PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 115 (1963)

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES*

Dragoslav S. Mitrinović

1. L'équation différentielle des lignes asymptotiques de la surface

$$x=u, \quad y=v, \quad z=F(u,v) \tag{1}$$

ainsi que de la surface

$$x=\frac{\partial F}{\partial u}, \quad y=\frac{\partial F}{\partial v}, \quad z=F-u\frac{\partial F}{\partial u}-v\frac{\partial F}{\partial v} \tag{2}$$

est une même équation, à savoir,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2+2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\,\mathrm{d}v^2=0, \tag{3}$$

F étant une fonction arbitraire des paramètres u et v, qui possède des dérivées partielles du premier et du second ordre.

Toutes les fois qu'on pourra déterminer les lignes asymptotiques de la surface (1), on connaîtra en même temps les lignes asymptotiques de la surface (2).

Le résultat précédent [1] s'énonce aussi comme suit:

Les lignes asymptotiques de la surface (1) correspondent à celles de l'enveloppe des plans

$$z+ux+vy=F(u,v).$$

R. Godeau [2] a donné une interprétation géométrique de ce résultat. Il a montré que la correspondance entre les points de deux surfaces (1) et (2), établie précédemment, est le produit d'une polarité par rapport au paraboloïde

$$x^2+y^2-2z=0$$

par une symétrie par rapport au plan xy.

2. Si l'on prend deux nouvelles variables indépendantes a et b, liées aux anciennes variables u et v par les formules

$$u=f(a,b), \quad v=g(a,b), \tag{4}$$

la surface (1) s'écrit

$$x=f(a,b), \quad y=g(a,b), \quad z=h(a,b) \tag{5}$$

---

* Communiqué le 10 octobre 1963 à la séance du Département d'Analyse de l'Institut Mathématique de Belgrade.

avec

$$h(a, b) = F(f(a, b),\ g(a, b)).$$

Les relations (2), d'après (4), se transforment en:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{\partial h}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial u}, \\ y &= \frac{\partial h}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial v}. \\ z &= h - f\left(\frac{\partial h}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial u}\right) - g\left(\frac{\partial h}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

En partant des relations (4), on trouve

$$(7)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial u} &= \frac{1}{\Delta}\frac{\partial g}{\partial b}, & \frac{\partial a}{\partial v} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial b}, \\ \frac{\partial b}{\partial u} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial g}{\partial a}, & \frac{\partial b}{\partial v} &= \frac{1}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial a}, \end{aligned}$$

où Δ désigne le jacobien $\Delta = \dfrac{D(f, g)}{D(a, b)}$, supposé différent de zéro.

En portant les expressions (7) dans les relations (6), on arrive à

$$(8)\qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\Delta}\frac{D(h, g)}{D(a, b)}, \\ y &= \frac{1}{\Delta}\frac{D(f, h)}{D(a, b)} \\ z &= h - \frac{f}{\Delta}\frac{D(h, g)}{D(a, b)} - \frac{g}{\Delta}\frac{D(f, h)}{D(a, b)}. \end{aligned}$$

3. On peut obtenir le résultat précédent en procédant aussi de la manière suivante.

Considérons une surface

$$x = f(a, b),\quad y = g(a, b)\quad z = h(a, b)$$

et cherchons une autre surface

$$x = f_1(a, b),\quad y = g_1(a, b),\quad z = h_1(a, b)$$

jouissant de la propriété que ces deux surfaces aient une même équation différentielle des asymptotiques.

A cet effet, au lieu des a et b, considérons les u et v introduits par les formules

$$(9)\qquad f(a, b) = u,\quad g(a, b) = v,$$

d'où l'on tire

$$a = \theta_1(u, v),\quad b = \theta_2(u, v),$$

de sorte que

$$z = h(\theta_1(u, v), \theta_2(u, v)) = F(u, v).$$

Pour calculer $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ en fonction de a et b, partons de

$$h(a, b) = F(u, v),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial h}{\partial a} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a},$$

$$\frac{\partial h}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial b}.$$

D'après (9), on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial a} = \frac{\partial h}{\partial a},$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial b} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{\partial h}{\partial b}.$$

En résolvant ces équations, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{D}(h, g)}{\mathrm{D}(a, b)}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{\Delta}\frac{\mathrm{D}(f, h)}{\mathrm{D}(a, b)},$$

si $\Delta \neq 0$.

Par suite, nous avons obtenu par une autre voie les résultats déjà indiqués plus haut.

4. On voit donc que la détermination des lignes asymptotiques de deux surfaces distinctes (5) et (8) dépend d'une même équation différentielle.

Le fait indiqué permet de rattacher à toute surface une autre surface pour laquelle on connaîtra les asymptotiques toutes les fois que l'on pourra déterminer les asymptotiques de la surface initiale.

On pourrait penser que l'on obtienne, au moyen du procédé indiqué, une chaîne infinie de surfaces, mais, par contre, on aboutit à un cycle fermé de surfaces, ce qui sera démontré dans la suite.

5. Au sujet du résultat précédent nous avons eu, en l'année 1937, un échange de correspondance avec M. R. Godeau (à Bruxelles) et il a fait l'observation suivante:

Appelons T la transformation (4). Si deux plans sont symétriques par rapport à Oxy, les pôles de ces deux plans par rapport au paraboloïde

$$x^2 + y^2 - 2z = 0$$

sont deux poins symétriques par rapport au sommet O. Dès lors, si S_1, S_2, S_3, S_4, ... sont les surfaces successives déduites l'une de l'autre par la transformation T, on a

$$S_3 \equiv \text{symétrique de } S_1 \text{ par rapport à } Oz,$$

$$S_4 \equiv \text{symétrique de } S_2 \text{ par rapport à } Oz,$$

$$S_5 \equiv \text{symétrique de } S_3 \text{ par rapport à } Oz \equiv S_1$$

$$\vdots$$

de sorte qu'au lieu d'avoir une chaîne infinie de surfaces, on a quatre surfaces formant un cycle fermé.

6. Pour illustrer le résultat obtenu plus haut, P. M. Vasić l'a appliqué à l'exemple suivant.

Considérons la surface de Jamet

$$(S_1) \qquad x=\frac{F(b)}{G(a)}, \quad y=a\frac{F(b)}{G(a)}, \quad z=b$$

(F, G les fonctions arbitraires des paramètres a, b possédant des dérivées du premier et du second ordre).

La transformation T conduit à la surface déterminée par

$$(S_2) \qquad x=\frac{G(a)-aG'(a)}{F'(b)}, \quad y=\frac{G'(a)}{F'(b)}, \quad z=b-\frac{F(b)}{F'(b)}.$$

Cette surface a la même équation des asymptotiques que la surface (S_1).

En appliquant de nouveau la transformation T à (S_2), on arrive à la surface

$$(S_3) \qquad x=-\frac{F(b)}{G(a)}, \quad y=-a\frac{F(b)}{G(a)}, \quad z=b,$$

ayant la même équation différentielle des asymptotiques que les surfaces (S_1) et (S_2) et étant symétrique de la surface (S_1) par rapport à l'axe Oz.

Si l'on applique à (S_3), encore une fois, la transformation T, on obtient la surface

$$(S_4) \qquad x=-\frac{G(a)-aG'(a)}{F'(b)}, \quad y=-\frac{G'(a)}{F'(b)}, \quad z=b-\frac{F(b)}{F'(b)},$$

qui est symétrique de (S_2) par rapport à Oz.

En faisant la nouvelle application de T à (S_4), on trouve la surface (S_5) qui est identique à (S_1).

On doit observer que, par application de la transformation T, la chaîne de surfaces ainsi obtenues peut se fermer déjà après la deuxième application de la transformation T. Ceci aura lieu s'il s'agit des surfaces symétriques par rapport à Oz.

La surface spirale

$$(S_1') \qquad x=F(a)\cos(a+b), \quad y=F(a)\sin(a+b), \quad z=G(a),$$

par exemple, possède ladite propriété.

En appliquant la transformation T à (S_1'), on obtient la surface

$$(S_2') \qquad x=\frac{G'(a)}{F'(a)}\cos(a+b), \quad y=\frac{G'(a)}{F'(a)}\sin(a+b), \quad z=\frac{G(a)F'(a)-G'(a)F(a)}{F'(a)}.$$

Si l'on fait la nouvelle application de T, on obtient

$$(S_3') \qquad x=-F(a)\cos(a+b), \quad y=-F(a)\sin(a+b), \quad z=G(a).$$

En faisant, dans l'équation de (S_3'),

$$a=a_1, \quad b=b_1+\pi,$$

on voit que $S_1'\equiv S_3'$.

RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović: *Théorème sur les lignes asymptotiques*, Mathesis, t. 50, 1936, p. 367—368.

[2] R. Godeau: *A propos d'un théorème sur les lignes asymptotiques*, Mathesis, t. 50, 1936, p. 368—369.