PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 118 (1963)

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $f(x)=H(x, f(x), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x))$ *

Slaviša B. Prešić

Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ des applications de l'ensemble non vide E_1 dans E_1, θ_1 étant la transformation identique de l'ensemble E_1. Désignons par G le demi-groupe minimal engendré par les applications θ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Soient ensuite l'ensemble E_2 non vide et la fonction $H: E_1 \times E_2^n \to E_2$ donnés et désignons par F l'ensemble de toutes les fonctions $f: E_1 \to E_2$.

Nous cosidérons dans cet article l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad f(x)=H(x, f(x), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x)) \qquad (f \in F;\ \theta_i x=\theta_i(x))$$

où $f\,(\in F)$ désigne la fonction inconnue. La méthode de résolution qui nous fournira la solution générale dans certains cas est la généralisation de celle que nous avons exposée dans [1], laquelle s'applique à l'équation

$$f(x)=f[g(x)].$$

Nous allons introduire d'abord quelques notions liées à l'équation (1).

Définition 1. — Soient $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, \ldots, \theta_{i_m}$ m éléments du demigroupe G, m désignant un nombre naturel, et soit $\Phi_1: E_1 \times E_2^m \to E_2$ déterminée. On dit que l'équation

$$(2) \qquad f(x)=\Phi_1(x, f(\theta_{i_1} x), \ldots, f(\theta_{i_m} x)) \qquad (f \in F)$$

est une *conséquence* de l'équation (1) si l'on a

$$(3) \qquad (1) \Rightarrow (2) \qquad (f \in F).$$

Par exemple, une des conséquences de l'équation $f(x)=f(\theta_2 x)$ est l'équation $f(x)=f(\theta_2^2 x)$. Une des conséquences de (1), dans le cas général, est

$$f(x)=H(x, H(x, f(x), \ldots, f(\theta_n x)), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x)).$$

Pour simplifier l'écriture, nous désignerons le second membre de l'équation (2) par $\Phi_1(x; f)$. En outre, au lieu de dire: „l'équation $f(x)=\Phi_1(x; f)$ est conséquence de l'équation (1)," nous dirons: „$\Phi_1(x; f)$ est conséquence de (1)".

* Communiqué le 26 septembre à la séance du Département d'Analyse de l'Institut Mathématique de Belgrade.

Soit Λ un ensemble d'indices et désignons par

$$\Phi(x;f)=\{\Phi_\lambda(x;f)\ |\ \lambda\in\Lambda\}$$

un ensemble de conséquences de l'équation (1). Nous allons introduire la notion d'algèbre de conséquences de l'équation (1) par la définition suivante.

Définition 2. — Nous disons qu'un ensemble $\Phi(x;f)$ est une algèbre de conséquences de l'équations (1) si on a

$$H(x,\ \Phi(x;f),\ \Phi(\theta_2 x;f),\ \ldots,\ \Phi(\theta_n x;f))=\Phi(x;f)\quad(\text{pour tout } f\in F). \tag{4}$$

Le premier membre de la condition (4) est la désignation symbolique de l'ensemble

$$\{H(x;\ \Phi_{\lambda_1}(x;f),\ \Phi_{\lambda_2}(\theta_2 x;f),\ \ldots,\ \Phi_{\lambda_n}(\theta_n x;f))\ |\ \lambda_1,\lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n\in\Lambda\}$$

(ici $\Phi_{\lambda_i}(x;f)$ désigne le second membre de l'équation $f(x)=\Phi_{\lambda_i}(x;f)$, qui est conséquence de (1) dans le sens de la définition 1).

Exemple. — Une algèbre de conséquences de l'équation réelle

$$f(x)+f(\theta x)+f(\theta^2 x)=0\quad(x=(x_1,x_2,x_3),\ \theta x=(x_2,x_3,x_1)) \tag{5}$$

est donnée par

$$\Phi(x;f)=\{(\lambda+1)f(x)+\lambda f(\theta x)+\lambda f(\theta^2 x)\ |\ \lambda\in R\},$$

où R désigne le système de nombres réels.

En effet, étant donné que l'équation peut être écrite sous la forme

$$f(x)=-f(\theta x)-f(\theta^2 x), \tag{6}$$

nous pouvons prendre dans ce cas $H(x,\ f(x),\ f(\theta x),\ f(\theta^2 x))=-f(\theta x)-f(\theta^2 x)$, c'est-à-dire $H(y_1,y_2,y_3,y_4)=-y_3-y_4$. Si l'on écrit

$$\Phi_\lambda(x;f)=(\lambda+1)f(x)+\lambda f(\theta x)+\lambda f(\theta^2 x)\quad(\lambda\in R),$$

on conclut immédiatement que

$$f(x)=-f(\theta x)-f(\theta^2 x)\ \Rightarrow\ f(x)=(\lambda+1)f(x)+\lambda f(\theta x)+\lambda f(\theta^2 x).$$

$\Phi_\lambda(x;f)$ est donc conséquence de l'équation (6) pour tout $\lambda\in R$.

Nous avons aussi

$$\begin{aligned}
H(x,\ \Phi(x;f),\ \Phi(\theta x;f),\ \Phi(\theta^2 x;f)) &= \{-\Phi_{\lambda_1}(\theta x;f)-\Phi_{\lambda_2}(\theta^2 x;f)\ |\ \lambda_1,\lambda_2\in R\}\\
&= \{-(\lambda_1+1)f(\theta x)-\lambda_1 f(\theta^2 x)-\lambda_1 f(x)-(\lambda_2+1)f(\theta^2 x)-\lambda_2 f(x)-\lambda_2(\theta x)\ |\ \lambda_1,\lambda_2\in R\}\\
&= \{(-\lambda_1-\lambda_2)f(x)+(-\lambda_1-\lambda_2-1)f(\theta x)+(-\lambda_1-\lambda_2-1)f(\theta^2 x)\ |\ \lambda_1,\lambda_2\in R\}\\
&= \{(\lambda+1)f(x)+\lambda f(\theta x)+\lambda f(\theta^2 x)\ |\ \lambda\in R\}=\Phi(x;f).
\end{aligned}$$

Donc, la condition (4) est remplie. Nous avons démontré ainsi que l'ensemble $\Phi(x;f)$ est une algèbre de conséquences de (5).

Les résultats de cet article sont contenus dans les deux théorèmes suivants.

Théorème 1. — *Si l'équation* (1) *possède une algèbre de conséquences* $\Phi(x;f)$ *qui ne contient qu'un seul élément* $\Phi_1(x;f)$, *alors la solution générale de* (1) *est donnée par*

$$f(x)=\Phi_1(x;g)\quad(g\in F) \tag{7}$$

avec la fonction arbitraire g $(\in F)$. *Ici* $\Phi_1(x;g)$ *désigne l'expression obtenue en substituant* g *à* f *dans* $\Phi_1(x;f)$.

Démonstration. — On déduit immédiatement, d'après la condition (4), que (7) est une solution de l'équation (1) pour chaque fonction $g\,(\in F)$. D'autre part, si f est une solution de (1) pour $g=f$ le second membre de la formule (7) devient $f(x)$, de sorte que toute solution de l'équation (1) est comprise dans (7). Le théorème est ainsi démontré.

Pour illustrer l'application du théorème 1, considérons l'équation

$$f(\theta_1 x)+f(\theta_2 x)+\cdots+f(\theta_n x)=0, \tag{8}$$

oú les θ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ forment un groupe de l'ordre n, supposant encore que le corps commutatif $(E_2, +, \cdot)$ possède la propriété qu'on n'a pas $nx=0$ pour tout $x\in E_2$.

On vérifie immédiatement qu'une algèbre de conséquences qui ne contient qu'un seul élément est celle dont l'unique élément est

$$\Phi_1(x;\, f)=\frac{1}{n}\,[(n-1)\,f(x)-f(\theta_2 x)-\cdots-f(\theta_n x)],$$

Donc, d'après le théorème 1, la solution générale de l'équation (8) est donnée par

$$f(x)=\frac{1}{n}\,[(n-1)\,g(x)-g(\theta_2 x)-\cdots-g(\theta_n x)],$$

oú la fonction $g\,(\in F)$ est arbitraire.

Supposons qu'il existe au moins une application $M: P(E_2)\to E_2$ avec les propriétés:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ MH(x, S_1, S_2, \ldots, S_n)=H(x, M(S_1), M(S_2), \ldots, M(S_n)) \\ &\qquad (\forall x\in E_1;\ \forall S_i\in P(E_2),\ i=1, 2, \ldots, n); \\ &\text{b)}\ M\{x\}=x \quad (\forall x\in E_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Nous avons désigné ici par $H(x, S_1, S_2, \ldots, S_n)$ l'ensemble

$$\{H(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\mid y_i\in S_i,\ i=1, 2, \ldots, n)\}.$$

Sous cette hypothèse nous avons le

Théorème 2. — *Soit $\Phi(x;f)$ une algèbre de consequences de l'équation* (1) *et soit $M: P(E_2)\to E_2$ une application qui remplit les conditions* (9). *Alors la solution générale de l'équation* (1) *est donnée par la formule*

$$f(x)=M(\Phi(x;g)), \tag{10}$$

où $g\,(\in F)$ désigne une fonction arbitraire.

Démonstration. — Pour une fonction $g\,(\in F)$ choisie arbitrairement, la fonction f détérminée par la formule (10) est un élément de F et l'on a

$$\begin{aligned} H(x, f(x), f(\theta_2 x), \ldots, f(\theta_n x)) &= H(x, M\Phi(x;g), M\Phi(\theta_2 x;g), \ldots, M\Phi(\theta_n x;g)) \\ &= MH(x, \Phi(x;g), \Phi(\theta_2 x;g), \ldots, \Phi(\theta_n x;g))=M\Phi(x;g)=f(x), \end{aligned}$$

d'après les conditions (9) et (4). Donc, la fonction f est alors la solution de l'équation (1).

D'autre part, pour $g=f$, où f est une solution de (1), le second membre de la formule (10) devient

$$M\Phi(x;f)=M\{f(x)\}=f(x) \quad (\forall x\in E_1)$$

puisque, d'après (3), $\Phi(x;f)=\{f(x)\}$.

La formule (1) détermine donc en effet la solution génerale de (1).

L'application $M: P(E_2) \to E_2$ est une généralisation de l'aplication M que nous avons introduit dans [1]. Cependant, tandis que cette application-là existait toujours (il suffisait de poser $M\{x\} = x, \forall x \in E_2$, $M(S) = x_0$, $\forall S \in E_2$, où l'élément x_0 de E_2 est fixé), nous ne pouvons pas être sûr que l'application M remplissant les condition (9) existe dans le cas général.

Les difficultés que contient la construction de l'application M peuvent être diminuées dans certains cas en affaiblisant l'exigence: $\forall S_i \in P(E)$ contenue dans a); par exemple, en la remplaçant par l'exigence:

$$\forall S_i \in P(T_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les ensembles T_i sont certaines parties de E_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Prešić: *Sur l'équation fonctionnelle $f(x) = f[g(x)]$*. Ces Publications, № 64, 1961