PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 120 (1963)

ÉQUATION FONCTIONNELLE À FONCTIONS INCONNUES DONT TOUTES NE DÉPENDENT PAS DU MÊME NOMBRE D'ARGUMENTS*

Dragoslav S. Mitrinović

Désignons par S un ensemble non vide arbitraire, par M un groupe abélien additif.

Les fonctions inconnues

$$f_\nu : S^3 \to M \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$f_1(x_1, x_2) + f_2(x_2, x_3, x_4) + f_3(x_1, x_3, x_4) = 0, \tag{1}$$

seront déterminées dans ce qui suit.

Le procédé de résolution, utilisé dans nos atricles antérieurs (*voir*, par exemple, [1]) s'applique aussi à l'équation (1).

Si l'on pose[1] $x_3 = x_3^0$ et $x_4 = x_4^0$, l'équation (1) donne

$$f_1(x_1, x_2) = F_1(x_2) + G_1(x_1). \tag{2}$$

Pour $x_1 = x_1^0$ l'équation (1) fournit

$$f_2(x_2, x_3, x_4) = F_2(x_2) + G_2(x_3, x_4). \tag{3}$$

Si l'on fait $x_2 = x_2^0$, l'équation (1) conduit à

$$f_3(x_1, x_3, x_4) = F_3(x_1) + G_3(x_3, x_4). \tag{4}$$

Pour que les fonctions f_1, f_2, f_3, données par (2), (3), (4), représentent une solution de (1), il faut et suffit que

$$F_1(x_2) + G_1(x_1) + F_2(x_2) + G_2(x_3, x_4) + F_3(x_1) + G_3(x_3, x_4) = 0. \tag{5}$$

Si l'on y fait, l'une après l'autre, les trois substitutions

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & x_2 = x_2^0, \quad x_3 = x_3^0, \quad x_4 = x_4^0; \\ 2^\circ & x_1 = x_1^0, \quad x_3 = x_3^0, \quad x_4 = x_4^0; \\ 3^\circ & x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \end{array}$$

* Communiqué le 19 septembre 1963 à la séance du Département d'Analyse de l'Institut mathématique de Belgrade.

[1] Par x_ν^0 $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ sont désignées des constantes fixes $\in$ S.

on obtient respectivement

$$
\begin{aligned}
G_1(x_1) + F_3(x_1) &= k_1,\\
F_1(x_2) + F_2(x_2) &= k_2, \qquad (6)\\
G_2(x_3, x_4) + G_3(x_3, x_4) &= k_3,
\end{aligned}
$$

où k_1, k_2, k_3 avec $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ sont des constantes appartenant à M.

Selon (6), les formules (2), (3), (4) deviennent respectivement

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= F_1(x_2) - F_3(x_1) + k_1,\\
f_2(x_2, x_3, x_4) &= -F_1(x_2) + G_2(x_3, x_4) + k_2,\\
f_3(x_1, x_3, x_4) &= F_3(x_1) - G_2(x_3, x_4) - k_1 - k_2.
\end{aligned}
$$

Si l'on y introduit les nouvelles notations suivantes:

$$
\begin{aligned}
F(x_2) &= F_1(x_2),\\
H(x_1) &= F_3(x_1) - k_1,\\
G(x_3, x_4) &= G_2(x_3, x_4) + k_2,
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2) &= F(x_2) - H(x_1),\\
f_2(x_2, x_3, x_4) &= -F(x_2) + G(x_3, x_4), \qquad (7)\\
f_3(x_1, x_3, x_4) &= H(x_1) - G(x_3, x_4).
\end{aligned}
$$

Ce qui précède peut être énoncé comme suit:

Théorème. — *Si S est un ensemble non vide quelconque et M un groupe abélien additif, tous les systèmes de fonctions*

$$f_\nu : S^3 \to M \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

vérifiant l'équation (1), *sont donnés par* (7), *où F, H, G désignent des fonctions quelconques à valeurs appartenant à M.*

Nous reviendrons dans une autre occasion à des équations plus générales que l'équation (1).

RÉFÉRENCE

[1] D. S. Mitrinović: *Équations fonctionnelles paracycliques de première espèce*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, nouvelle série, t. 3 (17), 1963.