PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 116 (1963)

SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES À PLUSIEURS FONCTIONS INCONNUES*

Dragoslav S. Mitrinović

Nous admettons les trois hypothèses suivantes:

Hypothèse 1. Soit

$$x_i \in E, \quad y_i \in E \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots),$$

où E désigne un ensemble non vide arbitraire.

Hypothèse 2. Les valeurs des fonctions F, F_1, F_2, F_3, F_4, ... appartiennent à un groupe additif abélien M.

Hypothèse 3. Dans le groupe M, l'équation

$$mX=A \quad (m \text{ nombre naturel; } A \in M,\ X \in M)$$

admet par rapport à X, une solution unique qui sera désignée par $\frac{1}{m}A$.

La dernière hypothèse sera prise en considération pour $m=2$.

Toutes les variables indépendantes intervenant dans cet article prennent arbitrairement les valeurs appartenant à l'ensemble E, ce qui n'est pas partout indiqué au cours des démonstrations.

Toutes les valeurs des fonctions qu'on y considère appartiennent à l'ensemble M, mais ceci n'est pas également partout mentionné.

1. Considérons l'équation fonctionnelle

$$F_1(x_1, x_2)+F_2(x_2, x_1)=F_1(x_2, x_1)+F_2(x_1, x_2), \tag{1.1}$$

à deux fonctions inconnues F_1 et F_2.

On obtient immédiatement

$$F_1(x_1, x_2)+F_2(x_2, x_1)=S(x_1, x_2)+S(x_2, x_1), \tag{1.2}$$

où S est une certaine fonction.

On peut donner à l'équation (1.1) la forme suivante

$$F_1(x_1, x_2)-F_2(x_1, x_2)=F_1(x_2, x_1)-F_2(x_2, x_1). \tag{1.3}$$

Il en résulte

$$F_1(x_1, x_2)-F_2(x_1, x_2)=T(x_1, x_2)+T(x_2, x_1), \tag{1.4}$$

où T désigne une certaine fonction.

---

* Communiqué le 27 septembre 1963 à la séance du Département d'Analyse de l'Institut Mathématique de Belgrade.

En éliminant $F_1(x_1, x_2)$ des égalités (1.2) et (1.4), on obtient

$$F_2(x_1, x_2) + F_2(x_2, x_1) = S(x_1, x_2) + S(x_2, x_1) - T(x_1, x_2) - T(x_2, x_1),$$

ou bien

$$\{F_2(x_1, x_2) - S(x_1, x_2) + T(x_1, x_2)\} + \{F_2(x_2, x_1) - S(x_2, x_1) + T(x_2, x_1)\} = 0. \tag{1.5}$$

On en déduit

$$F_2(x_1, x_2) - S(x_1, x_2) + T(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) - R(x_2, x_1), \tag{1.6}$$

où R désigne une nouvelle fonction.

En partant des égalités (1.4) et (1.6), on trouve

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2) &= S(x_1, x_2) + T(x_2, x_1) + R(x_1, x_2) - R(x_2, x_1), \\ F_2(x_1, x_2) &= S(x_1, x_2) - T(x_1, x_2) + R(x_1, x_2) - R(x_2, x_1). \end{aligned} \tag{1.7}$$

On constate sans peine que les fonctions $F_1(x_1, x_2)$ et $F_2(x_1, x_2)$, données par (1. 7), représentent une solution de (1. 1).

Donc, la solution générale de l'équation (1. 1), avec hypothèses 1, 2 et 3 (avec $m = 2$), est représentée par (1.7).

Si $F_2 = F_1$, la solution générale de l'équation (1.1) est n'importe quelle fonction de deux variables.

2. Prenons maintenant l'équation fonctionnelle suivante

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_3) + F_2(x_1, x_4) + F_3(x_2, x_3) + F_4(x_2, x_4) \\ &= F_1(x_3, x_1) + F_2(x_3, x_2) + F_3(x_4, x_1) + F_4(x_4, x_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

à quatre fonctions inconnues.

Si l'on y pose[1] $x_2 = x_2^0$ et $x_4 = x_4^0$, il vient

$$F_1(x_1, x_3) - F_1(x_3, x_1) = A(x_1) + B(x_3), \tag{2.2}$$

où A et B sont deux fonctions dépendant seulement d'une variable à valeurs $\in M$.

Pour $x_1 = x_3 = x$ l'égalité (2. 2) donne $B(x) = -A(x)$, ce qui est valable pour tout x et alors (2. 2) devient

$$F_1(x_1, x_3) - F_1(x_3, x_1) = A(x_1) - A(x_3). \tag{2.3}$$

Il en résulte

$$F_1(x, y) = G(x, y) + G(y, x) + A(x), \tag{2.4}$$

où A et G sont deux fonctions à valeurs dans M.

Par le même procédé, on obtient

$$F_4(x, y) = H(x, y) + H(y, x) + C(x), \tag{2.5}$$

où C et H sont certaines fonctions à valeurs dans M.

---

[1] Par x_k^0 $(k = 1, 2, \ldots)$ seront désignées des constantes à valeurs arbitrairement prises dans l'ensemble E.

En portant (2.4) et (2.5) dans (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} &F_2(x_1, x_4) + F_3(x_2, x_3) + A(x_1) + C(x_2) \\ &= F_2(x_3, x_2) + F_3(x_4, x_1) + A(x_3) + C(x_4). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Si l'on y fait $x_2 = x_2^0$ et $x_3 = x_3^0$, il vient

$$F_2(x_1, x_4) - F_3(x_4, x_1) = C(x_4) - A(x_1) + \lambda \quad (\lambda = \text{const} \in M). \tag{2.7}$$

On vérifie sans difficulté que les fonctions $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_3(x, y)$, $F_4(x, y)$, données par (2.4), (2.5), (2.7), représentent une solution de l'équation (2.1).

Ce qui précède permet d'énoncer le résultat suivant:

La solution générale de l'équation (2.1), dans les hypothèses, 1, 2 et 3 (avec $m = 2$), est donnée par

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= G(x, y) + G(y, x) + A(x), \\ F_4(x, y) &= H(x, y) + H(y, x) + C(x), \\ F_2(x, y) &= F_3(y, x) + C(y) - A(x) + \lambda. \end{aligned} \tag{2.8}$$

On peut y supprimer la constante λ. En effet, si l'on pose, dans (2.8),

$$A(x) - \lambda = A^*(x) \quad \text{et} \quad G(x, y) + \frac{\lambda}{2} = G^*(x, y),$$

on obtient précisément (2.8) avec $\lambda = 0$, en omettant l'astérisque.

Supposons à présent que, dans (2.1), $F_3 = F_2$. L'équation (2.7) devient alors

$$F_2(x_1, x_4) - F_2(x_4, x_1) = C(x_4) - A(x_1) + \lambda.$$

Pour $x_4 = x_1 = x$, cette équation se ramène à

$$C(x) - A(x) + \lambda = 0.$$

Ceci étant, on a

$$F_2(x_1, x_4) - F_2(x_4, x_1) = A(x_4) - A(x_1),$$

ou bien

$$F_2(x_1, x_4) + A(x_1) = F_2(x_4, x_1) + A(x_4).$$

On en déduit

$$F_2(x, y) = F_3(x, y) = I(x, y) + I(y, x) - A(x), \tag{2.9}$$

où I (avec $I(x, y) \in M$) est une nouvelle fonction.

Les fonctions $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_4(x, y)$, données par (2.4), (2.5), (2.9), représentent une solution de l'équation (2.1), suivie de la condition $F_3 \equiv F_2$.

Par conséquent, la solution générale de l'équation

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_3) + F_2(x_1, x_4) + F_2(x_2, x_3) + F_4(x_2, x_4) \\ &= F_1(x_3, x_1) + F_2(x_4, x_1) + F_2(x_3, x_2) + F_4(x_4, x_2), \end{aligned} \tag{2.10}$$

sous les hypothèses 1, 2, et 3 (avec $m = 2$) est représentée par

$$
\begin{aligned}
&F_1(x, y) = G(x, y) + G(y, x) + A(x), \\
(2.11) \qquad &F_2(x, y) = I(x, y) + I(y, x) - A(x), \\
&F_4(x, y) = H(x, y) + H(y, x) + A(x),
\end{aligned}
$$

où G, H, I, A sont des fonctions prenant des valeurs dans M.

Prenons maintenant l'équation (2.1) dans le cas où $F_1 \equiv F_2 \equiv F_3 \equiv F_4$. Cette équation devient alors

$$
\begin{aligned}
(2.12) \qquad & F(x_1, x_3) + F(x_1, x_4) + F(x_2, x_3) + F(x_2, x_4) \\
& = F(x_3, x_1) + F(x_4, x_1) + F(x_3, x_2) + F(x_4, x_2).
\end{aligned}
$$

Pour $x_2 = \overset{0}{x}_2$ et $x_4 = \overset{0}{x}_4$, il vient

$$(2.13) \qquad F(x_1, x_3) - F(x_3, x_1) = A(x_1) - B(x_3).$$

Si l'on y pose $x_1 = x_3 = x$, on a $A(x) = B(x)$, pour tout x, et (2.13) devient alors

$$F(x_1, x_3) - A(x_1) = F(x_3, x_1) - A(x_3).$$

On en déduit

$$(2.14) \qquad F(x_1, x_3) = A(x_1) + G(x_1, x_3) + G(x_3, x_1),$$

où G est une fonction à valeurs dans M.

L'équation (2.12), en tenant compte de (2.14), reçoit la forme suivante

$$A(x_1) + A(x_2) = A(x_3) + A(x_4).$$

La solution générale de cette équation fonctionnelle est

$$A(x) = k = \text{const} \in M.$$

La formule (2.14) devient alors

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_3) &= k + G(x_1, x_3) + G(x_3, x_1) \\
&= \left\{G(x_1, x_3) + \frac{k}{2}\right\} + \left\{G(x_3, x_1) + \frac{k}{2}\right\}.
\end{aligned}
$$

Donc, la solution générale de l'équation (2.12), sous les hypothèses 1, 2 et 3 (avec $m = 2$) est

$$F(x, y) = H(x, y) + H(y, x),$$

où H (avec $H(x, y) \in M$) désigne une fonction.

On déduit également le dernier résultat en partant de la solution générale (2.11) de l'équation (2.10).

3. Envisageons encore l'équation fonctionnelle

$$
\begin{aligned}
(3.1) \qquad & F_1(x_1, x_3) + F_2(x_1, x_4) + F_3(x_2, x_3) + F_4(x_2, x_4) \\
& = F_2(x_3, x_1) + F_1(x_3, x_2) + F_3(x_4, x_1) + F_4(x_4, x_2).
\end{aligned}
$$

En y faisant $x_1 = \overset{0}{x}_1$ et $x_3 = \overset{0}{x}_3$, il vient

$$(3.2) \qquad F_4(x_2, x_4) - F_4(x_4, x_2) = A(x_2) - B(x_4).$$

Si l'on y pose $x_2 = x_4 = x$, on obtient l'égalité $A(x) = B(x)$, valable pour tout x.

Donc, (3.2) devient alors

$$F_4(x_2, x_4) - F_4(x_4, x_2) = A(x_2) - A(x_4).$$

On en déduit

$$F_4(x, y) = H(x, y) + H(y, x) + A(x). \tag{3.3}$$

L'équation (3.1), d'après (3.3), se ramène à

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_3) + F_2(x_1, x_4) + F_3(x_2, x_3) + A(x_2) \\ = F_2(x_3, x_1) + F_1(x_3, x_2) + F_3(x_4, x_1) + A(x_4). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour $x_2 = x_2^0$ et $x_4 = x_4^0$ la dernière équation a la forme suivante

$$F_1(x_1, x_3) - F_2(x_3, x_1) = C(x_1) - D(x_3). \tag{3.5}$$

Si l'on met $x_2 = x_2^0$ et $x_3 = x_3^0$, l'équation (3.4) devient

$$F_2(x_1, x_4) - F_3(x_4, x_1) = L(x_1) - I(x_4). \tag{3.6}$$

Pour $x_1 = x_1^0$ et $x_4 = x_4^0$, l'équation (3.4) devient

$$F_3(x_2, x_3) - F_1(x_3, x_2) = P(x_2) - Q(x_3). \tag{3.7}$$

Les équations (3.5), (3.6), (3.7), après un changement de notations, deviennent respectivement

$$F_1(x, y) - F_2(y, x) = C(x) - D(y), \tag{3.8}$$

$$F_2(x, y) - F_3(y, x) = L(x) - I(y), \tag{3.9}$$

$$F_3(x, y) - F_1(y, x) = P(x) - Q(y). \tag{3.10}$$

Par addition membre à membre, des trois dernières équations on tire

$$\begin{aligned} \{F_1(x, y) + F_2(x, y) + F_3(x, y)\} - \{F_1(y, x) + F_2(y, x) + F_3(y, x)\} \\ = \{C(x) + L(x) + P(x)\} - \{D(y) + I(y) + Q(y)\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Si l'on met $y = x$, la dernière équation donne, pour tout x,

$$C(x) + L(x) + P(x) = D(x) + I(x) + Q(x). \tag{3.12}$$

En éliminant F_2 et F_3 des (3.8), (3.9) et (3.10), on trouve

$$F_1(x, y) - F_1(y, x) = \{C(x) - I(x) + P(x)\} - \{D(y) - L(y) + Q(y)\}.$$

Vu (3. 12), la dernière équation s'écrit comme suit

$$F_1(x, y) - F_1(y, x) = \{C(x) - I(x) + P(x)\} - \{C(y) - I(y) + P(y)\}. \tag{3.13}$$

La solution générale de cette équation est

$$F_1(x, y) = C(x) - I(x) + P(x) + K(x, y) + K(y, x). \tag{3.14}$$

Les fonctions F_2 et F_3 sont données par

$$F_2(x, y) = D(x) - I(y) + P(y) + K(x, y) + K(y, x), \tag{3.15}$$

$$F_3(x, y) = D(y) - L(y) + P(x) + K(x, y) + K(y, x). \tag{3.16}$$

Pour que $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_3(x, y)$, $F_4(x, y)$, donnés par (3.14), (3.15), (3.16), (3.3) représentent une solution de l'équation (3.1), la condition suivante doit être remplie:

$$\begin{aligned} C(x_1) - C(x_3) + L(x_1) - L(x_3) + I(x_3) - I(x_4) \\ + P(x_2) - P(x_3) + A(x_2) - A(x_4) = 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

En posant $x_2 = \overset{0}{x_2}$, $x_3 = \overset{0}{x_3}$, $x_4 = \overset{0}{x_4}$, l'équation (3.17) fournit, pour tout x,

$$C(x) + L(x) = \alpha \quad (\alpha = \text{const} \in M). \tag{3.18}$$

Vu (3. 18), l'équation (3.17) devient

$$I(x_3) - I(x_4) + P(x_2) - P(x_3) + A(x_2) - A(x_4) = 0. \tag{3.19}$$

Lorsque $x_3 = \overset{0}{x_3}$ et $x_4 = \overset{0}{x_4}$, la dernière équation donne, pour tout x,

$$P(x) + A(x) = \beta \quad (\beta = \text{const} \in M). \tag{3.20}$$

Selon (3.20), l'équation (3.19) se réduit à

$$I(x_3) + A(x_3) = I(x_4) + A(x_4). \tag{3.21}$$

On en déduit

$$I(x) + A(x) = \gamma \quad (\gamma = \text{const} \in M). \tag{3.22}$$

Selon (3.18), (3.20), (3.22) on a

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= C(x) + \beta - \gamma + K(x, y) + K(y, x), \\ F_2(x, y) &= D(x) + \beta - \gamma + K(x, y) + K(y, x), \\ F_3(x, y) &= C(y) + D(y) - A(x) - \alpha + \beta + K(x, y) + K(y, x), \\ F_4(x, y) &= A(x) + H(x, y) + H(y, x). \end{aligned} \tag{3.23}$$

On constate, sans difficulté, que (3.23) constitue bien une solution de (3.1), qui est valable avec les hypothèses 1, 2 et 3 où $m = 2$

En remplaçant $A(x)$, $C(x)$, $D(x)$ respectivement par

$$R(x) + 2\gamma - \beta - \alpha, \quad S(x) + \gamma - \beta, \quad T(x) + \gamma - \beta$$

et $H(x, y)$ par $G(x, y) + \frac{1}{2}(2\gamma - \beta - \alpha)$, les formules (3.23) deviennent

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= S(x) + K(x, y) + K(y, x), \\ F_2(x, y) &= T(x) + K(x, y) + K(y, x), \\ F_3(x, y) &= S(y) + T(y) - R(x) + K(x, y) + K(y, x), \\ F_4(x, y) &= R(x) + G(x, y) + G(y, x). \end{aligned} \tag{3.24}$$

D'après la manière au moyen de laquelle est obtenu l'ensemble (3.24) des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, on conclut que (3.24) représente la solution générale de l'équation (3.1). Les fonctions G, K, R, S, T intervenant dans (3.24) sont à valeurs dans l'ensemble M.

4. En étudiant une question {*voir*: [1]} concernant une équation fonctionnelle, nous avons rencontré l'équation (2.1). Les autres équations, résolues dans cet article sont des modifications de l'équation (2.1).

Nous allons indiquer plusieurs équations fonctionnelles pouvant être également résolues par la méthode employée dans ce qui précède.

Tout d'abord citons l'équation suivante:

$$\begin{aligned} & F_1(x_1, x_4) + F_2(x_1, x_5) + F_3(x_1, x_6) \\ & + F_4(x_2, x_4) + F_5(x_2, x_5) + F_6(x_2, x_6) \\ & + F_7(x_3, x_4) + F_8(x_3, x_5) + F_9(x_3, x_6) \\ = {} & F_1(x_4, x_1) + F_2(x_4, x_2) + F_3(x_4, x_3) \\ & + F_4(x_5, x_1) + F_5(x_5, x_2) + F_6(x_5, x_3) \\ & + F_7(x_6, x_1) + F_8(x_6, x_2) + F_9(x_6, x_3). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Il serait aussi intéressant de considérer, par exemple, les cas suivants de l'équation (4.1):

1° $F_k = F \qquad (k = 1, 2, \ldots, 9)$,

2° $F_1 = F_3 = F_5 = F_7 = F_9$,

3° $F_1 = F_2, \quad F_3 = F_4, \quad F_5 = F_6, \quad F_7 = F_8 = F_9$.

On pourrait aussi, en laissant inaltérés les indices des variables, faire dans l'équation (4.1) la substitution suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & k_8 & k_9 \end{pmatrix} \quad (k_\nu \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\})$$

sur les indices affectant les fonctions F_r $(r = 1, 2, 3, \ldots, 9)$.

On pourrait aussi résoudre des équations fonctionnelles où interviennent des fonctions dépendant de plusieurs variables, comme par exemple:

$$\begin{aligned} & F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + F_2(x_1, x_2, x_5, x_6) \\ & + F_3(x_2, x_3, x_4, x_1) + F_4(x_2, x_5, x_6, x_1) \\ & + F_5(x_3, x_4, x_1, x_2) + F_6(x_5, x_6, x_1, x_2) \\ & + F_7(x_4, x_1, x_2, x_3) + F_8(x_6, x_1, x_2, x_5) \\ = {} & F_1(x_3, x_4, x_5, x_6) + F_2(x_1, x_3, x_5, x_7) \\ & + F_3(x_4, x_5, x_6, x_3) + F_4(x_2, x_4, x_6, x_8) \\ & + F_5(x_5, x_6, x_3, x_4) + F_6(x_7, x_5, x_3, x_1) \\ & + x_7(x_6, x_3, x_4, x_5) + F_8(x_8, x_6, x_4, x_2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

AJOUTÊ SUR L'ÉPREUVE

Remarque 1. — La solution générale de l'équation fonctionnelle (1.1) est donnée, en réalité, au moyen de l'égalité (1.4), à savoir: l'une des fonctions F_1 ou F_2 peut être prise comme abritraire, tandis que la fonction restante se détermine immédiatement de (1.4).

Remarque 2. — P. M. Vasić, qui a lu cet article dans l'épreuve, a résolu les équations (4.1) et (4.2). Il a également résolu les équations construites à partir de l'équation (2.1), en y permutant les couples de variables

$$(x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_1), (x_4, x_2)$$

dans les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4. Vasić a appliqué un procédé différent de celui employé dans cet article.

Les résultats dus à Vasić seront publiés dans le journal *Matematički Vesnik*, t. 1 (16), 1964.

RÉFÉRENCE

[1] D. S. Mitrinović: *Équations fonctionnelles linéaires paracycliques de première espèce*, Publications de l'Institut Mathématique de Belgrade, nouvelle série, t. 3 (17), 1963.