PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 122 (1964)

NEKE UOPŠTENE RELACIJE U TEORIJI POVRATNE SPREGE*

Mirko M. Milić

1. Uvod

U klasičnoj teoriji linearnih sistema sa povratnom spregom osnovnu ulogu igra funkcija reakcije u odnosu na jedan parametar sistema [1]. Ona se eksplicitno javlja u svima važnijim relacijama, posebno i u Blackmanovoj formuli za ulazne imitanse [2]. Uvodjenjem Masonovih grafova prenosa signala [3], teorija povratne sprege dobija jedno novo vrlo pogodno sredstvo kako za topološko predstavljanje uzročno-posledičnih veza u sistemu, tako isto i za izračunavanje funkcija reakcije [4]. Pomoću ovih grafova sve Bodeove klasične relacije mogu se jednostavno i pregledno formulisati. Ove iste relacije se mogu primeniti i na proizvoljne linearne matematičke modele koji su predstavljeni grafom prenosa signala i koji u fizičkom pogledu ne moraju imati povratnu spregu, budući da postojanje orijentisanih petlji u grafu prenosa signala uslovljeno je prvenstveno načinom pisanja jednačina ravnoteže u uzročno-posledičnom obliku.

Nedavno je I. W. Sandberg [5] proširio Blackmanovu formulu uvodeći funkcije reakcije za jedan skup parametara umesto za jedan jedini parametar. Ovaj skup parametara karakterisan je jednom matricom koja zamenjuje transmitansu grane od interesa u grafu prenosa signala koji razmatra Truxal. Na taj način sve proširene Bodeove relacije koje su izvedene važe za graf prenosa signala u kome se matrica parametara od interesa pojavljuje kao transmitansa grane u jednoj orijentisanoj putanji izmedju čvora-izvora i čvora-ponora.

U ovom radu razmatra se slučaj kada grana-predstavnik skupa parametara od interesa nije sadržana ni u jednoj orijentisanoj putanji izmedju čvora-izvora i čvora-ponora. U fizičkim sistemima sa povratnom spregom ovaj se slučaj redovno javlja kada se kao parametri od interesa uzimaju prenosi kola povratne sprege. Pokazuje se da se klasična Blackmanova formula može i u ovom slučaju generalisati. U svrhu dobijanja matrica reakcije, izvodi se jedno prosto pravilo koje omogućava da se ove matrice formiraju neposredno iz grafa prenosa signala, čime se izbegava izračunavanje elemenata ovih matrica iz ekvivalentnih mreža sistema.

Pošto se za posmatrani graf uvode matrice reakcije za proizvoljnu referenciju, izvodi se relacija izmedju uopštenih funkcija reakcije za dve matrice parametara od kojih jedna predstavlja transmitansu jedne grane koja se nalazi u jednoj orijentisanoj putanji izmedju čvora-izvora i čvora-ponora, a druga — transmitansu jedne grane koja nije sadržana u jednoj takvoj putanji.

Najzad, izvodi se jedna formula za funkciju osetljivosti prenosa u odnosu na jedan proizvoljni parametar koja predstavlja uopštavanje Truxalove formule za osetljivost i daje se njena interpretacija na grafu prenosa signala.

2. Odredjivanje prenosne funkcije

Pretpostavimo da izmedju dve promenljive, x_0 i x_1, jednog skupa linearnih jednačina koji opisuje stanje u nekom sistemu, postoji zavisnost koja je predstavljena uopštenim grafom prenosa signala na sl. 1. Transmitanse $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{W}$ odgovarajućih grana su matrice tipa $(m \times 1)$, $(n \times m)$, $(1 \times n)$ i $(m \times n)$,

---

* Štampa se po predlogu R. Horvata.

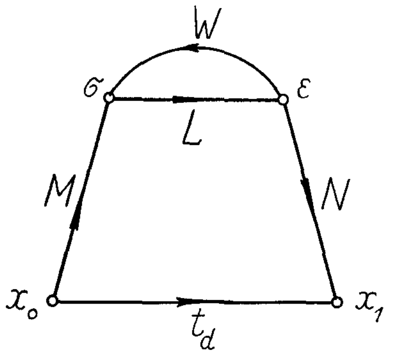
respektivno, dok je t_d — transmitansa direktne grane (x_0, x_1) — kompleksan broj. Transmitansna matrica $\boldsymbol{W}$ predstavlja matricu skupa parametara od interesa. Ona je obeležje grane $(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma})$ grafa prenosa signala na sl. 1, gde su $\underline{\varepsilon}$ i $\underline{\sigma}$ kompleksni vektori sa n odnosno m komponenata, uredjenih na proizvoljan način.

Prenos izmedju čvora-izvora x_0 i čvora-ponora x_1, $T(\boldsymbol{W})$, dat je izrazom

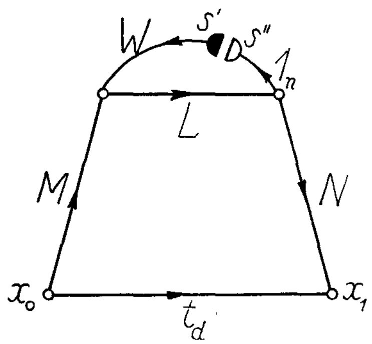
$$T(\boldsymbol{W}) = t_d + \boldsymbol{N}(\mathbf{1}_n - \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{W})^{-1}\,\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{M}, \tag{1}$$

gde je $\mathbf{1}_n$ jedinična matrica n-tog reda.

Izraz (1) se može pisati u drugom obliku ako se uvedu matrice reakcije. Matrica reakcije dobiće se ako se u grafu prenosa signala na sl. 1 prekine



Sl. 1



Sl. 2

grana $(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma})$ i podeli na dve grane transmitansi $\boldsymbol{W}$ i $\mathbf{1}_n$ uvodjenjem jednog dopunskog čvora-izvora s' i jednog dopunskog čvora-ponora s'' (sl. 2), i ako se iz čvora s' odašilje jedan signal-vektor $\boldsymbol{S}_n$ sa n komponenata.

Razlika izmedju signala-vektora $\boldsymbol{S}_n$ u čvoru s' i signala-vektora $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{W}\,\boldsymbol{S}_n$ u čvoru s'' definiše tada matricu reakcije $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})$ iz relacije $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W})\,\boldsymbol{S}_n$, tako da je

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) = \mathbf{1}_n - \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{W}. \tag{2}$$

Matrica reakcije pri nula-izlazu definiše se preko razlike signala-vektora u čvorovima s' i s'' pri uslovu da x_1 bude jednako nuli. Ako se u grafu prenosa signala na sl. 1 izvrši inverzija direktne grane (x_0, x_1) dobiće se graf na sl. 3 u kome je uklonjena grana transmitanse t_d^{-1} koja je nastala posle inverzije, budući da je $x_1 = 0$. Iz ovog grafa se na isti način kao gore dobija razlika signala-vektora u čvorovima s' i s'' u obliku $\mathring{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W})\,\boldsymbol{S}_n$, gde

$$\mathring{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W}) = \mathbf{1}_n - \boldsymbol{L}\,(\mathbf{1}_m + t_d^{-1}\ \boldsymbol{MNL})^{-1}\,\boldsymbol{W}; \quad (t_d \neq 0). \tag{3}$$

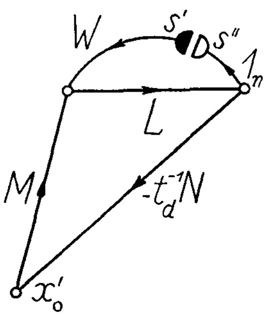
predstavlja matricu reakcije pri nula-izlazu. Stavljajući

$$\mathring{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}\,(\mathbf{1}_m + t_d^{-1}\ \boldsymbol{MNL})^{-1}; \quad (t_d \neq 0) \tag{4}$$

vidi se da je matrica reakcije pri nula-izlazu

$$\mathring{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W}) = \mathbf{1}_n - \mathring{\boldsymbol{L}}\,\boldsymbol{W}; \quad (t_d \neq 0) \tag{5}$$

istog oblika za $t_d \neq 0$ kao matrica reakcije (2) s tim što je transmitansna matrica L zamenjena transmitansnom matricom „ekvivalentne L-grane" koja se dobija u postupku svodjenja grafa na rezidualni nakon inverzije direktne grane. Na taj način matrica reakcije pri nula-izlazu može se shvatiti kao matrica reakcije grafa u kome je x_1 postao čvor-izvor. Ako je $t_d = 0$, iz jednačine (4) sledi $\overset{\circ}{L} = 0$, tako da je $\overset{\circ}{F}(W) = \mathbf{1}_n$.



Sl. 3

Da bi u izraz (1) mogli uvesti gore izvedene funkcije reakcije koristićemo relaciju

$$(6) \qquad det(R + PS^{-1}Q)\; det\, S = det(S + QR^{-1}P)\; det\, R$$

gde su R i S nesingularne matrice reda p odnosno q, a P i Q kvadratne matrice tipa $(p \times q)$ odnosno $(q \times p)$, [5]. Uzimajući $R = \mathbf{1}_p$ i $S = \mathbf{1}_q$, gornja relacija se pretvara u

$$(7) \qquad det(\mathbf{1}_p + PQ) = det(\mathbf{1}_q + QP).$$

Pomoću ove dve relacije izraz za prenosnu funkciju $T(W)$ može se napisati u obliku

$$(8) \quad T(W) = t_d[1 + t_d^{-1} N(\mathbf{1}_n - LW)^{-1} LM] = t_d \cdot det[\mathbf{1}_m + Mt_d^{-1} N(\mathbf{1}_n - LW)^{-1} L] = \frac{t_d \cdot det(\mathbf{1}_n - LW + LM t_d^{-1} N)}{det(\mathbf{1}_n - LW)}.$$

S druge strane, pošto je prema (6)

$$det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL - WL) = det[\mathbf{1}_n - L(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL)^{-1} W] \cdot det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL)$$

a prema (7)

$$det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL) = t_d^{-1}(t_d + NLM),$$

označujući $t_c = NLM$ i vodeći računa o (2) i (3), izraz (8) dobija konačni oblik

$$(9) \qquad T(W) = t_d + t_c \frac{det\, \overset{\circ}{F}(W)}{det\, F(W)}; \quad (t_d \neq 0).$$

Ovaj izraz je po formi isti kao generalisana Blackmanova formula [5], s tom razlikom što se pored transmitanse direktne grane t_d, pojavljuje i član t_c koji predstavlja zbir transmitansi svih putanja izmedju x_0 i x_1 koje dodiruju W-granu.

U slučaju kada ne postoji direktna grana, formula (9) se svodi na

$$(10) \qquad T(W) = \frac{t_c}{det\, F(W)}.$$

Ako je W transmitansa jedne obične grane, tj. kompleksni broj, izraz (9) se svodi na klasičnu Blackmanovu formulu. Pošto na mesto funkcija reakcije u ovom izrazu figurišu determinante matrica reakcije, opravdano je nazvati $det\, F(W)$ i $det\, \overset{\circ}{F}(W)$ uopštenim funkcijama reakcije.

Transmitansne matrice $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ i $\boldsymbol{W}$ u grafu prenosa signala na sl. 1 definisane su shodno uzročno-posledičnim relacijama koje postoje izmedju vektora $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$ i promenljivih x_0 i x_1:

$$x_1 = t_d x_0 + \boldsymbol{N}\underline{\varepsilon}, \quad \underline{\sigma} = \boldsymbol{M} x_0 + \boldsymbol{W}\underline{\varepsilon}, \quad \underline{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\underline{\sigma}. \tag{11}$$

Medjutim, kako se komponente vektora $\underline{\sigma}$ i $\underline{\varepsilon}$ mogu proizvoljno urediti, to će se premeštanjem komponenata ovih vektora promeniti i transmitansne matrice u jednačinama (11) a samim tim i matrice reakcije (2) i (3), što znači da one nisu jednoznačno odredjene samo strukturom sistema.

Ako sa $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$ označimo dve matrice permutacije m-tog odnosno n-tog reda, novi vektori $\underline{\sigma}'$ i $\underline{\varepsilon}'$ koji se dobijaju iz σ i ε premeštanjem njihovih komponenata su

$$\underline{\sigma}' = \boldsymbol{P}\underline{\sigma} \quad \text{i} \quad \underline{\varepsilon}' = \boldsymbol{Q}\underline{\varepsilon} \tag{12}$$

tako da su sada transmitansne matrice $\boldsymbol{L}'$, $\boldsymbol{M}'$, $\boldsymbol{N}'$ i $\boldsymbol{W}'$ koje odgovaraju novim vektorima:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}' &= \boldsymbol{QLP}^{-1} & \boldsymbol{M}' &= \boldsymbol{PM} \\ \boldsymbol{N}' &= \boldsymbol{NQ}^{-1} & \boldsymbol{W}' &= \boldsymbol{PWQ}^{-1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Lako je, medjutim, pokazati da važi

$$\begin{aligned} det\,(\mathbf{1}_n - \boldsymbol{L}'\,\boldsymbol{W}') &= det\,(\mathbf{1}_n - \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{W}) = det\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}), \\ det\,(\mathbf{1}_n - \mathring{\boldsymbol{L}}'\,\boldsymbol{W}') &= det\,(\mathbf{1}_n - \mathring{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{W}) = det\,\mathring{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W}), \end{aligned} \tag{14}$$

a to znači da su uopštene funkcije reakcije invarijantne u odnosu na premeštanje komponenata vektora $\underline{\sigma}$ i $\underline{\varepsilon}$ i da su jednoznačno odredjene strukturom sistema.

3. Odredjivanje matrica reakcije iz grafa prenosa signala

Matrice reakcije (2) i (3) mogu se odrediti neposredno iz grafa prenosa signala na sledeći način. Označimo sa $\boldsymbol{H} = [h_{ij}]$ matricu n-tog reda $\boldsymbol{LW}$ u izrazu (2). Ako stavimo $\boldsymbol{L} = [l_{ik}]$ i $\boldsymbol{W} = [w_{kj}]$, tada je

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{W}) = \mathbf{1}_n - \boldsymbol{H} = [\delta_{ij} - h_{ij}] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

gde je

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{m} l_{ik} w_{kj} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

(δ_{ij} — Kroneckerov simbol).

U grafu prenosa signala na sl. 1 razdvojićemo sve $\underline{\varepsilon}$-čvorove i uklonićemo sve M- i N-grane budući da one ne mogu bitti sastavni delovi putanja. Detaljni graf posle ovog postupka prikazan je na sl. 4.

Razdvajanjem nekog čvora ε_k na čvor-izvor ε'_k i na čvor-ponor ε''_k ukidaju se sve orijentisane putanje koje kroz njega prolaze, tako da izmedju bilo kog čvora-izvora ε'_j i bilo kog čvora-ponora ε''_i postoje samo putanje što prolaze kroz čvorove σ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, m$) pri čemu kroz svaki čvor σ_ν prolazi jedna i samo jedna putanja.

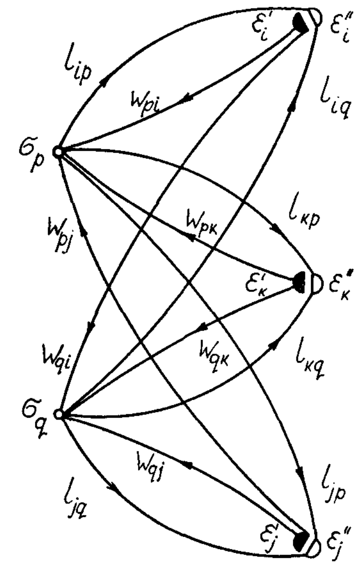
Svaku jednu takvu putanju obrazuju dve grane: W -grana transmitanse $w_{\nu j}$ i jedna L -grana transmitanse $l_{i\nu}$. Stoga je prenos izmedju čvora ε'_j i čvora ε''_i

(17) $$\frac{\varepsilon''_i}{\varepsilon'_j} = \sum_{\nu=1}^{m} w_{\nu j} l_{i\nu}$$

odnosno, na osnovi jednačine (16),

(18) $$\frac{\varepsilon''_i}{\varepsilon'_j} = h_{ij}.$$

Na taj način, prenos izmedju čvora ε_j i čvora ε_i dobijen pri uslovu da su svi ε-čvorovi razdvojeni, jednak je elementu h_{ij} matrice $H = LW$. Iz onog što je izloženo sledi da je element h_{ij} matrice H jednak zbiru transmitansi svih orijetisanih putanja od čvora ε_j do čvora ε_i koje ne prolaze kroz ostale čvorove ε_k $(k \neq i, j)$.



Sl. 4

Budući da se matrica $\overset{\circ}{H} = \overset{\circ}{L}W$ razlikuje od matrice H samo po tome što je matrica L zamenjena matricom $\overset{\circ}{L}$, ona se može obrazovati po istom postupku kao matrica H, ali se prethodno mora graf prenosa signala svesti na rezidualni graf inverzijom direktne grane t_d i transformacijom sopstvene petlje $-t_d^{-1}$ MNL.

Kako je $det(1_n - LW) = det(1_m - WL)$, očigledno je da se u izrazima za uopštene funkcije reakcije mogu koristiti na mesto matrica LW i $\overset{\circ}{L}W$, odgovarajući matrice WL i $W\overset{\circ}{L}$. One se mogu obrazovati na isti način kao matrice LW i $\overset{\circ}{L}W$ samo što sada ulogu čvorova ε_i i ε_j igraju čvorovi σ_i i σ_j.

4. Uopštene funkcije reakcije za proizvoljnu referenciju

Matrice (2) i (3) postaju jedinične za $W = O$ tako da i njihove determinante (uopštene funkcije reakcije) dobijaju vrednost 1 za $W = O$. Ovako definisane matrice i funkcije reakcije možemo stoga nazvati matricama i funkcijama reakcije za nultu referenciju.

Da bi uveli uopštene funkcije reakcije za proizvoljnu referentnu matricu W^0, razložićemo matricu parametara W na dve matrice prema relaciji

(19) $$W = W^0 + W'$$

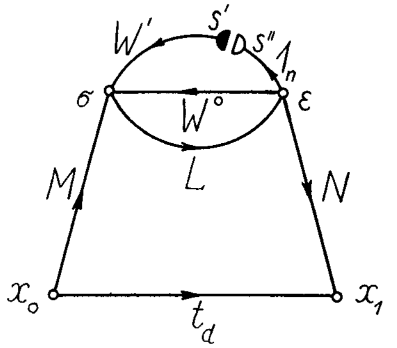
čemu odgovara predstavljanju grane (ε, σ) u grafu prenosa signala paralelnom vezom referentne grane transmitanse W^0 i grane-ostatka transmitanse W' (sl. 5). Matrice reakcije u odnosu na granu W' jednake su tada po definiciji matricama reakcije za referentnu matricu W^0.

Iz grafa na sl. 5 neposredno se dobija matrica reakcije u odnosu na granu-ostatak W'

$$F(W') = \mathbf{1}_n - (\mathbf{1}_n - LW^0)^{-1} LW', \tag{20}$$

a iz grafa na sl. 6 — matrica reakcije pri nula-izlazu za referentnu matricu W^0

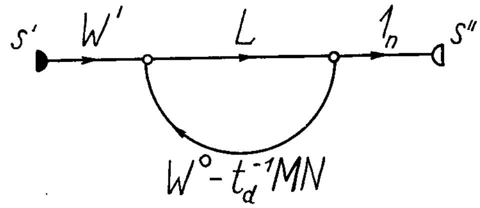
$$\overset{\circ}{F}(W') = \mathbf{1}_n - [\mathbf{1}_n - L(W^0 - t_d^{-1} MN)]^{-1} LW'. \tag{21}$$



Sl. 5

Uopštena funkcija reakcije za referentnu matricu W^0 je stoga

$$\det F(W) = \det(\mathbf{1}_n - LW^0)^{-1} \cdot \det(\mathbf{1}_n - LW),$$



Sl. 6

ili prema (2),

$$\det F(W') = \frac{\det F(W)}{\det F(W^0)}. \tag{22}$$

Isto tako, ako se matrica $\overset{\circ}{F}(W')$ napiše u obliku

$$\overset{\circ}{F}(W') = (\mathbf{1}_n - LW^0 + t_d^{-1} LMN)^{-1} (\mathbf{1}_n - LW + t_d^{-1} LMN)$$

i ako se uzme njena determinanta, dobija se

$$\det \overset{\circ}{F}(W') = \frac{\det(\mathbf{1}_n + t_d^{-1} LMN - LW)}{\det(\mathbf{1}_n + t_d^{-1} LMN - LW^0)} = \frac{\det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL - WL)}{\det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL - W^0 L)}$$

Transformacijom determinanata u brojitelju i u imenitelju prema relaciji (6) i na osnovi (3) dobija se

$$\det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL - WL) = \det \overset{\circ}{F}(W) \cdot \det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL)$$

$$\det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL - W^0 L) = \det \overset{\circ}{F}(W^0) \cdot \det(\mathbf{1}_m + t_d^{-1} MNL),$$

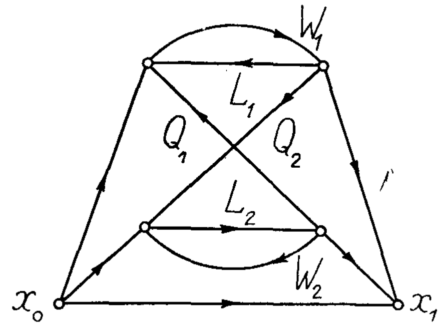
tako da je konačno uopštena funkcija reakcije pri nula-izlazu za referentnu matricu W^0

$$\det \overset{\circ}{F}(W') = \frac{\det \overset{\circ}{F}(W)}{\det \overset{\circ}{F}(W^0)}. \tag{23}$$

Izrazi (22) i 23) predstavljaju uopštavanje Bodeove funkcije reakcije za proizvoljnu referenciju u slučaju jednog parametra. Oni su prvobitno bili dobijeni za graf prenosa signala u kome se grana parametara nalazi u jednoj orijentisanoj putanji izmedju čvora-izvora i čvora-ponora [5]. Ovim je pokazano da se oni mogu primeniti i na graf prema sl. 1.

5. Relacija izmedju funkcija reakcije za dva skupa parametara

J. G. Truxal je dao interpretaciju na grafu prenosa signala Bodeove klasične relacije izmedju funkcija reakcije za dva parametra. U tu svrhu on koristi graf u kome su obe grane-predstavnici parametara od interesa sadržane u jednoj orijentisanoj petlji. Isti graf koristi i I. W. Sandberg prilikom uopštavanja ovih relacija. Mi ćemo razmotriti jedan opštiji slučaj kada graf prenosa signala sadrži dve grane parametara od kojih se jedna, transmitansne matrice W_1, nalazi u jednoj orijentisanoj putanji izmedju čvorova x_0 i x_1, dok druga, transmitansne matrice W_2, nije obuhvaćena jednom takvom putanjom (sl. 7). Pokazaćemo da se klasična Bodeova relacija može generalisati i u ovom slučaju.



Sl. 7

Uočimo graf prenosa signala na sl. 7 u kome su transmitansne matrice L_1 i W_1 tipa $(n \times m)$, odnosno $(m \times n)$, L_2 i W_2 — tipa $(r \times s)$ odnosno $(s \times r)$, a Q_1 i Q_2 — tipa $(n \times r)$, odnosno $(s \times m)$.

Matrica reakcije (za nultu referenciju) u odnosu na W_1 -granu je prema grafu na sl. 8a

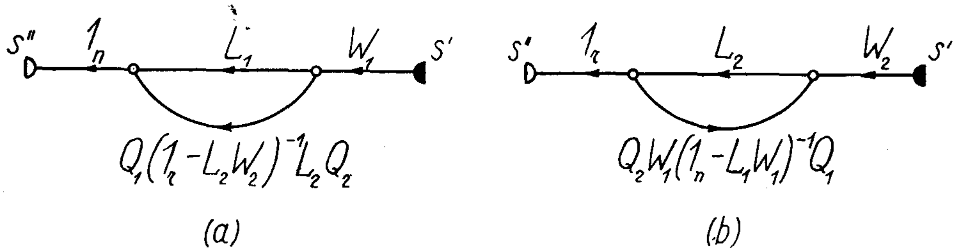
$$F(W_1) = \mathbf{1}_n - [L_1 + Q_1 (\mathbf{1}_r - L_2 W_2)^{-1} L_2 Q_2] W_1, \tag{24}$$

a iz grafa na sl. 8b matrica reakcije (za nultu referenciju) u odnosu na W_2 -granu je

$$F(W_2) = \mathbf{1}_r - [\mathbf{1}_r - L_2 Q_2 W_1 (\mathbf{1}_n - L_1 W_1)^{-1} Q_1]^{-1} L_2 W_2 \tag{25}$$

odnosno

$$F(W_2) = [\mathbf{1}_r - L_2 Q_2 W_1 (\mathbf{1}_n - L_1 W_1)^{-1} Q_1]^{-1} [\mathbf{1}_r - L_2 W_2 - L_2 O_2 W_1 (\mathbf{1}_n - L_1 W_1)^{-1} Q_1]. \tag{26}$$



Sl. 8

Uopštena funkcija reakcije u odnosu na matricu W_2 data je izrazom

$$det\, F(W_2) = \frac{det\,[\mathbf{1}_r - L_2 W_2 - L_2 Q_2 W_1 (\mathbf{1}_n - L_1 W_1)^{-1} Q_1]}{det\,[\mathbf{1}_r - L_2 Q_2 W_1 (\mathbf{1}_n - L_1 W_1)^{-1} Q_1]}. \tag{27}$$

Determinante u brojitelju i imenitelju gornjeg izraza mogu se predstaviti u obliku

$$det\,[\mathbf{1}_r - L_2 W_2 - L_2 Q_2 W_1 (\mathbf{1}_n - L_1 W_1)^{-1} Q] = \frac{det\,[\mathbf{1}_n - L_1 W_1 - Q_1 (\mathbf{1}_r - L_2 W_2)^{-1} L_2 Q_2 W_1]\, det\,(\mathbf{1}_r - L_2 W_2)}{det\,(\mathbf{1}_n - L_1 W_1)} \tag{28}$$

$$det\,[\mathbf{1}_r - L_2 Q_2 W_1 (\mathbf{1}_n - L_1 W_1)^{-1} Q_1] = det\,[\mathbf{1}_n - Q_1 L_2 Q_2 W_1 (\mathbf{1}_n - L_1 W_1)^{-1}] = \frac{det\,[\mathbf{1}_n - (L_1 + Q_1 L_2 Q_2) W_1]}{det\,(\mathbf{1}_n - L_1 W_1)}. \tag{29}$$

U jednačini (28) matrica $\mathbf{1}_r - L_2 W_2$ predstavlja matricu reakcije u odnosu na W_2-granu kada je W_1-grana prekinuta, dok matrica $\mathbf{1}_n - (L_1 + Q_1 L_2 Q_2) W_1$ u jednačini (29) predstavlja matricu reakcije u odnosu na W_1-granu kada je W_2-grana prekinuta, u što se lako uveravamo neposrednim pregledom grafa prenosa signala na sl. 7 i 8, ili, zamenom $W_1 = O$ u jednačini (25) i $W_2 = O$ u jednačini (24):

(30) $$F(W_2)\Big|_{W_1 = O} = \mathbf{1}_r - L_2 W_2$$

(31) $$F(W_1)\Big|_{W_2 = O} = \mathbf{1}_n - (L_1 + Q_1 L_2 Q_2) W_1 .$$

Iz jednačina (27), (28), (29), (30), (31) i (24) sledi

(32) $$\det F(W_1) \cdot \det F(W_2)\Big|_{W_1 = O} = \det F(W_2) \cdot \det F(W_1)\Big|_{W_2 = O},$$

što predstavlja traženu uopštenu relaciju. U ovoj relaciji sve funkcije reakcije se odnose na nulte referentne matrice. Na sličan način se može izvesti ista uopštena relacija za proizvoljne referentne matrice W_1^0 i W_2^0 a prema definicionim relacijama (22) i (23). Relacija (32) je pogodna za odredjivanje funkcije reakcije u odnosu na jedan skup parametara ako je poznata funkcija reakcije u odnosu na drugi skup parametara.

6. Funkcija osetljivosti

Prema Bodeu, funkcija osetljivosti prenosa T u odnosu na promene jednog parametra od interesa q definisana je izrazom

(33) $$S(q) = \frac{d(\log T)}{d(\log q)} . \ *$$

Ako u sistemu postoji jedan skup parametara od interesa izražen matricom W, tada je prenos T dat izrazom (9). Uzimajući za parametar od interesa element w_{ij} matrice W, posle diferenciranja izraza (9) i unošenja u (33) dobija se

(34) $$S(w_{ij}) = w_{ij} \frac{\det F(W) \dfrac{d}{dw_{ij}} [\det \mathring{F}(W)] - \det \mathring{F}(W) \dfrac{d}{dw_{ij}} \det F(W)]}{\det F(W) \cdot \det \mathring{F}(W)} .$$

Diferenciranjem funkcija reakcije

(35) $$\det F(W) = \det \left[\delta_{rs} - \sum_{k=1}^{m} l_{rk} w_{ks} \right]$$
$$\det \mathring{F}(W) = \det \left[\delta_{rs} - \sum_{k=1}^{m} \mathring{l}_{rk} w_{ks} \right] .$$

po parametru w_{ij} dobija se

(36) (a) $$\frac{d}{dw_{ij}} [\det F(W)] = \frac{1}{w_{ij}} [\det F(W) - \det F(W)\Big|_{w_{ij} = 0}]$$

(b) $$\frac{d}{dw_{ij}} [\det \mathring{F}(W)] = \frac{1}{w_{ij}} [\det \mathring{F}(W) - \det \mathring{F}(W)\Big|_{w_{ij} = 0}],$$

* Ovaj izraz je ustvari recipročna vrednost osetljivosti koju definiše Bode [1].

gde su $det\, F(W)\Big|_{w_{ij}=0}$ i $det\, \overset{\circ}{F}(W)\Big|_{w_{ij}=0}$ uopštene funkcije reakcije koje se dobijaju iz odgovarajućih funkcija stavljanjem $w_{ij}=0$, odnosno izostavljanjem u $det\, F\,(W)$ i $det\, \overset{\circ}{F}(W)$ svih članova u j-toj koloni koji sadrže w_{ij}. Izostavljanju ovih članova odgovara uklanjanju grane transmitanse w_{ij} izmedju čvora j i čvora i u grafu prenosa signala.

Unošenjem jednačina (36) u izraz (24) dobija se konačno

$$S\,(w_{ij}) = \frac{det\, F(W)\,|_{w_{ij}=0}}{det\, F\,(W)} - \frac{det\, \overset{\circ}{F}(W)\,|_{w_{ij}=0}}{det\, \overset{\circ}{F}(W)}\,. \tag{37}$$

Ovaj izraz za funkciju osetljivosti predstavlja uopštavanje Truxalove formule [4] koja je izražena funkcijama reakcije za jedan parametar.

Ako u grafu prenosa signala ne postoji direktna grana ($t_d=0$), tada pošto je $det\, \overset{\circ}{F}(W)=1$, jednačina (34) se svodi na

$$S\,(w_{ij}) = -\frac{w_{ij}}{det\, F\,(W)}\cdot\frac{d}{dw_{ij}}[det\, F\,(W)], \tag{38}$$

što posle unošenja (36a) daje

$$S\,(w_{ij}) = \frac{det\, F\,(W)\,|_{w_{ij}=0}}{det\, F\,(W)} - 1\,. \tag{39}$$

L I T E R A T U R A

[1] H. W. Bode: *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, New York, 1945.

[2] R. B. Blackman: *Effect of Feedback on Impedance.* BSTJ, vol. 22, October 1943, 268—277.

[3] S. J. Mason: *Feedback Theory — Some Properties of Signal-Flow Graphs.* Proc. IRE vol. 41, September 1953, 1144—1156.

[4] J. G. Truxal: *Control System Synthesis*, New York, 1955.

[5] I. W. Sandberg: *On the Theory of Linear Multi-Loop Feedback Systems*, BSTJ, vol. 42, March 1963, 355—382.

Summary

SOME GENERALIZED RELATIONS IN FEEDBACK THEORY

Mirko M. Milić

The application of Mason's signal-flow graphs to the feedback theory [3, 4] has been proved very useful both in topological characterization of the system cause-and-effect relationships and in practical computation of the Bode's return diference [1].

Recently, I. W. Sandberg [5] derived a generalization of the Blackman's classical formula [2] based on the extension of the concept of return difference from a single parameter to a set of parameters, represented by a matrix. This matrix is taken for the transmittance of the branch of interest in the signal-flow graph considered by Truxal [4].

This paper treats the case when the branch of interest, whose transmittance is the parameter matrix W, is contained in no oriented path between the source-node and the sink-node. In physical feedback systems this case frequently arises when the feedback circuit transmissions are taken as the parameters of interest. It is shown that the classical Blackman's formula can be generalized to include this case too. A simple rule is established which enables the determination of the return difference matrices directly from the signal-flow graph, avoiding thus calculations from the equivalent circuits.

The generalized relation between the return differences for two parameter matrices is presented, one of which is the transmittance of the branch contained in an oriented path between the source and sink, and the other — the transmittance of a branch that is not contained in such a path.

Finally, a formula for sensitivity function in terms of generalized return difference and generalized null-output return difference is derived, which generalizes the Truxal's sensitivity formula.