PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 121 (1963)

CERTAINES ÉQUATIONS MATRICIELLES*

Slaviša B. Prešić

Soit K un corps commutatif et soit A une matrice carrée de l'ordre n aux éléments de K. Nous désignons par M l'ensemble de toutes les matrices dont les éléments appartiennent à K.

Au moyen de transformations élémentaires, on peut mettre A sous la forme $A = P_1 DP_2$, où P_1 et P_2 sont des matrices régulières et D une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont 1 et 0 telle que le nombre des unités est égal au rang de A. La matrice $B = P_2^{-1} DP_1^{-1}$ satisfait alors à l'égalité $ABA = A$.

L'équation matricielle $AXA = A$ a ainsi au moins une solution X.

Si A satisfait à une égalité de la forme

$$A^k + l_1 A^{k-1} + \cdots + l_{k-1} A = 0 \quad (l_1, \ldots, l_{k-1} \in K,\ l_{k-1} \neq 0),$$

alors la matrice

$$X = -\frac{1}{l_{k-1}} (A^{k-2} + l_1 A^{k-3} + \cdots + l_{k-2} I) \quad (I \text{ matrice unité})$$

est aussi une solution de l'éqation $AXA = A$.

Théorème. — *Si B remplit la condition $ABA = A$ alors:*

1° $AX = 0 \Leftrightarrow X = (I - BA)\, Q,\ Q \in M$ (X *et* Q *sont* $n \times m$ *matrices*);

2° $XA = 0 \Leftrightarrow X = Q\,(I - AB),\ Q \in M$ (X *et* Q *sont* $m \times n$ *matrices*);

3° $AXA = A \Leftrightarrow X = B + Q - BAQAB,\ Q \in M$;

4° $AX = A \Leftrightarrow X = I + (I - BA)\, Q,\ Q \in M$;

5° $XA = A \Leftrightarrow X = I + Q\,(I - AB),\ Q \in M$.

Démonstration. Nous n'allons démontrer que 3°, puisque les démonstration de 1°, 2°, 4° et 5°, sont analogues.

Soit $X = B + Q - BAQAB,\ Q \in M$. Alors

$$AXA = ABA + AQA - ABAQABA,\ ABA = A$$
$$\Rightarrow AXA = A + AQA - AQA \Rightarrow AXA = A.$$

---

* Communiqué le 30 octobre 1963 à la séance de la Section d'Algèbre de l'Institut mathématique de Belgrade.

Inversement, si l'on a, pour un $X \in M$, $AXA = A$, alors

$$B + (X - B) - BA(X - B)AB = X - BAXAB + BABAB = X - BAB + BAB = X.$$

Donc:

$$AXA = A \Rightarrow X = B + Q - BAQAB, \quad \text{avec } Q = (X - B) \in M.$$

On peut remarquer que le théorème démontré fournit toutes les solutions des équations 1°, 2°, 3°, 4° et 5° au moyen d'une solution quelconque B de l'équation $AXA = A$.

Si X est une $n \times l$ matrice, alors la formule contenue dans 1° *fournit toutes les solutions du système d'équations homogènes*

$$A \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = 0 \textit{ sous la forme } \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = (I - BA) \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix},$$

où u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont des éléments arbitraires de K.

Observons que le théorème, de même que sa démonstration, restent valables dans le cas général où A, B, Q, I, X sont des éléments d'un anneau quelconque M muni de l'élément unité I.

Ainsi, par exemple, d'après ce théorème plus général, si a est un élément de l'anneau M à l'élément unite I et si $\bar{a}$ est un élément de M tel que $a\bar{a}a = a$, alors toutes les solutions de l'équation $axa = a$ $(x \in M)$ sont déterminées par la formule

$$x = \bar{a} + q - \bar{a}aqa\bar{a},$$

où q $(\in M)$ désigne un élément quelconque.

Cette proposition-là reste en vigueur même si M n'a pas d'élément unité.