PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 124 (1964)

SUR LA SOMMABILITÉ D'UNE CLASSE DE SÉRIES SELON UN PROCÉDÉ DÉTERMINÉ*

Lazar Karadžić

Dans le présent article on a formulé les conditions nécessaires et suffisantes pour que la série ayant la forme

$$\sum_{1}^{\infty} a_n - b_n \tag{1}$$

converge lorsqu'elle est sommable selon le procédé

$$\sum_{1}^{\infty} u_{2n-1}(t)\, a_n - u_{2n}(t)\, b_n \tag{2}$$

$$(0 < u_n(t) < 1,\ t \in (0, \infty);\ \lim_{t \to \infty} u_n(t) = 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Théorème 1 — *Pour que la série* (1), *qui est sommable selon le procédé* (2) *converge, il faut et il suffit que*

$$\sum_{1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 < \infty$$

$$u_{n+r}(t) - u_n(t) = O(a_n),\ n \to \infty,\ t \in (0, \infty) \quad (r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm s).$$

Ce théorème s'ensuit du théorème 1 du travail [1].

Si la série (1) est sommable selon le procédé (2), la suite $\left\{ \lg \sum_{k=1}^{n} \frac{1-b_k}{1-a_k} \right\}$ converge, ce qui résulte d'une façon évidente de la relation

$$\sum_{1}^{\infty} u_{2n-1}(t)\, a_n - u_{2n}(t)\, b_n = \lg \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-b_k}{1-a_k} + \sum \varepsilon \left(\widehat{P_n Q_n} - \widehat{P_{n-1} Q_{n-1}}\right) \tag{3}$$

$$\times \left(1 - e^{-\overline{H_n K_n}}\right) + \sum \varepsilon \left(1 - e^{-\overline{H_{n-1} K_{n-1}}}\right)\left(1 - e^{-\overline{H_n K_n}}\right) \widehat{P_n Q_n}$$

$$(0 < a_n < 1,\ 0 < b_n < 1),$$

où

$$\sum \left(1 - e^{-\overline{H_n K_n}}\right)^2 < \infty$$

lorsque

$$\sum a_n^2 + b_n^2 < \infty.$$

---

* Présenté par D. Mihailović, S. Fempl et S. Ćetković.

La relation (3) peut être écrite aussi sous la forme

(4) $$\sum u_{2n-1}(t)\, a_n - u_{2n}(t)\, b_n = \sum c_{2n-1}\, u_{2n-1}(t) \frac{a_n}{c_{2n-1}} - c_{2n}\, u_{2n}(t) \frac{b_n}{c_{2n}} =$$

$$\lg \prod_1^{\infty} \frac{1-c_{2n}\,u_{2n}(t)}{1-c_{2n-1}u_{2n-1}(t)} + \sum \varepsilon\,(\widehat{P_n Q_n} - \widehat{P_{n-1} Q_{n-1}})\,(1-e^{-\overline{H_n K_n}}) +$$

$$\sum \varepsilon\,(\widehat{P_n Q_n}\,(1-e^{-\overline{H_{n-1} K_{n-1}}})\,(1-e^{-\overline{H_n K_n}}) \quad (c_1 > c_2 > \cdots > c_n \to 0,$$

$$c_n u_n(t) < 1,\ t \in (0, \infty)\,)$$

où

$$\sum (1-e^{-\overline{H_n K_n}})^2 < \infty,$$

lorsque $\sum c_n^2 < \infty$.

De (4), et en vertu du théorème 2 du travail [1] il suit le résultat suivant:

Pour que la série

$$\sum u_{2n-1}(t)\, a_n - u_{rn}(t)\, b_n,\ t \in (0, \infty)$$

converge, il faut et il suffit que

(5) $$\sum (a_n^2 + b_n^2) \lg_p n < \infty$$

(6) $$\frac{a_n}{b_{n+r}} = 1 + O((n \lg n \cdots \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}) \qquad (r = 0, \pm 1, \ldots, \pm s)$$

(7) $$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_k(t) = O(1),\ t \in (0, \infty).$$

Il s'ensuit de là:

La série (1), *les conditions* (5) *et* (6) *étant satisfaites, est sommable selon le procédé* (2) *toutes les fois que la condition* (7) *est satisfaite.*

Lorsqu'on écrit la somme partiele $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ de la série

(8) $$\sum_1^{\infty} a_n$$

sous la forme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p} a_{m_k} + \sum_{k=1}^{q} a_{n_k} \quad (p+q=n,\ a_{m_k} > 0,\ a_{n_k} < 0)$$

on peut alors, d'après le théorème précédent, formuler ce

Théorème 2 — *Pour que la série* (8) *dont la somme partielle* $\sum_1^n a_k$ *a* p *termes positifs et* q *négatifs,* $\lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} q = \infty$ $(p+q=n)$, *et qui est sommable selon le procédé*

(9) $$\sum_1^{\infty} a_n u_n(t)$$

$$(0 < u_n(t) < 1,\ t \in (0, \infty);\ \lim_{t\to\infty} u_n(t) = 1,\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

converge, il faut et il suffit que

(10) $$\sum a_n^2 < \infty$$

$$u_{n+r}(t) - u_n(t) = O(a_n), \qquad r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm s.$$

De l'hypothèse que la série (8) est sommable selon le procédé (9) il résulte

$$\lim_{n\to\infty} \lg \frac{\prod\limits_1^q (1-a_{n_k})}{\prod\limits_1^p (1-a_{m_k})} = A. \quad (|A| < \infty, \ p+q=n).$$

De cette relation ainsi que des relations (10) il résulte la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série (8).

Ainsi, par exemple, la série (8), si elle est sommable selon le procédé

$$\sum a_n e^{-\lambda_n \sigma} \qquad (\sigma \to 0)$$

converge lorsque

$$\sum a_n^2 < \infty, \quad \sum (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^2 < \infty.$$

La série (8) converge également si elle est sommable selon le procédé

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 s_1 + p_2 s_2 + \cdots + p_n s_n}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{P_k}{P_n}\right) \left(s_n = \sum_1^n a_k\right)$$

lorsque

$$\sum a_n^2 < \infty, \quad \sum \left(\frac{p_n}{P_n}\right)^2 < \infty.$$

$$\left(p_n > 0, \quad P_n = \sum_1^n p_k \to \infty, \quad n \to \infty\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Karadžić: *Remarques sur certains théorèmes de la théorie de séries* — travail paru dans ces Publications.