{m_k}}{c_{m_k}} c_{m_k} \cos m_k x + \sum_{k=1}^{q} \frac{a_{n_k}}{c_{n_k}} c_{nk} \cos n_k x \right] +$$

* Présenté par D. Mihailović, S. Fempl et S. Ćetković.

$$\left[\sum_{k=1}^{r}\frac{b_{p_k}}{c_{p_k}}\sin p_k x+\sum_{k=1}^{s}\frac{b_{q_k}}{c_{q_k}}\,c_{q_k}\sin q_k x\right],\quad x\in(\delta,\ 2\pi-\delta)$$

où

$$c_1>c_2>\cdots>c_n\to 0,\ n\to\infty\ ;\ \lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=1\ ;\ \sum_1^{\infty}c_n^2<\infty\ ;$$

$\cos m_k x>0,\ \cos n_k x<0;\ \sin p_k x>0,\ \sin q_k x<0;\ p+q=r+s=n.$

En vertu du théorème 2 du travail [2], pour que la suite (5) converge uniformément, il faut et il suffit que soient satisfaitent non seulement les conditions (3) et (4), mais aussi la condition

$$\sum_1^{p}\alpha_k-\beta_k=\sum_1^{n}\cos k\,x\left(=\sum_1^{n}\sin k\,x\right)=O\,(1). \tag{6}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty}\ \lg\frac{\prod_{k=1}^{q}(1+c_{n_k}\cos n_k x)}{\prod_{k=1}^{p}(1-c_{m_k}\cos m_k x)}=A\quad(|A|<\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\ \lg\frac{\prod_{k=1}^{s}(1+c_{q_k}\sin q_k x)}{\prod_{1}^{r}(1-c_{p_k}\sin p_k x)}=B\quad(|B|<\infty),$$

$$\text{pour } c_n=(n\lg n\ldots lg_{p-1}n)^{-\frac{1}{2}}(\lg_p n)^{-\alpha}\quad\left(\alpha>\frac{1}{2}\right).$$

La condition (6) étant satisfaite pour $x\in(\delta,\ 2\pi-\delta)$ le théorème précédent est par là démontré.

De ce théorème il s'ensuit, dans le cas spécial, le théorème susmentionné de Fatou sous la forme modifiée:

Pour que la série (2) *converge uniformément dans l'intervalle* $(\delta,\ 2\pi-\delta)$ *il faut et il suffit que*

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),\quad b_n=o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+r}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+r}}=1\quad(r=\pm 1,\ \pm 2,\ldots,\pm s).$$

La condition (6) peut être remplacée par la condition

$$\left|\sum_{k=1}^{n}e^{kxi}\right|=O\,(1),\quad x\in(\delta,\ 2\pi-\delta).$$

Si dans la série trigonométrique (1) $\arg a_n=\arg b_n=m_n\pi$, où m_n est un nombre naturel, au lieu de la condition (6) on peut écrire la condition suivante

$$\left|\sum_1^{n}e^{(m_k+k\,x)\,i}\right|=O\,(1),\quad x\in(\alpha,\ \beta).$$

D'après ce qui précède, on peut formuler ce résultat:

Pour que la série trigonométrique

$$\frac{a_q}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos n\,x + b_n \sin n\,x$$

(arg $a_n = \arg b_n = m_n \pi$, m_n est un nombre naturel)

converge uniformént dans l'intervalle (α, β) *il faut et il suffit que*

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \lg_p n < \infty$$

$$\frac{a_n}{a_{n+r}} \left(\text{ou } \frac{b_n}{b_{n+r}}\right) = O\left((n \lg n \ldots \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

et la suite

$$\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} e^{(m_k + k\,x)\,i} \right| \right\}$$

dans (α, β) *uniformément limitée.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Fatou: *Séries trigonométriques et séries de Taylor.* AM, 30 (1906).

[2] L. Karadžić: *Remarques sur certains théorèmes de la théorie de séries*—travail paru dans ces Publications.