PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 123 (1964)

REMARQUES SUR CERTAINS THÉORÈMES DE LA THÉORIE DE SÉRIES*

Lazar Karadžić

Dans l'article [1] on a formulé les conditions nécessaires pour la convergence de la série

(1) $$\sum \alpha_n a_n - \beta_n b_n.$$

Le but que le présent article se propose est de démontrer certains théorèmes qui renferment les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence de la série (1).

La Figure 1. du travail [2] montre comment la somme de la série $\sum\limits_1^\infty a_n$ $(a_n > 0)$ peut être représentée comme somme des quadrilatères curvilignes

$$P_{n-1} P_n A_n' A_{n-1} \text{ dont les côtés } \overparen{P_{n-1} A_{n-1}} \text{ et } \overparen{P_n A_n}$$

sont les arcs-limites, $\overline{P_{n-1} P_n}$ et $\overline{A_{n-1} A_n'}$ les segments des lignes droites parallèles. Sur cette même figure on se rend facilement compte que la différence

$$-\lg \prod_{n=1}^\infty (1-a_n) - \sum_1^\infty a_n$$

représente la somme des triangles curvilignes $A_{n-1} A_n' A_n$ dont les côtés sont l'arc de l'équidistante $A_{n-1} A_n$, l'arc-limite $\overparen{A_n' A_n}$ et le segment de la droite $A_{n-1} A_n'$. Par conséquent

(2) $$-\lg \prod_{n=1}^\infty (1-a_n) - \sum_1^\infty a_n = \sum_1^\infty \mathit{aire}\, A_{n-1} A_n' A_n.$$

La série $\sum\limits_1^\infty \mathit{aire}\, A_{n-1} A_n' A_n$ converge, si la série

(3) $$\sum_1^\infty a_n^2$$

converge également.

La différence

(4) $$-\lg \prod_{n=1}^\infty (1-b_n) - \sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \mathit{aire}\, B_{n-1} B_n' B_n \qquad (0 < b_n < 1)$$

* Présenté par D. Mihailović, S. Fempl et S. Ćetković.

converge aussi si la série

$$\sum_{1}^{\infty} b_n^2 \tag{5}$$

converge.

En prenant les côtés des deux classes susmentionnées de triangles curvilignes sur la Fig. 1, on a formé, les quadrilatères curvilignes de forme $A_n C_n B_n' D_n$. De (2) et (4) il résulte

$$\begin{aligned} \sum_{1}^{\infty} a_n - b_n &= \lg \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-b_n}{1-a_n} + \sum_{1}^{\infty} aire\, B_{n-1} B_n' B_n - aire\, A_{n-1} A_n' A_n = \\ &\lg \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-b_n}{1-a_n} + \sum_{1}^{\infty} \varepsilon \; aire\, A_n C_n B_n' D_n \quad (\varepsilon = \pm 1). \end{aligned} \tag{6}$$

Si l'on désigne par A, B, C et D sur la figure susmentionnée respectivement l'ensemble de points $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $\{C_n\}$ et $\{D_n\}$ et si l'on fait $H_n \in A \cup B$ et $K_n \in C \cup D$, il résulte alors de la relation (6)

$$\sum_{1}^{\infty} a_n - b_n = \lg \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-b_n}{1-a_n} + \sum_{2}^{\infty} \varepsilon \left(1 - e^{-\overline{H_{n-1} K_{n-1}}}\right)\left(1 - e^{-\overline{H_n K_n}}\right), \tag{7}$$

où

$$\left(1 - e^{-\overline{H_{n-1} K_{n-1}}}\right)\left(1 - e^{-\overline{H_n K_n}}\right) = aire\, A_m C_m B_m D_m \;(= aire\, B_m D_m A_m' C_m).$$

Si la série $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2$ converge, en vertu de ce qui précède, il converge aussi absolument la série

$$\sum_{2}^{\infty} \varepsilon \left(-e^{-\overline{H_{n-1} K_{n-1}}}\right)\left(1 - e^{-\overline{H_n K_n}}\right)$$

et, par conséquent, aussi la série $\sum\limits_{1}^{\infty} (1 - e^{-\overline{H_n K_n}})^2$ converge-t-elle.

La série

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_n a_n - \beta_n b_n \qquad (\alpha_n > 0, \beta_n > 0, 0 < a_n < 1, 0 < b_n < 1) \tag{8}$$

peut être écrite, en vertu de la relation (7), compte tenu de ce qu'il a été dit dans l'article susmentionné [1], sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k - \beta_k b_k &= \lg \prod_{k=1}^{n} \frac{1-b_k}{1-a_k} + \sum_{k=2}^{m} \varepsilon \left(\widehat{P_k Q_k} - \widehat{P_{k-1} Q_{k-1}}\, e^{-\overline{H_{k-1} K_{k-1}}}\right) \\ &\times \left(1 - e^{-\overline{H_k K_k}}\right) = \lg \prod_{k=1}^{n} \frac{1-b_k}{1-a_k} + \sum_{k=2}^{m} \varepsilon \left(\widehat{P_k Q_k} - \widehat{P_{k-1} Q_{k-1}}\right) \\ &\times \left(1 - e^{-\overline{H_k K_k}} + \sum_{2}^{m} \varepsilon \left(1 - e^{-\overline{H_{k-1} K_{k-1}}}\right)\left(1 - e^{-\overline{H_k K_k}}\right) \widehat{P_{k-1} Q_{k-1}}, \end{aligned} \tag{9}$$

où

$$\overline{H_m K_m} = \pm \log \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (1-b_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n+r} (1-a_k)} \, \frac{1}{A},$$

$$\widehat{P_n Q_n} = \alpha_p \,(= \beta_{p+r}, \; r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm s)$$

Théorème 1 — *Pour que la série* (8) *converge, il faut et il suffit que*

(10) $$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-b_k}{1-a_k}=A \qquad (0<A<\infty)$$

(11) $$\sum_{1}^{\infty} a_n^2+b_n^2<\infty ,$$

(12) $$\alpha_n-\beta_{n+r}=O(a_n) \qquad (r=0,\ \pm 1,\ldots,\ \pm s).$$

De la relation

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\alpha_k a_k-\beta_k b_k=\lg\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1-b_k}{1-a_k}+\sum_{n+2}^{n+q}\varepsilon\ (\widehat{P_k Q_k}-\widehat{P_{k-1} Q_{k-1}})\ (1-e^{-\overline{H_k K_k}})+$$

$$\sum_{n+2}^{n+q}\varepsilon\ (\widehat{P_{k-1} Q_{k-1}}(1-e^{-\overline{H_{k-1}K_{k-1}}})\ (1-e^{-\overline{H_k K_k}}) \qquad (p\geqslant 1,\ q\geqslant 1)$$

il résulte la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série (8)

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p}\alpha_k a_k-\beta_k b_k\right|<\varepsilon,\ n>n_0(\varepsilon) \quad (p=1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Ceci est évident, car, selon les hypothèses (10), (11) et (12)

$$\left|\lg\sum_{n+1}^{n+p}\frac{1-b_k}{1-a_k}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ n>n_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

$$\sum_{n+2}^{n+q}\left|\widehat{P_k Q_k}-\widehat{P_{k-1} Q_{k-1}}\right|(1-e^{-H_k K_k})=\sum_{n+1}^{n+q}|\alpha_k-\beta_{k+r}|(1-e^{-\overline{H_k K_k}})<\frac{\varepsilon}{3},\ n>n_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

$$\sum_{n+2}^{n+q}\widehat{P_{k-1} Q_{k-1}}\,(1-e^{-\overline{H_{k-1}K_{k-1}}})\ (1-e^{-H_k K_k})<\frac{\varepsilon}{3},\quad n>n_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Théorème 2 — *Pour que la série* (8) *converge, il faut et il suffit que*

(13) $$\sum (a_n^2+b_n^2)\lg_p n<\infty$$

(14) $$\frac{an}{b_{n+r}}=1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}\lg n\ldots\lg_{p-1}n}\right) \quad (r=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm s)$$

(15) $$\sum_{1}^{n}\alpha_k-\beta_k=O\ (1).$$

Ce théorème résulte du Théorème 1. Ainsi, par exemple, si l'on écrit la série (8) sous la forme

$$\sum_{1}^{\infty}\alpha_n a_n-\beta_n b_n=\sum_{1}^{\infty}\alpha_n c_{2n-1}\frac{a_n}{c_{2n-1}}-\beta_n c_{rn}\frac{b_n}{c_{2n}},$$

où

(16) $$\sum_{1}^{\infty}c_n^2<\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=1$$

$$(c_1>c_2>\cdots>c_n\to 0),$$

à la suite (10) il correspondra la suite $\prod_{k=1}^{n}\frac{1-\beta_k c_{2k}}{1-\alpha_k c_{2k-1}}$ qui converge toutes les fois que la condition (15) est remplie, à la série convergente (11) il correspondra la série convergente (16) et à la relation (12) il correspondra la relation

$$\frac{a_n}{c_{2n-1}} - \frac{b_n}{c_{2n}} = O\,(c_n). \tag{17}$$

Si

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n \lg n \ldots \lg_{p-1} n \lg_p^{\alpha} n}} \quad \left(\frac{a_n}{c_n}, \left(\frac{b_n}{c_n}\right) = O\left(\frac{1}{\lg_p^{\alpha} n}\right), \ \alpha > \frac{1}{2}\right) \tag{18}$$

la relation (17) se réduit alors, à la fin, à la relation (14). Il résulte de (16) et de (18) la proposition (13).

Du théorème 2, lorsque

$$\alpha_n = \beta_n = 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

il s'ensuit ce

Théorème 3 — *Pour que la série* $\sum_1^{\infty} a_n - b_n$ *converge, il faut et il suffit que*

$$\sum (a_n^2 + b_n^2) \lg_p n < \infty$$

$$\frac{a_n}{b_{n+r}} = O\,((n \lg n \ldots \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}), \qquad r = 0, \ \pm 1, \ldots \pm s.$$

Du théorème 3 il s'ensuit ce

Théorème 4 — *Pour que la suite* $\{S_n - T_n\}$ où

$$S_1 < S_2 < \cdots < S_n \to \infty\,,\ n \to \infty\,,$$

$$T_1 < T_2 < \cdots < T_n \to \infty\,,\ n \to \infty\,,$$

converge, il faut et il suffit que

$$\sum ((S_{n+1} - S_n)^2 + (T_{n+1} - T_n^2)) \lg_p n < \infty$$

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{T_{n+1} - T_{n+r}} = 1 + O((n \lg n \ldots \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}) \qquad (r = 0, \ \pm 1, \ldots, \ \pm s).$$

De ce même théorème 3 il s'ensuit également ce

Théorème 5 — *Pour que la série* $\sum_1^{\infty} a_n$, *dont la somme partielle*

$$s_n = \sum_1^n a_k$$

a p termes positifs et q termes négatifs, où

$$p - q = O\,(1), \ n \to \infty \quad (p + q = n)$$

converge, il faut et il suffit que

$$\sum a_n^2 \lg_p n < \infty$$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+r}}\right| = 1 + O\ ((n \lg n \ldots \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}) \quad (r = \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \ \pm s).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Karadžić: *Certains théorèmes se rapportant aux séries à termes constants.* Publications de la Faculte d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade.

[2] L. Karadžić: *Un théorème du domaine des séries à termes constants.* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, Série: Mathématiques et physique, № 96 (1963).