PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 119 (1963)

MÉTHODE DE RÉSOLUTION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES*

Slaviša B. Prešić

1. Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ les applications biunivoques de l'ensemble non vide E sur E qui forment un groupe G de l'ordre n, l'application θ_1 étant identique. Désignons par F l'ensemble de toutes les fonctions qui appliquent E dans un corps commutatif K donné.

Dans cet article nous allons exposer une méthode de résolution de l'équation fonctionnelle suivante

$$a_1(x)f(\theta_1 x)+a_2(x)f(\theta_2 x)+\cdots+a_n(x)f(\theta_n x)=0 \qquad (\theta_i x=\theta_i(x)) \tag{1}$$

où les $a_i\,(\in F)$ sont des fonctions données et f une fonction inconnue. Cette méthode-là peut être qualifiée d'application du théoréme 1 de [1].

Désignons par $p_i\,(i=1,2,\ldots,n)$ la permutation de l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ que l'on obtient de la permutation

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \theta_1\theta_i & \theta_2\theta_i & \cdots & \theta_n\theta_i \end{pmatrix}$$

de G en y substituant aux symboles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ les symboles $1,2,\ldots,n$ respectivement (les produits dans la seconde ligne étant au préalable remplacés par les éléments auxquels ils sont égaux) et posons $P=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Soit ensuite $M_\nu=\|a^\nu_{i,j}\|$ avec $a^\nu_{i,j}=1$ pour $j=ip_\nu$ et $a^\nu_{i,j}=0$ pour $j\neq ip_\nu$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$, en désignant par ip_ν l'image de i dans l'application p_ν. Les groupes G, P et $M=\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ sont isomorphes.

Nous notons que le passage précédent n'a pas été rédigé correctement dans [2], où les résultats principaux de cet article sont résumé's.

Si l'on pose successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$ dans l'équation (1) au lieu de x, on obtient un systéme d'équations qui peut être écrit sous la forme matricielle

$$A(x)\begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x)\end{Vmatrix}=0, \ \text{avec}\ A(x)=\|a_{i,j}(x)\|,\quad a_{i,j}(x)=a_{jp_i^{-1}}(\theta_i x). \tag{2}$$

---

* Communiqué le 27 septembre 1963 à la séance du Département d'Analyse de l'Institut Mathématique de Belgrade.

Nous allons chercher la solution générale de l'équation (1) sous la forme

$$\begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = B(x) \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

où la fonction $g\,(\in F)$ est arbitraire.

Pour une matrice carrée quelconque $B(x)$ de l'ordre n, dont les éléments sont $b_{ij}(x)$ $(b_{ij} \in F)$ l'équation (3) ne definit pas nécessairement la fonction f $(\in F)$ d'une maniére univoque.

Definition. — Nous disons que la fonction matricielle $B(x)$, ou plus brièvement la matrice $B(x)$, est *compatible* avec le groupe G si l'equation (3) définit la fonction $f\,(\in F)$ univoquement pour chaque $g\,(\in F)$.

Lemme 1. — *La condition*

$$B(\theta_i x) = M_i B(x) M_i^{-1} \qquad (x \in E;\ i = 1,2,\ \dots\ ,\ n) \tag{4}$$

est suffisante pour la compatibilité de la matrice $B(x)$ *avec le groupe* G.

Démonstration. Soit $B(x) = \| b_{ij}(x) \|$ $(x \in E;\ b_{ij} \in F)$ et supposons la condition (4) remplie.

Pour une fonction $g\,(\in F)$ quelconque, l'égalité

$$\begin{Vmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{Vmatrix} = B(x) \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} \qquad (f_1 = f) \tag{5}$$

fournit

$$f(x) = b_{11}(x)\ g(x) + b_{12}(x)\ g(\theta_2 x) + \cdots + b_{1n}(x) \cdot g(\theta_n x). \tag{6}$$

Après multiplication à droite par M_i, l'égalité (5) devient

$$\begin{Vmatrix} f_i(x) \\ \vdots \\ . \end{Vmatrix} = M_i B(x)\ M_i^{-1}\ M_i \begin{Vmatrix} g(x) \\ \vdots \\ . \end{Vmatrix},$$

d'où résulte, d'aprés (4), (5) et (7),

$$f_i(x) = f(\theta_i x) \quad (x \in E;\ i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n).$$

$B(x)$ est donc compatible avec G.

On démontre sans difficulté les deux faits suivants:

1° Si les matrices $B(x)$ et $C(x)$ sont compatibles avec le groupe G, alors les matrices $\lambda B(x)$ (λ élément arbitraire de K), $B(x) + C(x)$ et $B(x) \cdot C(x)$ sont aussi compatibles avec G. Les matrices compatibles avec le groupe G forment donc une algèbre de matrices.

2° La matrice $A(x)$ définie par (2) remplit la condition (4).

Dans ce qui suit le rôle fondamental est joué par le

L e m m e 2. — Il *existe au moins une matrice carrée de l'ordre n,*

$$B(x) = \| b_{ij}(x) \| \quad (x \in E;\ b_{ij} \in F),$$

pour laquelle sont remplies les conditions que voici:

(C_1) $A(x)\,B(x)\,A(x) + A(x) = 0$ *pour tout* $x \in E$;

(C_2) *la matrice* $B(x)$ *est compatible avec le groupe* G.

Démonstration. Désignons par $r(x)$ le rang de la matrice $A(x)$ $(x \in E)$. La matrice $A(x)$ peut être écrite sous la forme

$$A(x) = P(x)\ D(x)\ Q(x)$$

où les matrices $P(x)$ et $Q(x)$ sont régulières pour tout $x \in E$ et $D(x)$ est une matrice diagonales aux éléments 1 et 0 telle que le nombre d'unités est égal à $r(x)$. Cette représentation de $A(x)$ s'obtiendrait au moyen de transformations élémentaires effectuées pour tout $x \in E$. Alors la matrice

$$B_0(x) = -Q^{-1}(x)\,D(x)\,P^{-1}(x)$$

remplit la condition (C_1).

Posons ensuite

$$B(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x)\, M_\nu \qquad (x \in E).$$

On obtient

$$A(x)\ B(x)\ A(x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A(x)\, M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x)\, M_\nu\, A(x)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} A(\theta_\nu x)\, B_0(\theta_\nu x)\, A(\theta_\nu x)\, M_\nu \qquad (x \in E),$$

la matrice $A(x)$ remplissant la condition (4). En mettant à profit ce fait-là de même que la condition (C_1), remplie par la matrice $B_0(x)$, on obtient

$$A(x)\,B(x)\,A(x) = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} A(\theta_\nu x)\, M_\nu = -\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} A(x) = -A(x).$$

$B(x)$ remplit donc la condition (C_1).

Nous avons aussi

$$B(\theta_i x) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu \theta_i x)\, M_i = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} M_i\,(M_\nu M_i)^{-1} B_0(\theta_\nu \theta_i x)\,(M_\nu M_i)\, M_i^{-1}$$

$$= M_i \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} M_j^{-1} B_0(\theta_j x)\, M_j \right) M_i^{-1} = M_i\, B(x)\, M_i^{-1},$$

d'où la conclusion, d'après le lemme 1, que $B(x)$ est compatible avec G.

D'après la démonstration achevée, on a immédiatement le

Corollaire. — *Si $B_0(x)$ est une matrice qui remplit la condition (C_1) du lemme 2, alors la matrice*

$$B(x)=\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} M_\nu^{-1} B_0(\theta_\nu x) M_\nu \tag{7}$$

remplit les conditions (C_1) et (C_2) du lemme 2.

Notons que c'est par la négligence de l'auteur que le facteur $\frac{1}{n}$ a été omis dans l'expression pour $B(x)$ dans [2] (c'est-à-dire dans l'expression pour $R(x)$, comme on avait désigné $B(x)$ dans [2]).

Partant des lemmes précedents nous allons démontrer le

Théorème 1. — *Soit $B(x)$ une matrice pour laquelle sont valables les conditions (C_1) et (C_2). La solution générale de l'équation* (1) *est donnée par*

$$\begin{Vmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{Vmatrix} = (B(x)\,A(x)+I) \begin{Vmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{Vmatrix} \quad (I \text{ matrice unité}), \tag{8}$$

où $g\,(\in F)$ désigne une fonction quelconque.

Démonstration. D'après l'hypothèse du théorème, $B(x)$ est compatible avec G. Comme les matrices $A(x)$ et I possèdent la même propriété, on peut conclure, en s'appyant sur la remarque 1°, que la matrice suivant $B(x)\cdot A(x)+I$ est aussi compatible aves ce groupe G. C'est pourquoi (8) définit, pour tout $g\,(\in F)$, la fonction $f\,(\in F)$ d'une manière univoque. En multipliant (8) à droite par $A(x)$ on obtient, d'après (C_1),

$$A(x)\begin{Vmatrix} f(x) \\ \vdots \end{Vmatrix}=0.$$

La fonction $f\,(\in F)$ satisfait donc à l'équation (1) pour tout $g\,(\in F)$.

D'autre part, si $f\,(\in F)$ est une solution de l'équation (1), cette fonction peut être obtenue de la formule (8) en y posant $g=f$.

Les deux faits que nous venons d'établir prouvent que la formule (8) détermine la solution générale de l'équation (1).

Nous remarquons que nous avons décrit, dans la démonstration du lemme 2, un procédé de formation de la matrice $B(x)$ qui remplit les conditions (C_1) et (C_2), ce qui veut dire que le théorème 1 fournit une méthode de consctruction de la solution générale de l'équation (1).

La détermination de la matrice $B(x)$ peut être effectuée après avoir décomposé au préalable l'ensemble E en sous-ensembles disjoints E_r $(r=0,1,2,\ldots,n)$, E_r désignant la partie de E où le rang de la matrice $A(x)$ est r. On détermine alors $B(x)$ dans tout E_r séparément, de sorte que l'on résout l'équation (1) dans chaque E_r pris à part.

Ajoutons à cette instruction générale une remarque particulière: Si dans un E_r (on bien dans une partie V d'un ensemble E_r possédant la propriete que $x \in V \Rightarrow \theta_i x \in V, i = 1, 2, \ldots, n$) est remplie la condition

(9) $$A^m(x) + \lambda_1(x) A^{m-1}(x) + \cdots + \lambda_{m-1}(x) A(x) = 0$$

$$(\lambda_{m-1}(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad x \in E_r, \quad \text{ou pour} \quad x \in V),$$

le polynôme en $A(x)$ au premier membre étant le polynôme minimale de la matrice $A(x)$, alors on peut prendre pour $B(x)$ dans E_r (dans V)

(10) $$B(x) = \frac{1}{\lambda_{m-1}(x)} (A^{m-2}(x) + \lambda_1(x) A^{m-3}(x) + \cdots + \lambda_{m-2}(x) I).$$

En effet, après la multiplication de (11) à gauche par M_i et à droite par M_i^{-1}, on aboutit, d'après l'égalité

$$A(\theta_i x) = M_i A(x) M_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

à la conclusion que les matrices $A(x)$ et $A(\theta_i x)$ possèdent le même polynôme minimal. Il s'ensuit que $\lambda_j(\theta_i x) = \lambda_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, m-1$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $x \in E$, ou $x \in V$). D'après les dernières égalités, la matrice $B(x)$ déterminée par la formule (10) est compatible avec le groupe G pour $x \in E_r$ (ou pour $x \in V$). On deduit, d'autre part, de (9) qu'elle remplit aussi la condition (C_2).

2. Supposons maintenant que les symboles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ dans l'équation (1) désignent des applications de l'ensemble E dans E qui forment un demi-groupe de l'ordre n, θ_1 étant encore toujours l'application identique. Soit $A(x)$, comme ci-dessus, la matrice du systeme d'équations linéaires en $f(x)$, $f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x)$ que l'on obtient en substituant dans (1) à x successivement $x, \theta_2 x, \ldots, \theta_n x$.

Le théorème suivant se rapporte à la résolution de l'équation (1) dans ce cas-là.

Théorème 2. — *Si la matrice $A(x)$ remplit la condition*

(11) $$A^m(x) + \lambda_1 A^{m-1}(x) + \cdots + \lambda_{m-1} A(x) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in E$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1} \in K, \lambda_{m-1} \neq 0; \; m \textit{ un nombre naturel} > 1),$$

alors la solution générale de l'équation (1):

$$a_1(x) f(\theta_1 x) + a_2(x) f(\theta_2 x) + \cdots + a_n(x) f(\theta_n x) = 0$$

est détérminée par la formule

(12) $$\left\| \begin{matrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\lambda_{m-1}} (A^{m-1}(x) + \lambda_1 A^{m-2}(x) + \cdots + \lambda_{m-1} I) \left\| \begin{matrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{matrix} \right\|$$

où g ($\in F$) désigne une fonction arbitraire.

Démonstration. On peut se convaincre sans difficulté que dans le cas que nous considérons à présent la matrice $A(x)$ est compatible avec le demi-groupe G, la notion de compatibilité d'une matrice avec un groupe pouvant être étendue, d'une manière évidente, au cas de demi-groupe. On en déduit, d'après la remarque 1°, valable évidemment aussi dans ce cas, que l'égalité (12) définit d'une manière univoque la fonction $f\ (\in F)$ pour tout $g\ (\in F)$, puisque les coefficients du polynôme formant le premier membre de (11) sont constants. De (11) résulte alors que cette fonction f, pour tout $g\ (\in F)$, satisfait l'équation (1). Enfin, la formule (12) pour $g=f$ où f, est une solution de (1), se reduit a $f(x)=f(x)$. Cette formule détermine donc la solution générale dans le cas considére.

Citons, comme illustration du dernier résultat, l'équation fonctionnelle

$$2f(x_1,\ x_2,\ x_3)-3f(x_2,\ x_2,\ x_3)+f(x_3,\ x_3,\ x_3)=0 \tag{13}$$

$$(x_i\in R,\ f(x_i,\ x_j,\ x_k)\in R;\ R \text{ système de nombres réels}).$$

Nous avons ici: $E=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\,|\,x_1,\ x_2,\ x_3\in R\}$ et $K=R;$ le demi-groupe G est formé des applications suivantes:

$$\theta_1(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_1,\ x_2,\ x_3),\quad \theta_2(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_2,\ x_2,\ x_3),\quad \theta_3(x_1,\ x_2,\ x_3)=(x_3,\ x_3,\ x_3)$$

On obtient dans ce cas

$$A(x)=\begin{Vmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}\qquad (x=(x_1,\ x_2,\ x_3)).$$

Cette matrice-là satisfait à l'équation

$$A^3(x)-A^2(x)-2A(x)=0.$$

D'après le théorème 2, la solution générale de (13) est donnée par la formule

$$\begin{Vmatrix}f(x_1,\ x_2,\ x_3)\\ f(x_2,\ x_2,\ x_3)\\ f(x_3,\ x_3,\ x_3)\end{Vmatrix}=-\frac{1}{2}(A^2(x)-A(x)-2I)\begin{Vmatrix}g(x_1,\ x_2,\ x_3)\\ g(x_2,\ x_2,\ x_3)\\ g(x_3,\ x_3,\ x_3)\end{Vmatrix},$$

c'est-à-dire par la formule

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=g(x_3,\ x_3,\ x_3)\equiv h(x_3)$$

où h désigne une fonction réelle arbitraire.

Considérons le cas plus général de l'équations fonctionnelle

$$f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_m)+a_2f\left(x_1^2,\ x_2^2,\ \dots,\ x_m^2\right)+\cdots+a_nf\left(x_1^n,\ x_2^n,\dots,\ x_m^n\right)=0 \tag{14}$$

$$(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m\in R;\quad a_2,\ \dots,\ a_n \text{ éléments fixés de } R),$$

où x_i^j $(i=1,\ 2,\ \dots,\ m;\ j=2,\ 3,\ \dots,\ n)$ sont les éléments déterminés de l'ensemble $\{x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\}$ et où f désigne la fonction inconnue („de m variables indépendantes réelles $x_1,\ x_2,\dots,x_m$"). Si la matrice correspondante $A(x)$ (constante) possède le polynôme minimal da la forme

$$A^k(x)+\lambda_1A^{k-1}(x)+\cdots+\lambda_{k-1}A(x),$$

avec $\lambda_{k-1}\neq 0$, alors la solution générale de l'équation (14) peut être exprimé par la formule (12), au moyen d'une seule fonction réelle arbitraire de m variables reelles $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m$.

Si l'on a $\lambda_{k-1}=0$, il peut ariver effectivement que la solution générale na soit pas exprimable au moyen d'une seule fonction arbitraire.

C'est par exemple le cas de l'équation

(15) $$f(x_1, x_2)+f(x_2, x_1)-2f(x_1, x_1)=0 \qquad (x_1, x_2 \in R, \quad f(x_1, x_2) \in R).$$

Pour le demi-groupe correspondant G on peut predre le demi-groupe minimal engendré par les applications θ_1, θ_2, θ_3, définies comme il suit:

$$\theta_1(x_1, x_2)=(x_1, x_2), \quad \theta_2(x_1, x_2)=(x_2, x_1), \quad \theta_3(x_1, x_2)=(x_1, x_1).$$

On obtient
$$G=\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}, \text{ où } \theta_4=\theta_3\theta_2,$$
avec la table de Cayley correspondante:

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_1	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
θ_2	θ_2	θ_1	θ_3	θ_4
θ_3	θ_3	θ_4	θ_3	θ_4
θ_4	θ_4	θ_3	θ_4	θ_4

L'équation (15) peut être écrite sous la forme

(16) $$f(x)+f(\theta_2 x)-2f(\theta_3 x)+0\cdot f(\theta_4 x)=0 \quad (x=(x_1, x_2)).$$

En substituant à x successivement x, $\theta_2 x$, $\theta_3 x$, $\theta_4 x$, on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} f(x)+f(\theta_2 x)-2f(\theta_3 x)+0\cdot f(\theta_4 x)&=0\\ f(x)+f(\theta_2 x)+0\cdot f(\theta_3 x)-2f(\theta_4 x)&=0\\ 0&=0\\ 0&=0. \end{aligned}$$

On a donc
$$A(x)=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad (x=(x_1, x_2)).$$

Le polynôme minimal de cette matrice t^3-2t^2 ne contient pas la première puissance de t.

C'est pourquoi la solution génèrale, de l'équation (15) ne pourrait être obtenne par l'application du théorème 2. Cette solution générale est cependant donnée par

$$f(x_1, x_2)=g(x_1, x_2)-g(x_2\ x_1)+h,$$

où la fonctions g (g: $R\times R\to R$) et la constante h ($\in R$) sont arbitraires. Elle n'est pa exprèmable au moyen d'une seule fonction réelle $g(x_1, x_2)$. s

3. Citons enfin une conclusion, relative à la forme de la solution générale de l'équation fonctionnelle (1), que l'cn tire immédiatement des théorémes 1 et 2:

Sous les conditions du théorème 1 *ou celles du théorème* 2, *la solution générale de* (1) *peut être écrite sous la forme*

$$f(x)=b_1(x)g(x)+b_2(x)g(\theta_2 x)+\cdots+b_n(x)g(\theta_n x),$$

ou les $b_i(\in F)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ *sont des fonctions déterminées par les coefficients* $a_i(x)$ *de* (1) *et* $g(\in F)$ *désigne une fonction arbitraire.*

Dans ces deux cas-là, la soluticn générale de (1) peut donc être expimée au moyen d'une seule fcnction arbitraire.

L'équation (1) est traitée dans la monographie [3], mais seulement dans le cas où G est un groupe cyclique.

C'est le professeur D. S. Mitrinović qui m'a signalé quelques problèmes liés à l'équation (1), lesquels m'on conduit à la méthode exposée dans cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. B. Prešić: *Sur l'équation fonctionnelle* $f(x) = H(x, f(x), \ldots, f(\theta_n x))$. Ces Publications № 118,1963.

]2] S. B. Prešić: *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéarires*. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. t. 257, 1963, p. 2224—2226.

[3] M. Germănescu: *Ecuatii functionale*, Bucarest 1960, p. 403—407.