PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 114 (1963)

O NEKIM KLASAMA CIKLIČNIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

Dragomir Đoković

(Primljeno 1. septembra 1963)

SADRŽAJ

NOTACIJE I SKRAĆENICE

Pojedini delovi teze su numerisani rimskim ciframa. Delovi su podeljeni na paragrafe (koji su numerisani arapskim ciframa) od kojih svaki ima svoje ime, izuzev paragrafa u uvodu.

Pri pozivanju na neku jednačinu (relaciju) iz istog dela, pisana je njena oznaka koja se sastoji od dva broja. Prvi broj je u stvari redni broj paragrafa u kome se jednačina nalazi. Jednakost iz nekog drugog dela označavana je sa tri broja pri čemu je prvi — broj odeljka (dela teze) a drugi — broj paragrafa u kome se jednačina nalazi.

Slova N i R, u čitavom radu, označavaju skupove prirodnih i realnih brojeva, respetkivno.

U V O D

Teza je sastavljena iz tri dela:

I deo — Generalizacija jednog rezultata do kojeg su došli Aczél, Ghermănescu i Hosszú;

II deo — Funkcionalna jednačina

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - F(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, x_1) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n \cdot x_{n+1});$$

III deo — Rešavanje izvesnih klasa funkcionalnih jednačina u realnoj oblasti.

1. U prvom delu dobio sam opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_p) + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}) + \ldots \\ &+ F(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n) + F(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \ldots \\ &+ F(x_n, x_1, \ldots, x_{p-1}) = 0 \qquad (n \geqslant 2p-1), \end{aligned} \tag{1.1}$$

kao i jednačine

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) + F_2(x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}) + \ldots \\ &+ F_{n-p+1}(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n) \\ &+ F_{n-p+2}(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \ldots \\ &+ F_n(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = 0 \qquad (n \geqslant 2p-1), \end{aligned} \tag{1.2}$$

pod sledećim pretpostavkama

1° $x_i \in S$, gde je S proizvoljan neprazan skup;

2° Nepoznata funkcija F, odnosno nepoznate funkcije F_i uzimaju vrednosti iz jedne aditivne Abelove grupe M.

Jednačinu (1.1), za proizvoljno $n \geqslant p$, rešili su 1960. godine J. Aczél, M. Ghermănescu i M. Hosszú u svom članku [2] „On cyclic equations". Oni su takođe našli opšte rešenje, ali su morali, zbog prirode upotrebljenog dokaza, da uvedu i treću pretpostavku:

3° Jednačina $mX = A$ $(X, A \in M)$, za svako $m \leqslant n$ $(m \in N)$, ima jedinstveno rešenje $X = A/m$.

Rezultate iz članaka [2] generalisao je takođe M. Hosszú u svom radu [7]. U ovom radu on nije pokušao da oslabi pretpostavke 1°—3° već daje generalizaciju u drugom smislu, modifikujući jednačinu (1.1).

Moj dokaz je znatno jednostavniji od onog koji su, u slučaju $n \geqslant 2p-1$, pomenuti autori dali u [2].

Jednačina (1.2) je prirodno uopštenje jednačine (1.1) i njeno opšte rešenje sam odredio istim metodom.

Ostaje nerešeno sledeće pitanje: Da li se takođe može naći opšte rešenje jednačina (1.1) i (1.2) ako je $p<n<2p-1$ i ako se odbaci pretpostavka 3°.

2. U drugom delu sam rešavao jednačinu

$$(2.1) \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - F(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, x_1) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}).$$

Pretpostavio sam da su nezavisno promenljive $x_i \in S$ $(i=1, 2, \ldots, n+1)$; da je S polugrupa u odnosu na internu binarnu operaciju „·" i da za tu operaciju postoji jedinični elemenat $e\,(\in S)$. Za nepoznate funkcije F i f sam pretpostavio da uzimaju vrednosti iz jedne aditivne Abelove grupe M u kojoj jednačina $(n+1)\,X=A$ za svako $A \in M$ ima jedinstveno rešenje po $X \in M$, naime $X=A/(n+1)$. Može se dokazati da iz poslednje pretpostavke sleduje da takođe i jednačina

$$m^k X = A \qquad (m \mid (n+1);\ k \in N)$$

za svako $A \in M$ ima jedinstveno rešenje po X. Ovu posledicu sam koristio u dokazu i bez pozivanja na nju.

Eliminacijom funkcije F, sveo sam jednačinu (2.1) na cikličnu jednačinu

$$(2.2) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}) + f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1} \cdot x_1) + \ldots + f(x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} \cdot x_n) = 0.$$

Ovo je upravo ona jednačina koju smo posmatrali prof. D. S. Mitrinović i ja u članku [8]. U tom članku navedena su izvesna rešenja jednačine (2.2), ali u opštem slučaju nije utvrđena priroda tih rešenja. U članku [3] dokazao sam da je rešenje koje je navedeno u [8] opšte ako je $n=3$.

Ovde sam nastavio rad na ispitivanju karaktera onih rešenja jednačine (2.2) na koje je ukazano u [8]. Dokazao sam da su ta rešenja opšta i u slučajevima $n=5$ i $n=7$.

Ovo mi je sugeriralo da pretpostavim da su ta rešenja opšta i u slučaju proizvoljnog neparnog n. Da li je to tačno, zasada ostaje nepoznato.

S obzirom na vrlo opšte pretpostavke o S i M dokazi su elementarni ma da vrlo dugački. Da bi se ovi dokazi učinili što preglednijim, uveo sam relaciju ekvivalencije $\sim$ u skupu funkcija $E=\{f : S^n \to M\}$. Pisano je $g \sim h$ $(f, g \in E)$ tada i samo tada ako funkcija $g-h$ ima oblik

$$f_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \cdot t_n) - f_1(t_2, t_3, \ldots, t_n \cdot t_1) + \sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \{ f_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_{n-\nu} \cdot t_{n-\nu+1}, t_{n-\nu+2}, \ldots, t_{n-1}, t_n) - f_\nu(t_{\nu+1}, t_{\nu+2}, \ldots, t_n, t_1, \ldots, t_{\nu-1} \cdot t_\nu) \},$$

gde su f_i proizvoljne funkcije naznačenih argumenata.

U istom cilju, umesto $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \cdot x_8)$ pisano je samo $1234567 \cdot 8$ i slično u drugim slučajevima. Drugim rečima, izostavljana su slova f i x, zapete i zagrade.

3. U trećem delu posmatrao sam više klasa funkcionalnih jednačina u realnom području. Evo tih jednačina:

$$F(x, y, z) - F(y, z, x) = f(x, y+z), \tag{3.1}$$

$$f(x, y+z) + f(y, z+x) + f(z, x+y) = 0, \tag{3.1 bis}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F(x_1 + \ldots + x_m, x_{m+1} + \ldots + x_{m+n}, x_{m+n+1} + \ldots + x_{m+n+p}) = 0, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+n}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F_i(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+n}) = 0. \tag{3.4}$$

Ovde je C ciklični operator, perioda $m+n+p$, koji je definisan pomoću jednakosti

$$Cf(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+p}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{m+n+p}, x_1),$$

gde je f proizvoljna funkcija.

Jednačina (3.1) je specijalni slučaj jednačine (2.1) iz drugog dela teze (naime ovde je $S = M = R$, a operacija „$\cdot$" sabiranje). Ova jednačina se svodi na (3.1 bis). Jednačinu (3.1 bis) rešio sam u članku [4] pod pretpostavkom da je funkcija f neprekidna. Koristeći opšte rešenje Cauchyeve jednačine, ovde sam formirao opšte rešenje jednačina (3.1) i (3.1 bis).

Jednačinu (3.2) rešio sam u članku [5] pod pretpostavkom da je funkcija F neprekidna.

Jednačine (3.3) i (3.4) ovde se prvi put pojavljuju. Prva se svodi na Cauchyevu jednačinu te sam na taj način odredio njeno opšte rešenje. Jednačina (3.4) je, izgleda, znatno komplikovanija. Zato sam posmatrao samo jedan njen partikularan slučaj i to kada je $m = 2$ i $n = p = 1$. Pretpostavljajući tada da su funkcije F_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ neprekidne, dobio sam opšte rešenje te jednačine. Sve ove funkcije su polinomi drugog stepena po dvema promenljivim pri čemu koeficijenti zadovoljavaju izvesne uslove.

Na kraju želim da istaknem činjenicu, da me je prof. D. S. Mitrinović podstakao na naučni rad u matematici i posebno u ovoj oblasti. Profesor Mitrinović je takođe prodiskutovao sa mnom plan teze, pročitao prvu verziju rukopisa i dao niz saveta i sugestija koji su znatno poboljšali tekst.

U istom cilju, umesto $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \cdot x_8)$ pisano je samo $1234567 \cdot 8$ i slično u drugim slučajevima. Drugim rečima, izostavljana su slova f i x, zapete i zagrade.

3. U trećem delu posmatrao sam više klasa funkcionalnih jednačina u realnom području. Evo tih jednačina:

$$F(x, y, z) - F(y, z, x) = f(x, y+z), \tag{3.1}$$

$$f(x, y+z) + f(y, z+x) + f(z, x+y) = 0, \tag{3.1 bis}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F(x_1 + \dots + x_m, x_{m+1} + \dots + x_{m+n}, x_{m+n+1} + \dots + x_{m+n+p}) = 0, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F(x_1 + x_2 + \dots + x_m, x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_{m+n}) = 0, \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F_i(x_1 + x_2 + \dots + x_m, x_{m+1} + x_{m+2} + \dots + x_{m+n}) = 0. \tag{3.4}$$

Ovde je C ciklični operator, perioda $m+n+p$, koji je definisan pomoću jednakosti

$$Cf(x_1, x_2, \dots, x_{m+n+p}) = f(x_2, x_3, \dots, x_{m+n+p}, x_1),$$

gde je f proizvoljna funkcija.

Jednačina (3.1) je specijalni slučaj jednačine (2.1) iz drugog dela teze (naime ovde je $S = M = R$, a operacija „$\cdot$" sabiranje). Ova jednačina se svodi na (3.1 bis). Jednačinu (3.1 bis) rešio sam u članku [4] pod pretpostavkom da je funkcija f neprekidna. Koristeći opšte rešenje Cauchyeve jednačine, ovde sam formirao opšte rešenje jednačina (3.1) i (3.1 bis).

Jednačinu (3.2) rešio sam u članku [5] pod pretpostavkom da je funkcija F neprekidna.

Jednačine (3.3) i (3.4) ovde se prvi put pojavljuju. Prva se svodi na Cauchyevu jednačinu te sam na taj način odredio njeno opšte rešenje. Jednačina (3.4) je, izgleda, znatno komplikovanija. Zato sam posmatrao samo jedan njen partikularan slučaj i to kada je $m=2$ i $n=p=1$. Pretpostavljajući tada da su funkcije F_i $(i=1, 2, 3, 4)$ neprekidne, dobio sam opšte rešenje te jednačine. Sve ove funkcije su polinomi drugog stepena po dvema promenljivim pri čemu koeficijenti zadovoljavaju izvesne uslove.

Na kraju želim da istaknem činjenicu, da me je prof. D. S. Mitrinović podstakao na naučni rad u matematici i posebno u ovoj oblasti. Profesor Mitrinović je takođe prodiskutovao sa mnom plan teze, pročitao prvu verziju rukopisa i dao niz saveta i sugestija koji su znatno poboljšali tekst.

I DEO

GENERALIZACIJA JEDNOG REZULTATA DO KOJEG SU DOŠLI ACZÉL, GHERMĂNESCU I HOSSZÚ

1. Neki rezultati Aczéla, Ghermănescua i Hosszúa

J. Aczél, M. Ghermănescu i M. Hosszú u svom radu [2] *On cyclic equations* posmatrali su osnovnu cikličnu funkcionalnu jednačinu

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) + \ldots + F(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 \tag{1.1}$$

kao i iz nje izvedenu jednačinu

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}) + \ldots + F(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n) + F(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \ldots + F(x_n, x_1, \ldots, x_{p-1}) = 0, \tag{1.2}$$

gde su p i n $(p<n)$ dva proizvoljna pozitivna broja.

U navedenom radu oni su formulisali tri teoreme od kojih druga glasi: *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.2), *ako je* $n \geqslant 2p-1$, *glasi*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f(x_2, x_3, \ldots, x_p). \tag{1.3}$$

Ova teorema, kao i druge dve, dokazana je pod sledećim pretpostavkama:

1° $x_i \in S\,(i=1, 2, \ldots, n)$ gde je S proizvoljan neprazan skup;

2° Funkcija F uzima vrednosti iz jedne aditivne Abelove grupe M;

3° Za grupu M pretpostavlja se da u njoj jednačina $mX = A$ $(X, A \in M)$, za svako $m \leqslant n\,(m \in N)$, ima jedinstveno rešenje $X = A/m$.

Treća teorema, koja se odnosi na jednačinu (1.2) u slučaju $p<n<2p-1$, dokazana je u pomenutom članku samo na jednom primeru. M. Hosszú [7] je dokazao jednu teoremu koja generališe rezultate dveju spomenutih teorema. Taj generalniji rezultat je dobijen pod istim pretpostavkama 1°, 2°, 3°.

2. Prvo uopštenje

U ovom paragrafu naći ćemo opšte rešenje funkcionalne jednačine (1.2) za $n \geqslant 2p-1$, gde su uzete u obzir samo pretpostavke 1° i 2° iz prethodnog paragrafa.

Teorema 1. *Pod pretpostavkama* 1° *i* 2° *opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.2), *za* $n \geqslant 2p-1$, *je*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f(x_2, x_3, \ldots, x_p) + A, \tag{2.1}$$

gde je f *proizvoljna funkcija (posmatranog tipa) i* A *proizvoljan element iz* M *za koji je* $nA = 0$.

Dokaz. Zamenom se može proveriti, da svaka funkcija F oblika (2.1) zaista zadovoljava funkcionalnu jednačinu (1.2). Ostaje da se dokaže obrnuto, tj. da iz (1.2) sleduje da funkcija F ima oblik (2.1). Da bismo to učinili, poći ćemo od jednačine (1.2).

Neka je c proizvoljno fiksirani element iz skupa S. Pretpostavljajući da je $n \geqslant 2p-1$ i stavljajući

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \ldots = x_n = c,$$

jednačina (1.2) dobija oblik

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_p) + F(x_2, x_3, \ldots, x_p, c) + \ldots \\ &+ F(x_p, c, c, \ldots, c) + (n-2p+1)\, F(c, c, \ldots, c) \\ &+ F(c, c, \ldots, c, x_1) + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2) + \ldots \\ &+ F(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Stavljajući u poslednjoj jednakosti $x_p = c$, dobija se

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) + \ldots \\ &+ F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) + (n-2p+2)\, F(c, c, \ldots, c) \\ &+ F(c, c, \ldots, c, x_1) + F(c, c, \ldots, c, x_1, x_2) + \ldots \\ &+ F(c, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Oduzimanjem jednakosti (2.3) od (2.2) i sređivanjem dolazi se do relacije

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = {} & F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) - F(x_2, x_3, \ldots, x_p, c) \\ & + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) - F(x_3, x_4, \ldots, x_p, c, c) \\ & + \ldots \\ & + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c) - F(x_p, c, c, \ldots, c) \\ & + F(c, c, \ldots, c). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Uvodeći notacije

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = {} & F(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) \\ & + F(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) + \ldots + F(x_{p-1}, c, c, \ldots, c), \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$A = F(c, c, \ldots, c), \tag{2.6}$$

relacija (2.4) dobija upravo oblik (2.1). Element $A (\in M)$ zadovoljava uslov $nA = 0$, što se zaključuje stavljajući u jednačini (1.2)

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c.$$

Ovim je završen dokaz teoreme 1.

3. Drugo uopštenje

Ovaj paragraf posvetićemo daljoj generalizaciji jednačine (1.2). Naime, posmatraćemo funkcionalnu jednačinu

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad & F_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) + F_2(x_2, x_3, \ldots, x_{p+1}) + \ldots \\ & + F_{n-p+1}(x_{n-p+1}, x_{n-p+2}, \ldots, x_n) \\ & + F_{n-p+2}(x_{n-p+2}, x_{n-p+3}, \ldots, x_n, x_1) + \ldots \\ & + F_n(x_n, x_1, \ldots, x_{p-1}) = 0 \qquad (p < n),\end{aligned}$$

pod pretpostavkama 1° i 2° iz paragrafa 1 (pretpostavka 2° važi za svaku od funkcija F_i).

T e o r e m a 2. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (3.1), *za* $n \geqslant 2p-1$, *dato je formulama*

$$\begin{aligned}(3.2)\qquad & F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f_{i+1}(x_2, x_3, \ldots, x_p) \\ & \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ & F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f_1(x_2, x_3, \ldots, x_p),\end{aligned}$$

gde su f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *proizvoljne funkcije definisane na skupu* S, *sa vrednostima iz* M.

Dokaz. Radi uprošćenja, smatraćemo da je

$$F_i \equiv F_{i+n}, \quad x_i \equiv x_{i+n}.$$

Koristeći te konvencije, jednačini (3.1) možemo dati oblik

$$\begin{aligned}(3.3)\qquad & F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}) + F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p}) + \ldots \\ & + F_{i+n-p}(x_{i+n-p}, x_{i+n-p+1}, \ldots, x_{i+n-1}) \\ & + F_{i+n-p+1}(x_{i+n-p+1}, x_{i+n-p+2}, \ldots, x_{i+n-1}, x_i) + \ldots \\ & + F_{i+n-1}(x_{i+n-1}, x_i, \ldots, x_{i+p-2}) = 0.\end{aligned}$$

Stavljajući u (3.3)

$$x_{i+p} = x_{i+p+1} = \ldots = x_{i+n-1} = c,$$

gde je c proizvoljno fiksirani element iz S, dobijamo

$$
\begin{aligned}
(3.4)\qquad & F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}) + F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-1}, c) \\
& + F_{i+2}(x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+p-1}, c, c) + \ldots \\
& + F_{i+p-1}(x_{i+p-1}, c, c, \ldots, c) + F_{i+p}(c, c, \ldots, c) \\
& + F_{i+p+1}(c, c, \ldots, c) + \ldots + F_{i+n-p}(c, c, \ldots, c) \\
& + F_{i+n-p+1}(c, c, \ldots, c, x_i) + F_{i+n-p+2}(c, c, \ldots, c, x_i, x_{i+1}) \\
& + \ldots + F_{i+n-1}(c, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-2}) = 0.
\end{aligned}
$$

Ako se u (3.4) stavi $x_{i+p-1} = c$, dolazi se do jednačine

$$
\begin{aligned}
(3.5)\qquad & F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-2}, c) + F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-2}, c, c) + \ldots \\
& + F_{i+p-2}(x_{i+p-2}, c, c, \ldots, c) + F_{i+p-1}(c, c, \ldots, c) \\
& + F_{i+p}(c, c, \ldots, c) + \ldots + F_{i+n-p}(c, c, \ldots, c) \\
& + F_{i+n-p+1}(c, c, \ldots, c, x_i) + F_{i+n-p+2}(c, c, \ldots, c, x_i, x_{i+1}) \\
& + \ldots + F_{i+n-1}(c, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-2}) = 0.
\end{aligned}
$$

Oduzimanjem jednakosti (3.5) od (3.4) i sređivanjem, dolazimo do relacije

$$
\begin{aligned}
(3.6)\qquad F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-1}) = {} & F_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+p-2}, c) \\
& - F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-1}, c) \\
& + F_{i+1}(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+p-2}, c, c) \\
& - F_{i+2}(x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+p-1}, c, c) \\
& + \ldots \\
& + F_{i+p-2}(x_{i+p-2}, c, c, \ldots, c) \\
& - F_{i+p-1}(x_{i+p-1}, c, c, \ldots, c) \\
& + F_{i+p-1}(c, c, \ldots c),
\end{aligned}
$$

koja važi za svako $i = 1, 2, \ldots, n$.

Uvedimo notacije

$$
\begin{aligned}
(3.7)\qquad g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = {} & F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, c) \\
& + F_{i+1}(x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}, c, c) + \ldots \\
& + F_{i+p-2}(x_{p-1}, c, c, \ldots, c),
\end{aligned}
$$

$$
(3.8)\qquad A_i = F_{i+p-1}(c, c, \ldots, c).
$$

Koristeći konvenciju $F_i \equiv F_{i+n}$, zaključujemo da je takodje $g_i \equiv g_{i+n}$. Konstante $A_i (\in M)$ zadovoljavaju uslov

$$
(3.9)\qquad A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 0,
$$

jer se on dobija iz jednačine (3.1) ako se stavi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = c$. Na osnovu (3.7) i (3.8), umesto (3.6) možemo pisati

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - g_{i+1}(x_2, x_3, \ldots, x_p) + A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.10}$$

Na kraju, uvodeći funkcije

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1, \\ f_2 &= g_2 - A_1, \\ f_3 &= g_3 - A_1 - A_2, \\ &\vdots \\ f_n &= g_n - A_1 - A_2 - \ldots - A_{n-1}, \end{aligned}$$

i koristeći se relacijom (3.9), zaključujemo da funkcije (3.10) dobijaju oblik

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) - f_{i+1}(x_2, x_3, \ldots, x_p) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.11}$$

gde se podrazumeva da je $f_1 \equiv f_{n+1}$.

Kako je oblik (3.11) identičan sa oblikom (3.2), dokazali smo da iz (3.1) sleduje (3.2). Obrnuto tvrdjenje, tj. tvrdjenje da funkcije (3.2), pri proizvoljnim f_i, zaista zadovoljavaju jednačinu (3.1), može se proveriti zamenom.

Ovim je završen dokaz teoreme 2.

U slučaju $p < n < 2p-1$ nismo mogli da dođemo do teorema koje su analogne teoremama 1 i 2.

II DEO

FUNKCIONALNA JEDNAČINA

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})-F(x_2, x_3, \ldots, x_1)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n \cdot x_{n+1})$$

1. Egzistencija rešenja

Neka nezavisno promenljive x_i pripadaju skupu S u kome je definisana interna binarna operacija „$\cdot$". Za ovu operaciju pretpostavljamo da je asocijativna i da ima jedinični element e ($\in S$); drugim rečima pretpostavljamo da je S polugrupa sa jedinicom.

Pretpostavljamo da nepoznate funkcije F, f uzimaju vrednosti iz jedne aditivne Abelove grupe M. Za grupu M pretpostavljamo da jednačina $(n+1)X=A$ $(X, A \in M)$ ima jedinstveno rešenje $X=A/(n+1)$. Iz toga sleduje da takođe i jednačine $m^k X=A$ $(m \mid (n+1),\ k \in N)$ imaju u M jedinstveno rešenje po X.

Problem se sastoji u određivanju svih mogućih parova funkcija (F, f) za koje je

(1.1) $$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})-F(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, x_1) =f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}) \qquad (n \in N).$$

Dokažimo da za svako n ($\in N$) postoje netrivijalna rešenja funkcionalne jednačine (1.1).

Zaista, neka je

(1.2) $$\begin{aligned} &F(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \\ &\quad=\sum_{\nu=0}^{n} C^{\nu} f_0(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) \\ &\quad+f_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1} \cdot t_n \cdot t_{n+1}) \\ &\quad+\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \sum_{i=0}^{\nu-1} C^i f_{\nu}(t_1, t_2, \ldots, t_{n-\nu} \cdot t_{n-\nu+1}, t_{n-\nu+2}, \ldots, t_n \cdot t_{n+1}), \end{aligned}$$

(1.3) $$\begin{aligned} &f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ &\quad=f_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1} \cdot t_n)-f_1(t_2, t_3, \ldots, t_n \cdot t_1) \end{aligned}$$

$$+\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \{f_\nu (t_1, t_2, \ldots, t_{n-\nu} \cdot t_{n-\nu+1}, t_{n-\nu+2}, \ldots, t_n)$$

$$-f_\nu (t_{\nu+1}, t_{\nu+2}, \ldots, t_n, t_1, \ldots, t_{\nu-1} \cdot t_\nu)\},$$

gde su f_0 i f_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right])$ proizvoljne funkcije koje uzimaju vrednosti iz grupe M. Ako je $n = 1$, na desnoj strani formule (1.2) treba zadržati samo prvu sigmu, a ako je $n = 2$ tu sigmu i član sa f_1. Na desnoj strani formule (1.3), ako je $n = 2$ treba zadržati samo dva člana sa f_1, a ako je $n = 1$ treba smatrati da je desna strana jednaka nuli. Slovo C, u formulama (1.2) i (1.3), označava ciklični operator, perioda $n+1$, koji je definisan pomoću jednakosti

$$\text{(1.4)} \qquad \mathrm{C}\,\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) = \varphi(t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}, t_1),$$

gde je φ proizvoljna funkcija.

Dokazaćemo da funkcije F i f koje su definisane jednakostima (1.2) i (1.3) zadovoljavaju jednačinu (1.1).

Najpre imamo

$$(1-\mathrm{C}) \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{C}^\nu f_0 (t_1, t_2, \ldots, t_{n+1})$$

$$= (1-\mathrm{C}) \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{C}^\nu f_0$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{C}^\nu f_0 - \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{C}^{\nu+1} f_0$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \mathrm{C}^\nu f_0 - \sum_{\nu=1}^{n+1} \mathrm{C}^\nu f_0$$

$$= f_0 - \mathrm{C}^{n+1} f_0$$

$$= 0.$$

Zatim je

$$(1-\mathrm{C}) \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathrm{C}^i f_\nu (t_1, t_2, \ldots, t_{n-\nu} \cdot t_{n-\nu+1}, t_{n-\nu+2}, \ldots, t_n \cdot t_{n+1})$$

$$= (1-\mathrm{C}) \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathrm{C}^i f_\nu$$

$$= \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathrm{C}^i f_\nu - \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathrm{C}^{i+1} f_\nu$$

$$= \sum_{i=0}^{\nu-1} \mathrm{C}^i f_\nu - \sum_{i=1}^{\nu} \mathrm{C}^i f_\nu$$

$$=f_\nu - C^\nu f_\nu$$

$$=f_\nu(t_1, t_2, \ldots, t_{n-\nu} \cdot t_{n-\nu+1}, t_{n-\nu+2}, \ldots, t_n \cdot t_{n+1})$$

$$-f_\nu(t_{\nu+1}, t_{\nu+2}, \ldots, t_n \cdot t_{n+1}, t_1, \ldots, t_{\nu-1} \cdot t_\nu).$$

Stoga iz (1.2) sleduje

$$(1.5) \qquad (1-C)\, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$$

$$=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \cdot x_n \cdot x_{n+1}) - f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_1)$$

$$+\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \{f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\nu} \cdot x_{n-\nu+1}, \ldots, x_n \cdot x_{n+1})$$

$$-f_\nu(x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n \cdot x_{n+1}, x_1, \ldots, x_{\nu-1} \cdot x_\nu)\}.$$

Iz (1.3) dobija se

$$(1.6) \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1})$$

$$=f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \cdot x_n \cdot x_{n+1}) - f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n \cdot x_{n+1} \cdot x_1)$$

$$+\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \{f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_{n-\nu} \cdot x_{n-\nu+1}, x_{n-\nu+2}, \ldots, x_n \cdot x_{n+1})$$

$$-f_\nu(x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \ldots, x_n \cdot x_{n+1}, x_1, \ldots, x_{\nu-1} \cdot x_\nu)\}.$$

Upoređivanjem formula (1.5) i (1.6) zaključujemo da je

$$(1-C)\, F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n \cdot x_{n+1}).$$

Primedba: Gornje granice zbirova u formulama (1.2) i (1.3), u kojima se sumacioni indeks označava sa ν, nisu morale biti baš $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, već su mogle biti i veće, na primer n. Ali, kao što ćemo pokazati, svi ti dopunski članovi mogli bi da se pridruže onim članovima koji već figurišu u tim zbirovima. Posmatrajmo, na primer, u sumi koja se javlja u (1.3), one sabirke koji bi se dobili za $\nu = k$ i $\nu = n+1-k$, gde je

$$k = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right], \text{ naime}$$

$$(1.7) \qquad f_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n-k} \cdot t_{n-k+1}, \ldots, t_n)$$

$$-f_k(t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_n, t_1, \ldots, t_{k-1} \cdot t_k) \qquad (\nu = k)$$

$$(1.8) \qquad f_{n+1-k}(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1} \cdot t_k, \ldots, t_n)$$

$$-f_{n+1-k}(t_{n+2-k}, \ldots, t_n, t_1, \ldots, t_{n-k} \cdot t_{n-k+1}) \qquad (\nu = n+1-k).$$

Ako uvedemo novu funkciju

$$g_k(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, t_{n-1})$$

$$= -f_{n+1-k}(t_k, t_{k+1}, \ldots, t_{n-1}, t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})$$

izraz (1.8) dobija oblik

$$g_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n-k} \cdot t_{n-k+1}, \ldots, t_n)$$

$$-g_k(t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots, t_n, t_1, \ldots, t_{k-1} \cdot t_k)$$

koji se može sažeti sa izrazom (1.7) u samo jedan izraz istog oblika. Za to je dovoljno uvesti umesto funkcije f_k novu funkciju $f_k + g_k$.

Isto rezonovanje može se primeniti i na formulu (1.2).

Posebno navedimo tri najjednostavnija slučaja $n=1$, $n=2$ i $n=3$. Zamenjujući vrednosti za n u (1.1), (1.2) i (1.3), dobija se

1° Za $n=1$,

$$F(x_1, x_2) - F(x_2, x_1) = f(x_1 \cdot x_2), \tag{1.9}$$

$$F(t_1, t_2) = f_0(t_1, t_2) + f_0(t_2, t_1), \tag{1.10}$$

$$f(t_1) = 0\,; \tag{1.11}$$

2° Za $n=2$,

$$F(x_1, x_2, x_3) - F(x_2, x_3, x_1) = f(x_1, x_2 \cdot x_3), \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2, t_3) = {} & f_0(t_1, t_2, t_3) + f_0(t_2, t_3, t_1) + f_0(t_3, t_1, t_2) \\ & + f_1(t_1 \cdot t_2 \cdot t_3), \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$f(t_1, t_2) = f_1(t_1 \cdot t_2) - f_1(t_2 \cdot t_1)\,; \tag{1.14}$$

3° Za $n=3$,

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) - F(x_2, x_3, x_4, x_1) = f(x_1, x_2, x_3 \cdot x_4)\,. \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2, t_3, t_4) = {} & f_0(t_1, t_2, t_3, t_4) + f_0(t_2, t_3, t_4, t_1) \\ & + f_0(t_3, t_4, t_1, t_2) + f_0(t_4, t_1, t_2, t_3) \\ & + f_1(t_1, t_2 \cdot t_3 \cdot t_4) \\ & + f_2(t_1 \cdot t_2, t_3 \cdot t_4) + f_2(t_2 \cdot t_3, t_4 \cdot t_1), \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2, t_3) = {} & f_1(t_1, t_2 \cdot t_3) - f_1(t_2, t_3 \cdot t_1) \\ & + f_2(t_1 \cdot t_2, t_3) - f_2(t_3, t_1 \cdot t_2). \end{aligned} \tag{1.17}$$

2. Svođenje na jednačinu sa jednom nepoznatom funkcijom

Dokažimo sledeći rezultat:

L e m a 1. *Da bi funkcionalna jednačina*

$$(1-C)\,F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \tag{2.1}$$

(F nepoznata, g poznata funkcija) imala bar jedno rešenje, potrebno je i dovoljno da funkcija g ispunjava uslov

$$\sum_{\nu=0}^{n} C^{\nu} g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0. \tag{2.2}$$

Dokaz. a) Uslov je potreban.

Primenom operatoıa C^{ν}, iz (2.1) dobijamo

$$(C^{\nu} - C^{\nu+1}) F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C^{\nu} g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

za svako $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$. Sabiranjem ovih jednakosti dobija se uslov (2.2).

b) Uslov je dovoljan. Ovo sleduje iz rezultata koji su dobili Aczél, Ghermănescu i Hosszú (videti [2]).

Napomenimo samo, da se jedno rešenje F_0 jednačine (2.1), kad je uslov (2.2) ispunjen, može napisati u obliku

$$F_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{i=0}^{\nu-1} C^i g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \tag{2.3}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{n+1} C^i g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

O ovome videti [7] i [10].

L e m a 2. *Ako funkcija g zadovoljava uslov* (2.2) *i ako je F_0 jedno rešenje jednačine* (2.1), *opšte rešenje te jednačine je*

$$F(x_1, x_2, \ldots x_{n+1}) = F_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) + \mathrm{Cyc}^{n+1} f_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

gde je f_0 proizvoljna funkcija i Cyc^{n+1} *operator definisan sa*

$$\mathrm{Cyc}^{n+1} \equiv \sum_{\nu=0}^{n} C^{\nu}. \tag{2.4}$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavki je

$$(1-C) F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

$$(1-C) F_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}).$$

Oduzimanjem ovih jednakosti dobija se

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - F_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = C[F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - F_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})].$$

Odavde sleduje (videti [10])

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - F_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \mathrm{Cyc}^{n+1} f_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

gde je f_0 proizvoljna funkcija.

Ovim je dokaz završen.

T e o r e m a 1. *Ako funkcije F i f zadovoljavaju jednačinu* (1.1), *tada je*

$$\mathrm{Cyc}^{n+1} f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}) = 0, \tag{2.5}$$

i obrnuto, ako funkcija f ispunjava uslov (2.5), *postoji funkcija F takva da važi* (1.1).

Ova teorema sleduje direktno iz leme 1.

Primenom formule (2.3) i leme 2 može se odrediti opšte rešenje jednačine (1.1) kada je poznato opšte rešenje jednačine (2.5). Time je rešavanje jednačine (1.1) svedeno na rešavanje jednačine (2.5), u kojoj se javlja samo jedna nepoznata funkcija f.

Primedba. Hronološki posmatrano, jednačina (2.5) je prethodila jednačini (1.1). Na jednačinu (2.5) ukazano je u članku [8], gde je prvi put konstatovano da funkcija (1.3) zadovoljava tu jednačinu. Tek kasnije je primećeno da je pogodnije posmatrati jednačinu (1.1) ma da ona sadrži dve nepoznate funkcije, jer je ona vrlo jednostavnog oblika.

Jednačina (2.5) dobijena je iz jednačine (1.1) eliminacijom nepoznate funkcije F. S druge strane, može se iz jednačine (1.1) eliminisati nepoznata funkcija f.

Zaista, ako u (1.1) stavimo $x_{n+1}=e$ (=jedinični element), dobija se

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, e) - F(x_2, x_3, \ldots, x_n, e, x_1). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Zamenom funkcije f iz (2.6), jednačina (1.1) postaje

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - F(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, x_1) \\ = F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1}, e) - F(x_2, \ldots, x_n \cdot x_{n+1}, e, x_1). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Problem rešavanja jednačine (1.1) sveden je sada na rešavanje jednačine (2.7). Ako pretpostavimo da je jednačina (2.7) rešena, funkcija f dobija se iz (2.6).

Jednačina (2.7) je na prvi pogled prostija jer sadrži samo četiri člana pri proizvoljnom n, dok jednačina (2.5) ima $n+1$ članova. Međutim, svi rezultati koji će biti u daljem izloženi dobijeni su iz jednačine (2.5) a ne iz jednačine (2.7).

3. Glavni rezultati

Slučaj $n=1$. Jednačina (1.1) ima oblik (1.9) i njeno opšte rešenje dato je formulama (1.10) i (1.11), što je sasvim jednostavno za proveravanje.

Slučaj $n=3$. U članku [3] dokazana je, pod pretpostavkama navedenim na početku ovog odeljka, sledeća teorema

Teorema 2. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine*

$$\begin{aligned} & f(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_p, x_{p+1} \cdot \ldots \cdot x_{2p}, x_{2p+1} \cdot \ldots \cdot x_{4p}) \\ & + f(x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{p+1}, x_{p+2} \cdot \ldots \cdot x_{2p+1}, x_{2p+2} \cdot \ldots \cdot x_{4p} \cdot x_1) \\ & + \ldots \\ & + f(x_{4p} \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_{p-1}, x_p \cdot \ldots \cdot x_{2p-1}, x_{2p} \cdot \ldots \cdot x_{4p-1}) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

je funkcija

$$f(t_1, t_2, t_3) = f_1(t_1, t_2 \cdot t_3) - f_1(t_2, t_3 \cdot t_1) + f_2(t_1 \cdot t_2, t_3) - f_2(t_3, t_1 \cdot t_2), \tag{1.17}$$

gde su f_1 *i* f_2 *dve proizvoljne funkcije.*

Za $n=3$ jednačina (2.5) ima oblik

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3 \cdot x_4) + f(x_2, x_3, x_4 \cdot x_1) \\ + f(x_3, x_4, x_1 \cdot x_2) + f(x_4, x_1, x_2 \cdot x_3) = 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

tj. identična je sa jednačinom (3.1) za $p=1$. Prema teoremi 2, opšte rešenje jednačine (3.2) je dato sa (1.17). Na osnovu računa izvedenog u § 1 zaključujemo da je funkcija

$$F_0(t_1, t_2, t_3, t_4) = f_1(t_1, t_2 \cdot t_3 \cdot t_4) + f_2(t_1 \cdot t_2, t_3 \cdot t_4) + f_2(t_2 \cdot t_3, t_4 \cdot t_1)$$

jedno partikularno rešenje jednačine (1.15), gde je f definisano sa (1.17). Primenjujući lemu 2, dobija se opšte rešenje jednačine (1.15) po F u obliku

$$F(t_1, t_2, t_3, t_4) = F_0(t_1, t_2, t_3, t_4) + \mathrm{Cyc}^4 f_0(t_1, t_2, t_3, t_4),$$

gde je f_0 proizvoljna funkcija. Poslednja formula se poklapa sa formulom (1.16).

Dakle, dokazali smo da je (1.16) i (1.17) opšte rešenje funkcionalne jednačine (1.15).

Slučajevi $n=5$ *i* $n=7$. U sledeća dva paragrafa dokazaćemo da je opšte rešenje jednačine (1.1) u ovim slučajevima dato formulama (1.2) i (1.3). Dokazi su prilično glomazni.

Slučaj $n=2$. Rešenje jednačine (1.1) dato formulama (1.2) i (1.3) nije u ovom slučaju opšte.

Da bismo se u to uverili, dovoljan je sledeći primer. Neka je $S=M=R$ i neka je „$\cdot$" operacija sabiranja realnih brojeva. Jednačina (2.5), za $n=2$, ima tada oblik

$$f(x_1, x_2+x_3) + f(x_2, x_3+x_1) + f(x_3, x_1+x_2) = 0.$$

Ova jednačina biće detaljno ispitana u sledećem odeljku. Njeno opšte rešenje je dato sa (3.1.8). Međutim, formula (1.3) tj. (1.14) daje samo trivijalno rešenje $f(x, y)=0$. Ovim je naše tvrđenje dokazano.

Ovi rezultati nam sugeriraju da pretpostavimo da je rešenje jednačine (1.1), dato formulama (1.2) i (1.3), opšte za n neparno i da nije opšte za n parno. Ne znamo šta uslovljava ovu razliku između slučajeva kada je n parno i slučajeva kada je n neparno. Međutim, mogu se navesti neki formalni razlozi za to. Prvo, broj proizvoljnih funkcija koje figurišu na desnoj strani relacije (1.3) je za neparno n veći od $n/2$, a za parno n on je baš jednak $n/2$. Znači kad je n parno, da ne postoji „dovoljan" broj proizvoljnih funkcija u rešenju (1.3). Drugo, postoji jedan razlog zbog koga se ne može dokaz iz slučajeva $n=1, 3, 5, 7$ preneti na slučajeve kada je n parno. Taj razlog će biti naveden u sledećem paragrafu.

Čak i pri dopunskoj pretpostavci da je operacija „$\cdot$" komutativna, navedeno rešenje jednačine (1.1) u slučaju parnog n nije opšte. Ovo sleduje iz već navedenog primera.

Opšti dokaz u slučaju neparnog n nismo našli, ali izgleda da se isti metod dokaza (koji je primenjen u slučajevima $n=5$ i $n=7$) može primeniti i za $n=9, 11, \ldots$

Generalizacija. Umesto funkcionalne jednačine (1.1) može se posmatrati jednačina

$$\text{(3.3)} \qquad F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - F(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, x_1) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{n+1})$$

gde je $1 \leqslant k \leqslant n$.

Za $k=n$ jednačina (3.3) je identična jednačini (1.1). Za $1 \leqslant k < n$, jednačina (3.3) se svodi na jednačinu (1.1). Zaista, ako stavimo

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = G(x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots, x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}),$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

jednačina (3.3) dobija oblik

$$\begin{aligned} G(x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots, x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}) \\ - G(x_{k+3}, x_{k+4}, \ldots, x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}, x_{k+2}) \\ = g(x_{k+2}, x_{k+3}, \ldots, x_{n+1}, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k \cdot x_{k+1}). \end{aligned}$$

Na kraju, ako stavimo

$$x_{k+2} = t_1, x_{k+3} = t_2, \ldots, x_{n+1} = t_{n-k}, x_1 = t_{n-k+1}, \ldots, x_{k+1} = t_{n+1},$$

prethodna jednačina postaje

$$\begin{aligned} G(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) - G(t_2, t_3, \ldots, t_{n+1}, t_1) \\ = g(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n \cdot t_{n+1}), \end{aligned}$$

tj. dobija se jednačina (1.1) samo što umesto slova F, f, x stoje respektivno G, g, t.

Primedba. Ako je $S=M=R$, mogu se na osnovu navedenih rezultata formirati mnogobrojni specijalni slučajevi jednačina (1.1) ili (2.5) za $n=3, 5, 7$. Dovoljno široka klasa asocijativnih operacija sa jediničnim elementom data je sa

$$x \cdot y = \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)),$$

gde je φ proizvoljna neprekidna strogo rastuća funkcija definisana na čitavoj realnoj osi a φ^{-1} njoj inverzna funkcija. Jedinični element ove operacije je $\varphi(0)$.

O ovome detaljnije videti knjigu [1].

4. Rešavanje funkcionalne jednačine u slučaju $n=5$

Funkcionalna jednačina (2.5) u ovom slučaju glasi

$$\text{Cyc}^6 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \cdot x_6) = 0. \tag{4.1}$$

Radi uprošćenja formula, umesto $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \cdot x_6)$ pisaćemo samo $12345 \cdot 6$ i slično u drugim slučajevima. Takođe ćemo upotrebiti sledeće skraćenice

$$f(x_1, e, x_3, x_4, x_5 \cdot x_6) = 10345 \cdot 6,$$

$$nf(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = n(12345).$$

Drugim rečima, izostavlja se slovo f, zarezi i zagrade (,); umesto promenljive x_i piše se samo njen indeks i, a umesto jediničnog elementa stavlja se 0.

Koristeći ove skraćenice jednačina (4.1) dobija oblik

(4.1 bis) $12345 \cdot 6 + 23456 \cdot 1 + 34561 \cdot 2 + 45612 \cdot 3 + 56123 \cdot 4 + 61234 \cdot 5 = 0.$

T e o r e m a 3. *Opšte rešenje jednačine* (4.1) *je dato sa* (1.3) *tj.*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4 \cdot x_5) - f_1(x_2, x_3, x_4, x_5 \cdot x_1) + f_2(x_1, x_2, x_3 \cdot x_4, x_5) - f_2(x_3, x_4, x_5, x_1 \cdot x_2) + f_3(x_1, x_2 \cdot x_3, x_4, x_5) - f_3(x_4, x_5, x_1, x_2 \cdot x_3), \tag{4.2}$$

gde su f_1, f_2, f_3 *proizvoljne funkcije.*

P o s l e d i c a. *Iz teoreme* 3 *i rezultata iz* § 1 *sleduje da je* (1.2) *i* (1.3) *opšte rešenje jednačine* (1.1) *u slučaju* $n = 5$.

Pre nego što pređemo na dokaz teoreme 3, uvedimo sledeću definiciju.

D e f i n i c i j a. *Za funkcije* g *i* h *reći ćemo da su u relaciji* $\sim$, *tj. da je* $g \sim h$ *ako je njihova razlika oblika*

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) - h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4 \cdot x_5) - f_1(x_2, x_3, x_4, x_5 \cdot x_1) + f_2(x_1, x_2, x_3 \cdot x_4, x_5) - f_2(x_3, x_4, x_5, x_1 \cdot x_2) + f_3(x_1, x_2 \cdot x_3, x_4, x_5) - f_3(x_4, x_5, x_1, x_2 \cdot x_3),$$

gde su f_1, f_2, f_3 *pogodno izabrane funkcije.*

Uvedena relacija je relacija ekvivalencije. Može se dokazati da iz $g_1 \sim h_1$ i $g_2 \sim h_2$ sleduje $g_1 + g_2 \sim h_1 + h_2$. Takođe iz $2^m g \sim 0$ $(m \in N)$ sleduje $g \sim 0$.

Teorema 3 može se ukratko napisati

$$(4.1) \Leftrightarrow (12345 \sim 0). \tag{4.3}$$

Dokaz teoreme 3. Implikacija

$$(12345 \sim 0) \Rightarrow (4.1)$$

dokazana je u § 1. Ostaje još da se dokaže

$$(4.1) \Rightarrow (12345 \sim 0). \tag{4.4}$$

Stavljajući u jednačini (4.1 bis) $6 = 0$ (tj. $x_6 = e$), dobijamo

$$12345 + 23451 + 34501 \cdot 2 + 45012 \cdot 3 + 50123 \cdot 4 + 01234 \cdot 5 = 0. \tag{4.5}$$

Cikličkim permutovanjem nezavisno promenljivih, iz (4.5) dobijamo

$$-23451 - 34512 - 45102 \cdot 3 - 51023 \cdot 4 - 10234 \cdot 5 - 02345 \cdot 1 = 0,$$
$$34512 + 45123 + 51203 \cdot 4 + 12034 \cdot 5 + 20345 \cdot 1 + 03451 \cdot 2 = 0,$$
$$-45123 - 51234 - 12304 \cdot 5 - 23045 \cdot 1 - 30451 \cdot 2 - 04512 \cdot 3 = 0,$$
$$51234 + 12345 + 23405 \cdot 1 + 34051 \cdot 2 + 40512 \cdot 3 + 05123 \cdot 4 = 0.$$

Sabirajući poslednje četiri jednakosti i (4.5), dobijamo

$$\begin{aligned}2(12345) = &-01234\cdot 5-50123\cdot 4-45012\cdot 3-34501\cdot 2\\ &+02345\cdot 1+10234\cdot 5+51023\cdot 4+45102\cdot 3\\ &-03451\cdot 2-20345\cdot 1-12034\cdot 5-51203\cdot 4\\ &+04512\cdot 3+30451\cdot 2+23045\cdot 1+12304\cdot 5\\ &-05123\cdot 4-40512\cdot 3-34051\cdot 2-23405\cdot 1.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Kako je

$$-01234\cdot 5+02345\cdot 1\sim 0, \quad 10234\cdot 5-20345\cdot 1\sim 0,$$
$$-12034\cdot 5+23045\cdot 1\sim 0, \quad 12304\cdot 5-23405\cdot 1\sim 0,$$

iz (4.6) izlazi

$$\begin{aligned}2(12345)\sim &-05123\cdot 4-50123\cdot 4+51023\cdot 4-51203\cdot 4\\ &-03451\cdot 2+30451\cdot 2-34051\cdot 2-34501\cdot 2\\ &+04512\cdot 3-40512\cdot 3-45012\cdot 3+45102\cdot 3.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Primenom formule (4.6) (ili preciznije, zamenom $1\to 3$, $2\to 4$, $3\to 5$, $4\to 0$, $5\to 1\cdot 2$), dobijamo

$$\begin{aligned}-2(34501\cdot 2) = &\,03451\cdot 2+1\cdot 20345+01\cdot 2034\cdot 5+501\cdot 203\cdot 4\\ &-04501\cdot 2\cdot 3-30451\cdot 2-1\cdot 23045-01\cdot 2304\cdot 5\\ &+0501\cdot 23\cdot 4+40501\cdot 2\cdot 3+34051\cdot 2+1\cdot 23405\\ &-001\cdot 234\cdot 5-5001\cdot 23\cdot 4-45001\cdot 2\cdot 3-34501\cdot 2\\ &+01\cdot 2345+001\cdot 234\cdot 5+5001\cdot 23\cdot 4+45001\cdot 2\cdot 3\end{aligned}$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned}0 = &\,03451\cdot 2+1\cdot 20345+01\cdot 2034\cdot 5+501\cdot 203\cdot 4\\ &-04501\cdot 2\cdot 3-30451\cdot 2-1\cdot 23045-01\cdot 2304\cdot 5\\ &+0501\cdot 23\cdot 4+40501\cdot 2\cdot 3+34051\cdot 2+1\cdot 23405\\ &+01\cdot 2345+34501\cdot 2.\end{aligned}$$

„Sabirajući“ poslednju jednakost sa (4.7), nalazimo

$$\begin{aligned}2(12345)\sim &-05123\cdot 4-50123\cdot 4+51023\cdot 4-51203\cdot 4\\ &+04512\cdot 3-40512\cdot 3-45012\cdot 3+45102\cdot 3\\ &+01\cdot 2345+1\cdot 20345-1\cdot 23045+1\cdot 23405\\ &+01\cdot 2034\cdot 5+501\cdot 203\cdot 4+0501\cdot 23\cdot 4+40501\cdot 2\cdot 3\\ &-04501\cdot 2\cdot 3-01\cdot 2304\cdot 5.\end{aligned}$$

Kako je

$$-05123\cdot 4+01\cdot 2345\sim 0, \quad -50123\cdot 4+1\cdot 23405\sim 0,$$
$$51023\cdot 4-1\cdot 23045\sim 0, \quad -51203\cdot 4+1\cdot 23405\sim 0,$$

iz prethodne formule sleduje

$$\begin{aligned}2(12345)\sim &\,04512\cdot 3-40512\cdot 3-45012\cdot 3+45102\cdot 3\\ &+01\cdot 2034\cdot 5+501\cdot 203\cdot 4+0501\cdot 23\cdot 4+40501\cdot 2\cdot 3\\ &-04501\cdot 2\cdot 3-01\cdot 2304\cdot 5.\end{aligned} \tag{4.8}$$

U cilju daljeg uprošćenja desne strane ove relacije primenićemo formulu (4.6) na prva četiri člana. Na taj način dobijamo

$$\begin{aligned}2\,(12345) = &-00451\cdot 2\cdot 3-2\cdot 30045\cdot 1-12\cdot 3004\cdot 5-512\cdot 304\\ &+04512\cdot 3+00451\cdot 2\cdot 3+2\cdot 30045\cdot 1+12\cdot 3004\cdot 5\\ &-0512\cdot 34-40512\cdot 3-04051\cdot 2\cdot 3-2\cdot 30405\cdot 1\\ &+012\cdot 304\cdot 5+5012\cdot 34+45012\cdot 3+04501\cdot 2\cdot 3\\ &-02\cdot 3045\cdot 1-102\cdot 304\cdot 5-5102\cdot 34-45102\cdot 3\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2\,(40512\cdot 3) = &\;04051\cdot 2\cdot 3+2\cdot 30405\cdot 1+12\cdot 3045+512\cdot 304\\ &-00512\cdot 3\cdot 4-40051\cdot 2\cdot 3-2\cdot 34005\cdot 1-12\cdot 3405\\ &+0512\cdot 34+00512\cdot 3\cdot 4+40051\cdot 2\cdot 3+2\cdot 34005\cdot 1\\ &-012\cdot 345-5012\cdot 34-05012\cdot 3\cdot 4-40501\cdot 2\cdot 3\\ &+02\cdot 3405\cdot 1+102\cdot 345+5102\cdot 34+05102\cdot 3\cdot 4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2\,(45012\cdot 3) = &\;04501\cdot 2\cdot 3+2\cdot 30451+12\cdot 3045+012\cdot 304\cdot 5\\ &-05012\cdot 3\cdot 4-40501\cdot 2\cdot 3-2\cdot 34051-12\cdot 3405\\ &+0012\cdot 34\cdot 5+50012\cdot 3\cdot 4+45001\cdot 2\cdot 3+2\cdot 34501\\ &-012\cdot 345-0012\cdot 34\cdot 5-50012\cdot 3\cdot 4-45001\cdot 2\cdot 3\\ &+02\cdot 3451+102\cdot 345+0102\cdot 34\cdot 5+50102\cdot 3\cdot 4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\,(45102\cdot 3) = &-04512\cdot 3-2\cdot 30451-02\cdot 3045\cdot 1-102\cdot 304\cdot 5\\ &+05102\cdot 3\cdot 4+40512\cdot 3+2\cdot 34051+02\cdot 3405\cdot 1\\ &-0102\cdot 34\cdot 5-50102\cdot 3\cdot 4-45012\cdot 3-2\cdot 34501\\ &+002\cdot 345\cdot 1+1002\cdot 34\cdot 5+51002\cdot 3\cdot 4+45102\cdot 3\\ &-02\cdot 3451-002\cdot 345\cdot 1-1002\cdot 34\cdot 5-51002\cdot 3\cdot 4\,.\end{aligned}$$

Ako saberemo ove četiri jednakosti i svedemo izraz na desnoj strani, dobijamo

$$\begin{aligned}&2\,(04512\cdot 3-40512\cdot 3-45012\cdot 3+45102\cdot 3)\\ &\quad=2\,(-012\cdot 345+102\cdot 345+12\cdot 3045-12\cdot 3405\\ &\quad+012\cdot 304\cdot 5+04501\cdot 2\cdot 3-02\cdot 3045\cdot 1-102\cdot 304\cdot 5\\ &\quad-05012\cdot 3\cdot 4-40501\cdot 2\cdot 3+02\cdot 3405\cdot 1+05102\cdot 3\cdot 4).\end{aligned}$$

Odavde izlazi

$$\begin{aligned}&2\,(04512\cdot 3-40512\cdot 3-45012\cdot 3+45102\cdot 3)\\ &\quad=04512\cdot 3-40512\cdot 3-45012\cdot 3+45102\cdot 3\\ &\quad-012\cdot 345+102\cdot 345+12\cdot 3045-12\cdot 3405\\ &\quad+012\cdot 304\cdot 5+04501\cdot 2\cdot 3-02\cdot 3045\cdot 1-102\cdot 304\cdot 5\\ &\quad-05012\cdot 3\cdot 4-40501\cdot 2\cdot 3+02\cdot 3405\cdot 1+05102\cdot 3\cdot 4.\end{aligned}$$

Kako je

$$04512\cdot 3-012\cdot 345\sim 0, \qquad -40512\cdot 3+102\cdot 345\sim 0,$$

$$-45012\cdot 3+12\cdot 3045\sim 0, \qquad 45102\cdot 3-12\cdot 3405\sim 0.$$

iz prethodne jednakosti sleduje

$$
\begin{aligned}
&2\,(04512\cdot 3-40512\cdot 3-45012\cdot 3+45102\cdot 3)\\
&\qquad \sim 012\cdot 304\cdot 5+04501\cdot 2\cdot 3-02\cdot 3045\cdot 1-102\cdot 304\cdot 5\\
&\qquad -05012\cdot 3\cdot 4-40501\cdot 2\cdot 3+02\cdot 3405\cdot 1+05102\cdot 3\cdot 4.
\end{aligned}
$$

Množeći relaciju (4.8) sa 2 i sabirajući je sa poslednjom relacijom, nalazimo

$$
\begin{aligned}
4\,(12345) &\sim 012\cdot 304\cdot 5-04501\cdot 2\cdot 3-02\cdot 3045\cdot 1-102\cdot 304\cdot 5\\
&-05012\cdot 3\cdot 4+40501\cdot 2\cdot 3+02\cdot 3405\cdot 1+05102\cdot 3\cdot 4\\
&+2\,(01\cdot 2304\cdot 5+501\cdot 203\cdot 4+0501\cdot 23\cdot 4-01\cdot 2304\cdot 5).
\end{aligned}
$$

Grupišući članove na desnoj strani, imamo

$$
\begin{aligned}
4\,(12345) &\sim (012\cdot 304\cdot 5-04501\cdot 2\cdot 3)+(40501\cdot 2\cdot 3-102\cdot 304\cdot 5)\\
&+(01\cdot 2034\cdot 5-05012\cdot 3\cdot 4)+(01\cdot 2034\cdot 5-02\cdot 3045\cdot 1)\\
&+(02\cdot 3405\cdot 1-01\cdot 2304\cdot 5)+(05102\cdot 3\cdot 4-01\cdot 2304\cdot 5)\\
&+2\,(501\cdot 203\cdot 4+0501\cdot 23\cdot 4).
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&012\cdot 304\cdot 5-04501\cdot 2\cdot 3\sim 0, && 40501\cdot 2\cdot 3-102\cdot 304\cdot 5\sim 0,\\
&01\cdot 2034\cdot 5-05012\cdot 3\cdot 4\sim 0, && 01\cdot 2034\cdot 5-02\cdot 3045\cdot 1\sim 0,\\
&02\cdot 3405\cdot 1-01\cdot 2304\cdot 5\sim 0, && 05102\cdot 3\cdot 4-01\cdot 2304\cdot 5\sim 0,
\end{aligned}
$$

iz prethodne relacije sleduje

$$
4\,(12345)\sim 2\,(501\cdot 203\cdot 4+0501\cdot 23\cdot 4). \tag{4.9}
$$

Da bismo redukovali dalje desnu stranu ove relacije, poći ćemo od jednakosti (4.5). Stavljajući u njoj $2=4=0$, dobijamo

$$
10305+01035+50103+05013+30501+03051=0.
$$

Odavde sleduje

$$
\begin{aligned}
50103+05013 &= -10305-01035-30501-03051,\\
3\,(50103+05013) &= (50103-10305)+(50103-30501)\\
&\quad +(05013-01035)+(05013-03051).
\end{aligned}
$$

Zamenjujući u poslednjoj formuli 1 sa $1\cdot 2$ i 3 sa $3\cdot 4$, dolazimo do

$$
\begin{aligned}
&3\,(501\cdot 203\cdot 4+0501\cdot 23\cdot 4)\\
&\qquad =(501\cdot 203\cdot 4-1\cdot 203\cdot 405)+(501\cdot 203\cdot 4-03\cdot 4051\cdot 2)\\
&\qquad +(0501\cdot 23\cdot 4-01\cdot 203\cdot 45)+(0501\cdot 23\cdot 4-03\cdot 4051\cdot 2).
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&501\cdot 203\cdot 4-1\cdot 203\cdot 405\sim 0, && 501\cdot 203\cdot 4-03\cdot 4051\cdot 2\sim 0,\\
&0501\cdot 23\cdot 4-01\cdot 203\cdot 45\sim 0, && 0501\cdot 23\cdot 4-03\cdot 4051\cdot 2\sim 0,
\end{aligned}
$$

iz poslednje relacije sleduje

$$
3\,(501\cdot 203\cdot 4+0501\cdot 23\cdot 4)\sim 0,
$$

tj.

$$
501\cdot 203\cdot 4+0501\cdot 23\cdot 4\sim 0.
$$

Na osnovu toga, iz (4.9) dobijamo $4(12345) \sim 0$, odakle sleduje $12345 \sim 0$. Ovim je završen dokaz implikacije (4.4) a samim tim i teoreme 3.

Primedbe. 1° Pošto je u dokazu korišćena samo jednačina (4.5), zaključujemo da je ta jednačina ekvivalentna jednačini (4.1).

2° Prvi korak u rešavanju jednačine (4.5) sastojao se u formiranju jednakosti (4.6) U slučaju kada je n parno, ovaj prvi korak nije moguće učiniti.

5. Rešavanje funkcionalne jednačine u slučaju $n=7$

Funkcionalna jednačina (2.5) u ovom slučaju ima oblik

(5.1) $$\mathrm{Cyc}^8 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \cdot x_8) = 0.$$

Kao i u prethodnom paragrafu koristićemo uprošćene oznake:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 1234567,$$

$$f(x_1, e, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \cdot x_8) = 1034567 \cdot 8,$$

$$nf(x_1, x_2, x_3 x_4, x_5, x_6, x_7) = n(1234567),$$

i slično u drugim slučajevima.

Jednačina (5.1) može se napisati u obliku

(5.1 bis) $$1234567 \cdot 8 + 2345678 \cdot 1 + 3456781 \cdot 2 + 4567812 \cdot 3$$
$$+ 5678123 \cdot 4 + 6781234 \cdot 5 + 7812345 \cdot 6 + 8123456 \cdot 7 = 0.$$

T e o r e m a 4. *Opšte rešenje jednačine* (5.1) *je dato sa* (1.3), *tj.*

(5.2) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$
$$= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \cdot x_7) - f_1(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \cdot x_1)$$
$$+ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \cdot x_6, x_7) - f_2(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_1 \cdot x_2)$$
$$+ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4 \cdot x_5, x_6, x_7) - f_3(x_4, x_5, x_6, x_7, x_1, x_2 \cdot x_3)$$
$$+ f_4(x_1, x_2, x_3 \cdot x_4, x_5, x_6, x_7) - f_4(x_5, x_6, x_7, x_1, x_2, x_3 \cdot x_4),$$

gde su f_1, f_2, f_3, f_4 *proizvoljne funkcije.*

P o s l e d i c a. *Iz teoreme* 4 *i rezultata iz* § 1, *sleduje da je* (1.2) *i* (1.3) *opšte rešenje jednačine* (1.1) *u slučaju* $n=7$.

Pre nego što pređemo na dokaz teoreme 4, postavićemo sledeću definiciju.

D e f i n i c i j a. *Za funkcije* g *i* h *reći ćemo da su u relaciji* $\sim$, *tj. da je* $g \sim h$, *ako je njihova razlika oblika*

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) - h(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$$
$$= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \cdot x_7) - f_1(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \cdot x_1)$$

$$+f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \cdot x_6, x_7) - f_2(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_1 \cdot x_2)$$
$$+f_3(x_1, x_2, x_3, x_4 \cdot x_5, x_6, x_7) - f_3(x_4, x_5, x_6, x_7, x_1, x_2 \cdot x_3)$$
$$+f_4(x_1, x_2, x_3 \cdot x_4, x_5, x_6, x_7) - f_4(x_5, x_6, x_7, x_1, x_2, x_3 \cdot x_4),$$

gde su f_1, f_2, f_3, f_4 *pogodno izabrane funkcije.*

Uvedena relacija je relacija ekvivalencije. Može se dokazati da iz $g_1 \sim h_1$ i $g_2 \sim h_2$ sleduje $g_1 + g_2 \sim h_1 + h_2$. Takođe iz $2^m g \sim 0 \ (m \in N)$ sleduje $g \sim 0$.

Teorema 4 može se ukratko napisati

(5.3) $$(5.1) \Leftrightarrow (1234567 \sim 0).$$

Dokaz teoreme 4. Implikacija

$$(1234567 \sim 0) \Rightarrow (5.1)$$

dokazana je u § 1. Ostaje da se dokaže

5.4) $$(5.1) \Rightarrow (1234567 \sim 0).$$

Stavljajući u jednačini (5.1 bis) $8 = 0$ (tj. $x_8 = e$), dobijamo

(5.5) $$\begin{aligned} &1234567 + 2345671 + 3456701 \cdot 2 + 4567012 \cdot 3 \\ &+ 5670123 \cdot 4 + 6701234 \cdot 5 + 7012345 \cdot 6 + 0123456 \cdot 7 = 0. \end{aligned}$$

Cikličkim permutovanjem nezavisno promenljivih, iz (5.5) dobijamo

$$\begin{aligned} &-2345671 - 3456712 - 4567102 \cdot 3 - 5671023 \cdot 4 \\ &-6710234 \cdot 5 - 7102345 \cdot 6 - 1023456 \cdot 7 - 0234567 \cdot 1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3456712 + 4567123 + 5671203 \cdot 4 + 6712034 . 5 \\ &+ 7120345 \cdot 6 + 1203456 \cdot 7 + 2034567 \cdot 1 + 0345671 \cdot 2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-4567123 - 5671234 - 6712304 \cdot 5 - 7123045 \cdot 6 \\ &-1230456 \cdot 7 - 2304567 \cdot 1 - 3045671 \cdot 2 - 0456712 \cdot 3 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &5671234 + 6712345 + 7123405 \cdot 6 + 1234056 \cdot 7 \\ &+ 2340567 \cdot 1 + 3405671 \cdot 2 + 4056712 \cdot 3 + 0567123 \cdot 4 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-6712345 - 7123456 - 1234506 \cdot 7 - 2345067 \cdot 1 \\ &-3450671 \cdot 2 - 4506712 \cdot 3 - 5067123 \cdot 4 - 0671234 \cdot 5 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &7123456 + 1234567 + 2345607 \cdot 1 + 3456071 \cdot 2 \\ &+ 4560712 \cdot 3 + 5607123 \cdot 4 + 6071234 \cdot 5 + 0712345 \cdot 6 = 0. \end{aligned}$$

Sabiranjem poslednjih šest jednakosti i (5.5), dobija se

(5.6) $$\begin{aligned} 2(1234567) = &-0123456 \cdot 7 - 7012345 \cdot 6 - 6701234 \cdot 5 \\ &-5670123 \cdot 4 - 4567012 \cdot 3 - 3456701 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$+0234567\cdot 1+1023456\cdot 7+7102345\cdot 6$$
$$+6710234\cdot 5+5671023\cdot 4+4567102\cdot 3$$

$$-0345671\cdot 2-2034567\cdot 1-1203456\cdot 7$$
$$-7120345\cdot 6-6712034\cdot 5-5671203\cdot 4$$

$$+0456712\cdot 3+3045671\cdot 2+2304567\cdot 1$$
$$+1230456\cdot 7+7123045\cdot 6+6712304\cdot 5$$

$$-0567123\cdot 4-4056712\cdot 3-3405671\cdot 2$$
$$-2340567\cdot 1-1234056\cdot 7-7123405\cdot 6$$

$$+0671234\cdot 5+5067123\cdot 4+4506712\cdot 3$$
$$+3450671\cdot 2+2345067\cdot 1+1234506\cdot 7$$

$$-0712345\cdot 6-6071234\cdot 5-5607123\cdot 4$$
$$-4560712\cdot 3-3456071\cdot 2-2345607\cdot 1.$$

Kako je

$$-0123456\cdot 7+0234567\cdot 1\sim 0, \qquad 1023456\cdot 7-2034567\cdot 1\sim 0,$$
$$-1203456\cdot 7+2304567\cdot 1\sim 0, \qquad 1230456\cdot 7-2340567\cdot 1\sim 0,$$
$$-1234056\cdot 7+2345067\cdot 1\sim 0, \qquad 1234506\cdot 7-2345607\cdot 1\sim 0,$$

iz (5.6) izlazi

$$
\begin{aligned}
(5.7)\qquad 2\,(1234567) \sim & -0345671\cdot 2+3045671\cdot 2-3405671\cdot 2\\
& +3450671\cdot 2-3456071\cdot 2-3456701\cdot 2\\
& +0456712\cdot 3-4056712\cdot 3+4506712\cdot 3\\
& -4560712\cdot 3-4567012\cdot 3+4567102\cdot 3\\
& -0567123\cdot 4+5067123\cdot 4-5607123\cdot 4\\
& -5670123\cdot 4+5671023\cdot 4-5671203\cdot 4\\
& +0671234\cdot 5-6071234\cdot 5-6701234\cdot 5\\
& +6710234\cdot 5-6712034\cdot 5+6712304\cdot 5\\
& -0712345\cdot 6-7012345\cdot 6+7102345\cdot 6\\
& -7120345\cdot 6+7123045\cdot 6-7123405\cdot 6.
\end{aligned}
$$

Zamenom $1\to 3$, $2\to 4$, $3\to 5$, $4\to 6$, $5\to 7$, $6\to 0$, $7\to 1\cdot 2$, u jednakosti (5.6), dobijamo

$$
\begin{aligned}
-2\,(3456701\cdot 2) \sim & \, 0345671\cdot 2+1\cdot 2034567+01\cdot 203456\cdot 7\\
& +701\cdot 20345\cdot 6+6701\cdot 2034\cdot 5+56701\cdot 203\cdot 4\\
& -0456701\cdot 2\cdot 3-3045671\cdot 2-1\cdot 2304567\\
& -01\cdot 230456\cdot 7-701\cdot 23045\cdot 6-6701\cdot 2304\cdot 5\\
& +056701\cdot 23\cdot 4+4056701\cdot 2\cdot 3+3405671\cdot 2\\
& +1\cdot 2340567+01\cdot 234056\cdot 7+701\cdot 23405\cdot 6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-06701\cdot 234\cdot 5-506701\cdot 23\cdot 4-4506701\cdot 2\cdot 3\\
&-3450671\cdot 2-1\cdot 2345067-01\cdot 234506\cdot 7\\
&+0701\cdot 2345\cdot 6+60701\cdot 234\cdot 5+560701\cdot 23\cdot 4\\
&+4560701\cdot 2\cdot 3+3456071\cdot 2+1\cdot 2345607\\
&-001\cdot 23456\cdot 7-7001\cdot 2345\cdot 6-67001\cdot 234\cdot 5\\
&-567001\cdot 23\cdot 4-4567001\cdot 2\cdot 3-3456701\cdot 2\\
&+01\cdot 234567+001\cdot 23456\cdot 7+7001\cdot 2345\cdot 6\\
&+67001\cdot 234\cdot 5+567001\cdot 23\cdot 4+4567001\cdot 2\cdot 3.
\end{aligned}
$$

Sređivanjem poslednje jednakosti i „sabiranjem" sa (5.7), dobijamo

$$
\begin{aligned}
2\,(1234567)\sim\;&0456712\cdot 3-4056712\cdot 3+4506712\cdot 3\\
&-4560712\cdot 3-4567012\cdot 3+4567102\cdot 3\\
&-0567123\cdot 4+5067123\cdot 4-5607123\cdot 4\\
&-5670123\cdot 4+5671023\cdot 4-5671203\cdot 4\\
&+0671234\cdot 5-6071234\cdot 5-6701234\cdot 5\\
&+6710234\cdot 5-6712034\cdot 5+6712304\cdot 5\\
&-0712345\cdot 6-7012345\cdot 6+7102345\cdot 6\\
&-7120345\cdot 6+7123045\cdot 6-7123405\cdot 6\\
&+01\cdot 234567+1\cdot 2034567-1\cdot 2304567\\
&+1\cdot 2340567-1\cdot 2345067+1\cdot 2345607\\
&+01\cdot 203456\cdot 7-01\cdot 230456\cdot 7+01\cdot 234056\cdot 7-01\cdot 234506\cdot 7\\
&+0701\cdot 2345\cdot 6+701\cdot 20345\cdot 6-701\cdot 23045\cdot 6+701\cdot 23405\cdot 6\\
&-06701\cdot 234\cdot 5+60701\cdot 234\cdot 5+6701\cdot 2034\cdot 5-6701\cdot 2304\cdot 5\\
&+056701\cdot 23\cdot 4-506701\cdot 23\cdot 4+560701\cdot 23\cdot 4+56701\cdot 203\cdot 4\\
&-0456701\cdot 2\cdot 3+4056701\cdot 2\cdot 3-4506701\cdot 2\cdot 3+4560701\cdot 2\cdot 3.
\end{aligned}
$$

Kako je

$$
\begin{aligned}
&01\cdot 234567-0712345\cdot 6\sim 0, && 1\cdot 2034567-7012345\cdot 6\sim 0,\\
&-1\cdot 2304567+7102345\cdot 6\sim 0, && 1\cdot 2340567-7120345\cdot 6\sim 0,\\
&-1\cdot 2345067+7123045\cdot 6\sim 0, && 1\cdot 2345607-7123405\cdot 6\sim 0,
\end{aligned}
$$

iz prethodne formule sleduje

$$
\begin{aligned}
(5.8)\qquad 2\,(1234567)\sim\;&0456712\cdot 3-4056712\cdot 3+4506712\cdot 3\\
&-4560712\cdot 3-4567012\cdot 3+4567102\cdot 3
\end{aligned}
$$

$$-0567123\cdot 4+5067123\cdot 4-5607123\cdot 4$$
$$-5670123\cdot 4+5671023\cdot 4-5671203\cdot 4$$

$$+0671234\cdot 5-6071234\cdot 5-6701234\cdot 5$$
$$+6710234\cdot 5-6712034\cdot 5+6712304\cdot 5$$

$$+01\cdot 203456\cdot 7-01\cdot 230456\cdot 7+01\cdot 234056\cdot 7-01\cdot 234506\cdot 7$$

$$+0701\cdot 2345\cdot 6+701\cdot 20345\cdot 6-701\cdot 23045\cdot 6+701\cdot 23405\cdot 6$$

$$-06701\cdot 234\cdot 5+60701\cdot 234\cdot 5+6701\cdot 2034\cdot 5-6701\cdot 2304\cdot 5$$

$$+056701\cdot 23\cdot 4-506701\cdot 23\cdot 4+560701\cdot 23\cdot 4+56701\cdot 203\cdot 4$$

$$-0456701\cdot 2\cdot 3+4056701\cdot 2\cdot 3-4506701\cdot 2\cdot 3+4560701\cdot 2\cdot 3.$$

Radi daljeg uprošćenja desne strane ove relacije, primenićemo formulu (5.6) na prvih šest članova, tj. izvršićemo u (5.6) redom sledeće zamene:

$$1^\circ \quad 1\to 0,\ 2\to 4,\ 3\to 5,\ 4\to 6,\ 5\to 7,\ 6\to 1,\ 7\to 2\cdot 3;$$
$$2^\circ \quad 1\to 4,\ 2\to 0,\ 3\to 5,\ 4\to 6,\ 5\to 7,\ 6\to 1,\ 7\to 2\cdot 3;$$
$$3^\circ \quad 1\to 4,\ 2\to 5,\ 3\to 0,\ 4\to 6,\ 5\to 7,\ 6\to 1,\ 7\to 2\cdot 3;$$
$$4^\circ \quad 1\to 4,\ 2\to 5,\ 3\to 6,\ 4\to 0,\ 5\to 7,\ 6\to 1,\ 7\to 2\cdot 3;$$
$$5^\circ \quad 1\to 4,\ 2\to 5,\ 3\to 6,\ 4\to 7,\ 5\to 0,\ 6\to 1,\ 7\to 2\cdot 3;$$
$$6^\circ \quad 1\to 4,\ 2\to 5,\ 3\to 6,\ 4\to 7,\ 5\to 1,\ 6\to 0,\ 7\to 2\cdot 3.$$

Na taj način, posle svođenja, dobijaju se sledeće formule:

$$2\,(0456712\cdot 3)+56712\cdot 304-0456712\cdot 3$$

$$+056712\cdot 34+4056712\cdot 3+0405671\cdot 2\cdot 3$$
$$+2\cdot 3040567\cdot 1+12\cdot 304056\cdot 7+712\cdot 30405\cdot 6$$

$$-06712\cdot 304\cdot 5-506712\cdot 34-4506712\cdot 3$$
$$-0450671\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3045067\cdot 1-12\cdot 304506\cdot 7$$

$$+0712\cdot 3045\cdot 6+60712\cdot 304\cdot 5+560712\cdot 34$$
$$+4560712\cdot 3+0456071\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3045607\cdot 1$$

$$-012\cdot 30456\cdot 7-7012\cdot 3045\cdot 6-67012\cdot 304\cdot 5$$
$$-567012\cdot 34-4567012\cdot 3-0456701\cdot 2\cdot 3$$

$$+02\cdot 304567\cdot 1+102\cdot 30456\cdot 7+7102\cdot 3045\cdot 6$$
$$+67102\cdot 304\cdot 5+567102\cdot 34+4567102\cdot 3=0,$$

$$-2\,(4056712\cdot 3)+6712\cdot 3405-056712\cdot 34$$

$$-0405671\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3040567\cdot 1-12\cdot 304056\cdot 7$$
$$-712\cdot 30405\cdot 6-6712\cdot 3045-56712\cdot 304$$

$$+06712\cdot 345+506712\cdot 34+0506712\cdot 3\cdot 4$$
$$+4050671\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3405067\cdot 1+12\cdot 340506\cdot 7$$

$$-0712\cdot 3405\cdot 6-60712\cdot 345-560712\cdot 34$$
$$-0560712\cdot 3\cdot 4-4056071\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3405607\cdot 1$$

$$+012\cdot 34056\cdot 7+7012\cdot 3405\cdot 6+67012\cdot 345$$
$$+567012\cdot 34+0567012\cdot 3\cdot 4+4056701\cdot 2\cdot 3$$

$$-02\cdot 340567\cdot 1-102\cdot 34056\cdot 7-7102\cdot 3405\cdot 6$$
$$-67102\cdot 345-567102\cdot 34-0567102\cdot 3\cdot 4=0,$$

$$2\,(4506712\cdot 3)+712\cdot 34506-06712\cdot 345$$

$$+0450671\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3045067\cdot 1+12\cdot 304506\cdot 7$$
$$+712\cdot 30456+6712\cdot 3045+06712\cdot 304\cdot 5$$

$$-0506712\cdot 3\cdot 4-4050671\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3405067\cdot 1$$
$$-12\cdot 340506\cdot 7-712\cdot 34056-6712\cdot 3405$$

$$+0712\cdot 3456+60712\cdot 345+060712\cdot 34\cdot 5$$
$$+5060712\cdot 3\cdot 4+4506071\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3450607\cdot 1$$

$$-012\cdot 34506\cdot 7-7012\cdot 3456-67012\cdot 345$$
$$-067012\cdot 34\cdot 5-5067012\cdot 3\cdot 4-4506701\cdot 2\cdot 3$$

$$+02\cdot 345067\cdot 1+102\cdot 34506\cdot 7+7102\cdot 3456$$
$$+67102\cdot 345+067102\cdot 34\cdot 5+5067102\cdot 3\cdot 4=0,$$

$$-2\,(4560712\cdot 3)+12\cdot 345607-0712\cdot 3456$$

$$-0456071\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3045607\cdot 1-12\cdot 304567$$
$$-712\cdot 30456-0712\cdot 3045\cdot 6-60712\cdot 304\cdot 5$$

$$+0560712\cdot 3\cdot 4+4056071\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3405607\cdot 1$$
$$+12\cdot 340567+712\cdot 34056+0712\cdot 3405\cdot 6$$

$$-060712\cdot 34\cdot 5-5060712\cdot 3\cdot 4-4506071\cdot 2\cdot 3$$
$$-2\cdot 3450607\cdot 1-12\cdot 345067-712\cdot 34506$$

$$+012\cdot 34567+7012\cdot 3456+07012\cdot 345\cdot 6$$
$$+607012\cdot 34\cdot 5+5607012\cdot 3\cdot 4+4560701\cdot 2\cdot 3$$

$$-02\cdot 345607\cdot 1-102\cdot 34567-7102\cdot 3456$$
$$-07102\cdot 345\cdot 6-607102\cdot 34\cdot 5-5607102\cdot 3\cdot 4=0,$$

$$-2\,(4567012\cdot 3)-2\cdot 3456701+012\cdot 34567$$

$$-0456701\cdot 2\cdot 3-2\cdot 3045671-12\cdot 304567$$
$$-012\cdot 30456\cdot 7-7012\cdot 3045\cdot 6-67012\cdot 304\cdot 5$$

$$+0567012\cdot 3\cdot 4+4056701\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3405671$$
$$+12\cdot 340567+012\cdot 34056\cdot 7+7012\cdot 3405\cdot 6$$

$$-067012\cdot 34\cdot 5-5067012\cdot 3\cdot 4-4506701\cdot 2\cdot 3$$
$$-2\cdot 3450671-12\cdot 345067-012\cdot 34506\cdot 7$$

$$+07012\cdot 345\cdot 6+607012\cdot 34\cdot 5+5607012\cdot 3\cdot 4$$
$$+4560701\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3456071+12\cdot 345607$$

$$-02\cdot 345671-102\cdot 34567-0102\cdot 3456\cdot 7$$
$$-70102\cdot 345\cdot 6-670102\cdot 34\cdot 5-5670102\cdot 3\cdot 4=0,$$

$$2\,(4567102\cdot 3)+02\cdot 345671-4567102\cdot 3$$

$$+0456712\cdot 3+2\cdot 3045671+02\cdot 304567\cdot 1$$
$$+102\cdot 30456\cdot 7+7102\cdot 3045\cdot 6+67102\cdot 304\cdot 5$$

$$-0567102\cdot 3\cdot 4-4056712\cdot 3-2\cdot 3405671$$
$$-02\cdot 340567\cdot 1-102\cdot 34056\cdot 7-7102\cdot 3405\cdot 6$$

$$+067102\cdot 34\cdot 5+5067102\cdot 3\cdot 4+4506712\cdot 3$$
$$+2\cdot 3450671+02\cdot 345067\cdot 1+102\cdot 34506\cdot 7$$

$$-07102\cdot 345\cdot 6-607102\cdot 34\cdot 5-5607102\cdot 3\cdot 4$$
$$-4560712\cdot 3-2\cdot 3456071-02\cdot 345607\cdot 1$$

$$+0102\cdot 3456\cdot 7+70102\cdot 345\cdot 6+670102\cdot 34\cdot 5$$
$$+5670102\cdot 3\cdot 4+4567012\cdot 3+2\cdot 3456701=0.$$

Sabiranjem ovih šest jednakosti, sređivanjem i deljenjem sa 2, dobijamo formulu

$$\begin{aligned}
&0456712\cdot 3-4056712\cdot 3+4506712\cdot 3\\
&-4560712\cdot 3-4567012\cdot 3+4567102\cdot 3\\
&+02\cdot 304567\cdot 1+102\cdot 30456\cdot 7+7102\cdot 3045\cdot 6+67102\cdot 304\cdot 5\\
&-0567102\cdot 3\cdot 4-02\cdot 340567\cdot 1-102\cdot 34056\cdot 7-7102\cdot 3405\cdot 6\\
&+067102\cdot 34\cdot 5+5067102\cdot 3\cdot 4+02\cdot 345067\cdot 1+102\cdot 34506\cdot 7\\
&-07102\cdot 345\cdot 6-607102\cdot 34\cdot 5-5607102\cdot 3\cdot 4-02\cdot 345607\cdot 1\\
&-0456701\cdot 2\cdot 3-012\cdot 30456\cdot 7-7012\cdot 3045\cdot 6-67012\cdot 304\cdot 5\\
&+0567012\cdot 3\cdot 4+4056701\cdot 2\cdot 3+012\cdot 34056\cdot 7+7012\cdot 3405\cdot 6\\
&-067012\cdot 34\cdot 5-5067012\cdot 3\cdot 4-4506701\cdot 2\cdot 3-012\cdot 34506\cdot 7\\
&+07012\cdot 345\cdot 6+607012\cdot 34\cdot 5+5607012\cdot 3\cdot 4+4560701\cdot 2\cdot 3=0.
\end{aligned}$$

„Sabirajući“ poslednje jednakosti sa (5.8) i koristeći relacije

$$0671234\cdot 5-012\cdot 34567\sim 0,\quad -6071234\cdot 5+102\cdot 34567\sim 0,$$
$$-6701234\cdot 5+12\cdot 304567\sim 0,\quad 6710234\cdot 5-12\cdot 340567\sim 0,$$

$$-6712034\cdot 5+12\cdot 345067\sim 0,\qquad 6712304\cdot 5-12\cdot 345607\sim 0,$$
$$01\cdot 203456\cdot 7-02\cdot 304567\cdot 1\sim 0,\qquad -01\cdot 230456\cdot 7+02\cdot 340567\cdot 1\sim 0,$$
$$01\cdot 234056\cdot 7-02\cdot 345067\cdot 1\sim 0,\qquad -01\cdot 234506\cdot 7+02\cdot 345607\cdot 1\sim 0,$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
(5.9)\quad & 2\,(1234567)\\
&\sim -0567123\cdot 4+5067123\cdot 4-5607123\cdot 4\\
&\quad -5670123\cdot 4+5671023\cdot 4-5671203\cdot 4\\
&\quad +0701\cdot 2345\cdot 6+701\cdot 20345\cdot 6-701\cdot 23045\cdot 6+701\cdot 23405\cdot 6\\
&\quad -06701\cdot 234\cdot 5+60701\cdot 234\cdot 5+6701\cdot 2034\cdot 5-6701\cdot 2304\cdot 5\\
&\quad +056701\cdot 23\cdot 4-506701\cdot 23\cdot 4+560701\cdot 23\cdot 4+56701\cdot 203\cdot 4\\
&\quad +0567102\cdot 3\cdot 4-102\cdot 30456\cdot 7-7102\cdot 3045\cdot 6-67102\cdot 304\cdot 5\\
&\quad -067102\cdot 34\cdot 5-5067102\cdot 3\cdot 4+102\cdot 34056\cdot 7+7102\cdot 3405\cdot 6\\
&\quad +07102\cdot 345\cdot 6+607102\cdot 34\cdot 5+5607102\cdot 3\cdot 4-102\cdot 34506\cdot 7\\
&\quad -0567012\cdot 3\cdot 4+012\cdot 30456\cdot 7+7012\cdot 3045\cdot 6+67012\cdot 304\cdot 5\\
&\quad +067012\cdot 34\cdot 5+5067012\cdot 3\cdot 4-012\cdot 34056\cdot 7-7012\cdot 3405\cdot 6\\
&\quad -07012\cdot 345\cdot 6-607012\cdot 34\cdot 5-5607012\cdot 3\cdot 4+012\cdot 34506\cdot 7.
\end{aligned}$$

Da bismo izvršili dalju redukciju desne strane ove formule, primenićemo formulu (5.6) na prvih šest članova, tj. izvršićemo u (5.6) redom sledeće zamene:

$$\begin{array}{llllllll}
1^\circ & 1\to 0, & 2\to 5, & 3\to 6, & 4\to 7, & 5\to 1, & 6\to 2, & 7\to 3\cdot 4;\\
2^\circ & 1\to 5, & 2\to 0, & 3\to 6, & 4\to 7, & 5\to 1, & 6\to 2, & 7\to 3\cdot 4;\\
3^\circ & 1\to 5, & 2\to 6, & 3\to 0, & 4\to 7, & 5\to 1, & 6\to 2, & 7\to 3\cdot 4;\\
4^\circ & 1\to 5, & 2\to 6, & 3\to 7, & 4\to 0, & 5\to 1, & 6\to 2, & 7\to 3\cdot 4;\\
5^\circ & 1\to 5, & 2\to 6, & 3\to 7, & 4\to 1, & 5\to 0, & 6\to 2, & 7\to 3\cdot 4;\\
6^\circ & 1\to 5, & 2\to 6, & 3\to 7, & 4\to 1, & 5\to 2, & 6\to 0, & 7\to 3\cdot 4.
\end{array}$$

Na taj način, posle svođenja dolazimo do sledećih formula:

$$-2\,(0567123\cdot 4)-67123\cdot 405+0567123\cdot 4$$

$$\begin{aligned}
&-067123\cdot 45-5067123\cdot 4-0506712\cdot 3\cdot 4\\
&-3\cdot 4050671\cdot 2-23\cdot 405067\cdot 1-123\cdot 40506\cdot 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+07123\cdot 405\cdot 6+607123\cdot 45+5607123\cdot 4\\
&+0560712\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4056071\cdot 2+23\cdot 405607\cdot 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-0123\cdot 4056\cdot 7-70123\cdot 405\cdot 6-670123\cdot 45\\
&-5670123\cdot 4-0567012\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4056701\cdot 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+023\cdot 40567\cdot 1+1023\cdot 4056\cdot 7+71023\cdot 405\cdot 6\\
&+671023\cdot 45+5671023\cdot 4+0567102\cdot 3\cdot 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-03\cdot 405671\cdot 2-203\cdot 40567\cdot 1-1203\cdot 4056\cdot 7\\
&-71203\cdot 405\cdot 6-671203\cdot 45-5671203\cdot 4=0,
\end{aligned}$$

$$2(5067123\cdot 4)-7123\cdot 4506+067123\cdot 45$$

$$+0506712\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4050671\cdot 2+23\cdot 405067\cdot 1$$
$$+123\cdot 40506\cdot 7+7123\cdot 4056+67123\cdot 405$$

$$-07123\cdot 456-607123\cdot 45-0607123\cdot 4\cdot 5$$
$$-5060712\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4506071\cdot 2-23\cdot 450607\cdot 1$$

$$+0123\cdot 4506\cdot 7+70123\cdot 456+670123\cdot 45$$
$$+0670123\cdot 4\cdot 5+5067012\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4506701\cdot 2$$

$$-023\cdot 45067\cdot 1-1023\cdot 4506\cdot 7-71023\cdot 456$$
$$-671023\cdot 45-0671023\cdot 4\cdot 5-5067102\cdot 3\cdot 4$$

$$+03\cdot 450671\cdot 2+203\cdot 45067\cdot 1+1203\cdot 4506\cdot 7$$
$$+71203\cdot 456+671203\cdot 45+0671203\cdot 4\cdot 5=0.$$

$$-2(5607123\cdot 4)-123\cdot 45607+07123\cdot 456$$

$$-0560712\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4056071\cdot 2-23\cdot 405607\cdot 1$$
$$-123\cdot 45067-7123\cdot 4056-07123\cdot 405\cdot 6$$

$$+0607123\cdot 4\cdot 5+5060712\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4506071\cdot 2$$
$$+23\cdot 450607\cdot 1+123\cdot 45067+7123\cdot 4506$$

$$-0123\cdot 4567-70123\cdot 456-070123\cdot 45\cdot 6$$
$$-6070123\cdot 4\cdot 5-5607012\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4560701\cdot 2$$

$$+023\cdot 45607\cdot 1+1023\cdot 4567+71023\cdot 456$$
$$+071023\cdot 45\cdot 6+6071023\cdot 4\cdot 5+5607102\cdot 3\cdot 4$$

$$-03\cdot 456071\cdot 2-203\cdot 45607\cdot 1-1203\cdot 4567$$
$$-71203\cdot 456-071203\cdot 45\cdot 6-6071203\cdot 4\cdot 5=0,$$

$$-2(5670123\cdot 4)+23\cdot 456701-0123\cdot 4567$$

$$-0567012\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4056701\cdot 2-23\cdot 405671$$
$$-123\cdot 40567-0123\cdot 4056\cdot 7-70123\cdot 405\cdot 6$$

$$+0670123\cdot 4\cdot 5+5067012\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4506701\cdot 2$$
$$+23\cdot 450671+123\cdot 45067+0123\cdot 4506\cdot 7$$

$$-070123\cdot 45\cdot 6-6070123\cdot 4\cdot 5-5607012\cdot 3\cdot 4$$
$$-3\cdot 4560701\cdot 2-23\cdot 456071-123\cdot 45607$$

$$+023\cdot 45671+1023\cdot 4567+01023\cdot 456\cdot 7$$
$$+701023\cdot 45\cdot 6+6701023\cdot 4\cdot 5+5670102\cdot 3\cdot 4$$

$$-03\cdot 456701\cdot 2-203\cdot 45671-1203\cdot 4567$$
$$-01203\cdot 456\cdot 7-701203\cdot 45\cdot 6-6701203\cdot 4\cdot 5=0,$$

$$2(5671023\cdot 4)+3\cdot 4567102-023\cdot 40567\cdot 1$$

$$+0567102\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4056712+23\cdot 405671$$
$$+023\cdot 40567\cdot 1+1023\cdot 4056\cdot 7+71023\cdot 405\cdot 6$$

$$-0671023\cdot 4\cdot 5-5067102\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4506712$$
$$-23\cdot 450671-023\cdot 45067\cdot 1-1023\cdot 4506\cdot 7$$

$$+071023\cdot 45\cdot 6+6071023\cdot 4\cdot 5+5607102\cdot 3\cdot 4$$
$$+3\cdot 4560712+23\cdot 456071+023\cdot 45607\cdot 1$$

$$-01023\cdot 456\cdot 7-701023\cdot 45\cdot 6-6701023\cdot 4\cdot 5$$
$$-5670102\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4567012-23\cdot 456701$$

$$+03\cdot 456712+203\cdot 45671+0203\cdot 4567\cdot 1$$
$$+10203\cdot 4567+710203\cdot 45\cdot 6+6710203\cdot 4\cdot 5=0,$$

$$-2(5671203\cdot 4)+5671203\cdot 4-03\cdot 456712$$

$$-0567123\cdot 4-3\cdot 4056712-03\cdot 405671\cdot 2$$
$$-203\cdot 40567\cdot 1-1203\cdot 4056\cdot 7-71203\cdot 405\cdot 6$$

$$+0671203\cdot 4\cdot 5+5067123\cdot 4+3\cdot 4506712$$
$$+03\cdot 450671\cdot 2+203\cdot 45067\cdot 1+1203\cdot 4506\cdot 7$$

$$-071203\cdot 45\cdot 6-6071203\cdot 4\cdot 5-5607123\cdot 4$$
$$-3\cdot 4560712-03\cdot 456071\cdot 2-203\cdot 45607\cdot 1$$

$$+01203\cdot 456\cdot 7+701203\cdot 45\cdot 6+6701203\cdot 4\cdot 5$$
$$+5670123\cdot 4+3\cdot 4567012+03\cdot 456701\cdot 2$$

$$-0203\cdot 4567\cdot 1-10203\cdot 456\cdot 7-710203\cdot 45\cdot 6$$
$$-6710203\cdot 4\cdot 5-5671023\cdot 4-3\cdot 4567102=0.$$

Sabiranjem poslednjih šest jednakosti, svođenjem sličnih članova i deljenjem sa 2, nalazimo

(5.10)
$$-0567123\cdot 4+5067123\cdot 4-5607123\cdot 4$$
$$-5670123\cdot 4+5671023\cdot 4-5671203\cdot 4$$

$$-0123\cdot 4567+1023\cdot 4567-1203\cdot 4567$$
$$-123\cdot 40567+123\cdot 45067-123\cdot 45607$$
$$-0567012\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4056701\cdot 2-0123\cdot 4056\cdot 7-70123\cdot 405\cdot 6$$
$$+0670123\cdot 4\cdot 5+5067012\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4506701\cdot 2+0123\cdot 4506\cdot 7$$
$$-070123\cdot 45\cdot 6-6070123\cdot 4\cdot 5-5607012\cdot 3\cdot 4-3\cdot 4560701\cdot 2$$
$$+0567102\cdot 3\cdot 4+023\cdot 40567\cdot 1+1023\cdot 4056\cdot 7+71023\cdot 405\cdot 6$$
$$-0671023\cdot 4\cdot 5-5067102\cdot 3\cdot 4-023\cdot 45067\cdot 1-1023\cdot 4506\cdot 7$$
$$+071023\cdot 45\cdot 6+6071023\cdot 4\cdot 5+5607102\cdot 3\cdot 4+023\cdot 45607\cdot 1$$
$$-03\cdot 405671\cdot 2-203\cdot 40567\cdot 1-1203\cdot 4056\cdot 7-71203\cdot 405\cdot 6$$
$$+0671203\cdot 4\cdot 5+03\cdot 450671\cdot 2+203\cdot 45067\cdot 1+1203\cdot 4506\cdot 7$$
$$-071203\cdot 45\cdot 6-6071203\cdot 4\cdot 5-03\cdot 456071\cdot 2-203\cdot 45607\cdot 1=0.$$

Množeći ekvivalenciju (5.9) sa 2 i sabirajući je zatim sa (5.10), svođenjem sličnih članova i pogodnim grupisanjem dobijamo:

$$
\begin{aligned}
4(1234567) \sim & (0123\cdot 4567 - 0567123\cdot 4) + (5067123\cdot 4 - 1023\cdot 4567) \\
& + (1203\cdot 4567 - 5607123\cdot 4) + (123\cdot 40567 - 5670123\cdot 4) \\
& + (5671023\cdot 4 - 123\cdot 45067) + (123\cdot 45607 - 5671203\cdot 4) \\
& + (0123\cdot 4056\cdot 7 - 0567012\cdot 3\cdot 4) + (0567102\cdot 3\cdot 4 - 0123\cdot 4506\cdot 7) \\
& + (5067012\cdot 3\cdot 4 - 1023\cdot 4056\cdot 7) + (1023\cdot 4506\cdot 7 - 5067102\cdot 3\cdot 4) \\
& + (1203\cdot 4056\cdot 7 - 5607012\cdot 3\cdot 4) + (5607102\cdot 3\cdot 4 - 1203\cdot 4506\cdot 7) \\
& + (012\cdot 30456\cdot 7 - 0670123\cdot 4\cdot 5) + (6070123\cdot 4\cdot 5 - 102\cdot 30456\cdot 7) \\
& + (0671023\cdot 4\cdot 5 - 012\cdot 34056\cdot 7) + (102\cdot 34056\cdot 7 - 6071023\cdot 4\cdot 5) \\
& + (012\cdot 34506\cdot 7 - 0671203\cdot 4\cdot 5) + (6071203\cdot 4\cdot 5 - 102\cdot 34506\cdot 7) \\
& + (012\cdot 30456\cdot 7 - 023\cdot 40567\cdot 1) + (203\cdot 40567\cdot 1 - 102\cdot 30456\cdot 7) \\
& + (023\cdot 45067\cdot 1 - 012\cdot 34056\cdot 7) + (102\cdot 34056\cdot 7 - 203\cdot 45067\cdot 1) \\
& + (012\cdot 34506\cdot 7 - 023\cdot 45607\cdot 1) + (203\cdot 45607\cdot 1 - 102\cdot 34506\cdot 7) \\
& + (3\cdot 4056701\cdot 2 - 70123\cdot 405\cdot 6) + (3\cdot 4506701\cdot 2 - 71023\cdot 405\cdot 6) \\
& + (03\cdot 405671\cdot 2 - 070123\cdot 45\cdot 6) + (3\cdot 4560701\cdot 2 - 71203\cdot 405\cdot 6) \\
& + (03\cdot 450671\cdot 2 - 071023\cdot 45\cdot 6) + (03\cdot 456071\cdot 2 - 071203\cdot 45\cdot 6) \\
& + 2\{0701\cdot 2345\cdot 6 + 701\cdot 20345\cdot 6 - 701\cdot 23045\cdot 6 + 701\cdot 23405\cdot 6 \\
& \quad - 06701\cdot 234\cdot 5 + 60701\cdot 234\cdot 5 + 6701\cdot 2034\cdot 5 - 6701\cdot 2304\cdot 5 \\
& \quad + 056701\cdot 23\cdot 4 - 506701\cdot 23\cdot 4 + 560701\cdot 23\cdot 4 + 56701\cdot 203\cdot 4 \\
& \quad + 07102\cdot 345\cdot 6 - 7012\cdot 3405\cdot 6 - 7102\cdot 3045\cdot 6 + 7102\cdot 3405\cdot 6 \\
& \quad - 067102\cdot 34\cdot 5 + 607102\cdot 34\cdot 5 + 67012\cdot 304\cdot 5 - 67102\cdot 304\cdot 5 \\
& \quad + 070123\cdot 45\cdot 6 + 071203\cdot 45\cdot 6 + 70123\cdot 405\cdot 6 + 71203\cdot 405\cdot 6 \\
& \quad + 7012\cdot 3045\cdot 6 - 07012\cdot 345\cdot 6 + 067012\cdot 34\cdot 5 - 607012\cdot 34\cdot 5 \\
& \qquad\qquad - 3\cdot 4506701\cdot 2 - 03\cdot 450671\cdot 2\}.
\end{aligned}
$$

Kako je svaka mala zagrada, na desnoj strani ove relacije, oblika (5.2) (~ 0), posle skraćivanja sa 2, dobija se:

(5.11)
$$
\begin{aligned}
2\,(1234567) & \\
\sim & 0701\cdot 2345\cdot 6 + 701\cdot 20345\cdot 6 - 701\cdot 23045\cdot 6 + 701\cdot 23405\cdot 6 \\
& - 06701\cdot 234\cdot 5 + 60701\cdot 234\cdot 5 + 6701\cdot 2034\cdot 5 - 6701\cdot 2304\cdot 5 \\
& + 056701\cdot 23\cdot 4 - 506701\cdot 23\cdot 4 + 560701\cdot 23\cdot 4 + 56701\cdot 203\cdot 4 \\
& + 07102\cdot 345\cdot 6 - 7012\cdot 3405\cdot 6 - 7102\cdot 3045\cdot 6 + 7102\cdot 3405\cdot 6 \\
& - 067102\cdot 34\cdot 5 + 607102\cdot 34\cdot 5 + 67012\cdot 304\cdot 5 - 67102\cdot 304\cdot 5 \\
& + 070123\cdot 45\cdot 6 + 071203\cdot 45\cdot 6 + 70123\cdot 405\cdot 6 + 71203\cdot 405\cdot 6 \\
& + 7012\cdot 3045\cdot 6 - 07012\cdot 345\cdot 6 + 067012\cdot 34\cdot 5 - 607012\cdot 34\cdot 5 \\
& \qquad\qquad - 3\cdot 4506701\cdot 2 - 03\cdot 450671\cdot 2.
\end{aligned}
$$

Stavljajući u (5.5) $4 = 6 = 0$, dobija se

(5.12)
$$
\begin{aligned}
& 1230507 + 2305071 + 3050701\cdot 2 + 0507012\cdot 3 \\
& + 5070123 + 0701235 + 7012305 + 0123057 = 0.
\end{aligned}
$$

Ako se u (5.5) stavi $3=6=0$, dobija se

$$
\begin{aligned}
&1204507+2045071+0450701\cdot 2+4507012\\
&+5070124+0701204\cdot 5+7012045+0120457=0.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Vršeći u formuli (5.12) sledeće zamene

$$
\begin{array}{llllll}
1^\circ & 1\to 1, & 2\to 2\cdot 3, & 3\to 4, & 5\to 5\cdot 6, & 7\to 7;\\
2^\circ & 1\to 1\cdot 2, & 2\to 3, & 3\to 4, & 5\to 5\cdot 6, & 7\to 7;\\
3^\circ & 1\to 1, & 2\to 2, & 3\to 3\cdot 4, & 5\to 5\cdot 6, & 7\to 7,
\end{array}
$$

a u formuli (5.13), zamene

$$
\begin{array}{llllll}
1^\circ & 1\to 6, & 2\to 7, & 4\to 1\cdot 2, & 5\to 3, & 7\to 4\cdot 5;\\
2^\circ & 1\to 1\cdot 2, & 2\to 3, & 4\to 4, & 5\to 5\cdot 6, & 7\to 7;\\
3^\circ & 1\to 1\cdot 2, & 2\to 3, & 4\to 4\cdot 5, & 5\to 6, & 7\to 7;\\
4^\circ & 1\to 1, & 2\to 2\cdot 3, & 4\to 4, & 5\to 5\cdot 6, & 7\to 7,
\end{array}
$$

dobijamo sledećih sedam jednakosti:

$$
\begin{aligned}
0=\ & 12\cdot 3405\cdot 607+2\cdot 3405\cdot 6071+405\cdot 60701\cdot 2\cdot 3+05\cdot 607012\cdot 3\cdot 4\\
&+5\cdot 607012\cdot 34+07012\cdot 345\cdot 6+7012\cdot 3405\cdot 6+012\cdot 3405\cdot 67,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0=\ & -1\cdot 23405\cdot 607-3405\cdot 6071\cdot 2-405\cdot 60701\cdot 2\cdot 3-05\cdot 60701\cdot 23\cdot 4\\
&-5\cdot 60701\cdot 234-0701\cdot 2345\cdot 6-701\cdot 23405\cdot 6-01\cdot 23405\cdot 67,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0=\ & -123\cdot 405\cdot 607-23\cdot 405\cdot 6071-3\cdot 405\cdot 60701\cdot 2-05\cdot 607012\cdot 3\cdot 4\\
&-5\cdot 6070123\cdot 4-070123\cdot 45\cdot 6-70123\cdot 405\cdot 6-0123\cdot 405\cdot 67,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0=\ & 6701\cdot 2304\cdot 5+701\cdot 2304\cdot 56+01\cdot 2304\cdot 506\cdot 7+1\cdot 2304\cdot 5067\\
&+304\cdot 50671\cdot 2+04\cdot 506701\cdot 2\cdot 3+4\cdot 506701\cdot 23+06701\cdot 234\cdot 5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0=\ & 1\cdot 23045\cdot 607+3045\cdot 6071\cdot 2+045\cdot 60701\cdot 2\cdot 3+45\cdot 60701\cdot 23\\
&+5\cdot 60701\cdot 234+0701\cdot 2304\cdot 5\cdot 6+701\cdot 23045\cdot 6+01\cdot 23045\cdot 67,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0=\ & -1\cdot 2304\cdot 5607-304\cdot 56071\cdot 2-04\cdot 560701\cdot 2\cdot 3-4\cdot 560701\cdot 23\\
&-60701\cdot 234\cdot 5-0701\cdot 2304\cdot 5\cdot 6-701\cdot 2304\cdot 56-01\cdot 2304\cdot 567,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0=\ & -12\cdot 3045\cdot 607-2\cdot 3045\cdot 6071-045\cdot 60701\cdot 2\cdot 3-45\cdot 607012\cdot 3\\
&-5\cdot 607012\cdot 34-07012\cdot 304\cdot 5\cdot 6-7012\cdot 3045\cdot 6-012\cdot 3045\cdot 67.
\end{aligned}
$$

Sabiranjem (5.11) i poslednjih sedam jednakosti i sređivanjem, dobijamo

$$
\begin{aligned}
2\,(1234567)\sim\ & (701\cdot 20345\cdot 6-5\cdot 6070123\cdot 4)+(6701\cdot 2034\cdot 5-45\cdot 607012\cdot 3)\\
&+(056701\cdot 23\cdot 4-0123\cdot 405\cdot 67)+(3045\cdot 6071\cdot 2-506701\cdot 23\cdot 4)\\
&+(560701\cdot 23\cdot 4-3405\cdot 6071\cdot 2)+(56701\cdot 203\cdot 4-123\cdot 405\cdot 607)\\
&+(1\cdot 2304\cdot 5067-7102\cdot 3045\cdot 6)+(12\cdot 3405\cdot 607-67102\cdot 304\cdot 5)\\
&+(012\cdot 3405\cdot 67-067102\cdot 34\cdot 5)+(7102\cdot 3405\cdot 6-1\cdot 2304\cdot 5607)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(07102\cdot 345\cdot 6-01\cdot 2304\cdot 567)+(607102\cdot 34\cdot 5-304\cdot 56071\cdot 2)\\
&+(67012\cdot 304\cdot 5-12\cdot 3045\cdot 607)+(067012\cdot 34\cdot 5-012\cdot 3045\cdot 67)\\
&+(304\cdot 50671\cdot 2-607012\cdot 34\cdot 5)+(1\cdot 23045\cdot 607-3\cdot 4506701\cdot 2)\\
&+(71203\cdot 405\cdot 6-1\cdot 23405\cdot 607)+(01\cdot 2304\cdot 567-03\cdot 450671\cdot 2)\\
&+(071203\cdot 45\cdot 6-01\cdot 23405\cdot 67)+(2\cdot 3405\cdot 6071-4\cdot 560701\cdot 23)\\
&+(45\cdot 60701\cdot 23-23\cdot 405\cdot 6071)+(01\cdot 2304\cdot 506\cdot 7-04\cdot 560701\cdot 2\cdot 3)\\
&+(04\cdot 506701\cdot 2\cdot 3-07012\cdot 304\cdot 5\cdot 6)+(4\cdot 506701\cdot 23-2\cdot 3045\cdot 6071)\\
&+3\cdot 405\cdot 60701\cdot 2+05\cdot 60701\cdot 23\cdot 4.
\end{aligned}
$$

Kako je svaka mala zagrada, na desnoj strani poslednje relacije, oblika (5.2) (~ 0), dobijamo

$$2\,(1234567)\sim 3\cdot 405\cdot 60701\cdot 2+05\cdot 60701\cdot 23\cdot 4. \tag{5.14}$$

Stavljajući u (5.12) $2=0$, dolazimo do

$$
\begin{aligned}
3050701+0507013=&-1030507-0305071\\
&-5070103-0701035\\
&-7010305-0103057.
\end{aligned}
$$

Ako ovde izvršimo zamenu

$$1\to 1\cdot 2,\quad 3\to 3\cdot 4,\quad 5\to 5\cdot 6,\quad 7\to 7,$$

imamo jednakost

$$
\begin{aligned}
3\cdot 405\cdot 60701\cdot 2+05\cdot 60701\cdot 23\cdot 4=&-1\cdot 203\cdot 405\cdot 607-03\cdot 405\cdot 6071\cdot 2\\
&-5\cdot 60701\cdot 203\cdot 4-0701\cdot 203\cdot 45\cdot 6\\
&-701\cdot 203\cdot 405\cdot 6-01\cdot 203\cdot 405\cdot 67.
\end{aligned}
$$

Iz poslednje jednakosti i (5.14) izlazi

$$
\begin{aligned}
8\,(1234567)\sim&(3\cdot 405\cdot 60701\cdot 2-1\cdot 203\cdot 405\cdot 607)\\
&+(05\cdot 60701\cdot 23\cdot 4-03\cdot 405\cdot 6071\cdot 2)\\
&+(3\cdot 405\cdot 60701\cdot 2-5\cdot 60701\cdot 203\cdot 4)\\
&+(05\cdot 60701\cdot 23\cdot 4-0701\cdot 203\cdot 45\cdot 6)\\
&+(3\cdot 405\cdot 60701\cdot 2-701\cdot 203\cdot 405\cdot 6)\\
&+(05\cdot 60701\cdot 23\cdot 4-01\cdot 203\cdot 405\cdot 67).
\end{aligned}
$$

Odavde sleduje $8\,(1234567)\sim 0$, tj. $1234567\sim 0$, jer je svaka od zagrada na desnoj strani oblika (5.2).

Time je završen dokaz teoreme 4.

Primedbe. 1° Kao i u prethodnom paragrafu, vidimo da je u dokazu teoreme 4 iskorišćena samo jednačina (5.5). Prema tome, zaključujemo da su jednačine (5.1) i (5.5) ekvivalentne.

2° Funkcije f_i $(i=1, 2, 3, 4)$ čija egzistencija sleduje iz teoreme 4, mogu se efektivno odrediti koristeći formule koje se javljaju u dokazu.

III DEO

REŠAVANJE IZVESNIH KLASA FUNKCIONALNIH JEDNAČINA U REALNOJ OBLASTI

1. Rešenje jednačine

$$F(x, y, z)-F(y, z, x)=f(x, y+z)$$

U prethodnom odeljku videli smo da se pri vrlo opštim pretpostavkama može naći opšte rešenje jednačine (2.1.1), a takođe jednačine (2.2.5), za $n=1, 3, 5, 7$. Za parno n nismo mogli naći opšte rešenje.

U ovom paragrafu analiziraćemo jednačinu (2.1.1) za $n=2$, tj. jednačinu

$$F(x, y, z)-F(y, z, x)=f(x, y \cdot z) \tag{1.1}$$

pri dopunskim pretpostavkama:

1° $S=R$, tj. nezavisno promenljive x, y, z uzimaju proizvoljne vrednosti iz skupa realnih brojeva;

2° $M=R$, tj. funkcije F i f uzimaju takođe vrednosti iz skupa realnih brojeva;

3° Operacija „$\cdot$" je operacija sabiranja realnih brojeva (ona je asocijativna i ima jedinični element).

Dakle, umesto (1.1) možemo pisati

$$F(x, y, z)-F(y, z, x)=f(x, y+z). \tag{1.2}$$

Eliminacijom funkcije F dobijamo jednačinu

$$f(x, y+z)+f(y, z+x)+f(z, x+y)=0, \tag{1.3}$$

koja odgovara jednačini (2.2.5).

Jednačina

$$g(y+z, x)+g(z+x, y)+g(x+y, z)=0, \tag{1.4}$$

koja se iz (1.3) dobija stavljajući $f(x, y)=g(y, x)$, rešena je u članku [4] pod pretpostavkom da je funkcija g neprekidna. Naime, u tom članku je dokazana sledeća teorema:

T e o r e m a 1. *Opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* (1.4) *je*

$$g(x, y) = (x - 2y)\,\psi(x + y), \tag{1.5}$$

gde je ψ *proizvoljna neprekidna funkcija.*

Iz navedenog članka neposredno sleduje i opštija teorema koju ćemo ovde formulisati.

T e o r e m a 2. *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.4) *je dato sa*

$$g(x, y) = \varphi(x - 2y)\,\psi(x + y), \tag{1.6}$$

gde je φ *opšte rešenje Cauchyeve funkcionalne jednačine*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{1.7}$$

i ψ *proizvoljna funkcija.*

P o s l e d i c a. *Opšte rešenje jednačine* (1.3) *je*

$$f(x, y) = \varphi(2x - y)\,\psi(x + y) \tag{1.8}$$

gde φ *i* ψ *imaju isto značenje kao u teoremi* 2.

Zamenjujući funkciju f iz (1.8) u (1.2), dobijamo

$$F(x, y, z) - F(y, z, x) = \varphi(2x - y - z)\,\psi(x + y + z).$$

Koristeći se činjenicom da je φ rešenje jednačine (1.7), odavde sleduje

$$F(x, y, z) - F(y, z, x) = \varphi(x - z)\,\psi(x + y + z) - \varphi(y - x)\,\psi(x + y + z),$$

tj.

$$\{F(x, y, z) - \varphi(x - z)\,\psi(x + y + z)\} - \{F(y, z, x) - \varphi(y - x)\,\psi(y + z + x)\} = 0.$$

Funkcija $F(x, y, z) - \varphi(x - z)\,\psi(x + y + z)$ je, dakle, invarijantna pri cikličkoj permutaciji promenljivih x, y, z. Na osnovu toga, prema [10] (str. 8—9), zaključujemo da je

$$\begin{aligned} F(x, y, z) = {} & \varphi(x - z)\,\psi(x + y + z) \\ & + \Phi(x, y, z) + \Phi(y, z, x) + \Phi(z, x, y), \end{aligned} \tag{1.9}$$

gde je Φ proizvoljna funkcija.

Prema tome, dokazali smo sledeći rezultat:

T e o r e m a 3. *Opšte rešenje jednačine* (1.2), *gde su* F *i* f *nepoznate funkcije, dato je pomoću* (1.8) *i* (1.9), *gde su* ψ *i* Φ *proizvoljne funkcije a* φ *proizvoljno rešenje jednačine* (1.7).

P o s l e d i c a. *Opšte neprekidno rešenje jednačine* (1.2) *dato je sa*

$$f(x, y) = (2x - y)\,\psi(x + y), \tag{1.10}$$

$$F(x, y, z) = (x - z)\,\psi(x + y + z) + \Phi(x, y, z) + \Phi(y, z, x) + \Phi(z, x, y), \tag{1.11}$$

gde su ψ *i* Φ *proizvoljne neprekidne funkcije.*

Generalizacija. Operaciju „$\cdot$" umesto uslovom 3° možemo definisati sa

$$x \cdot y = g\,(g^{-1}(x) + g^{-1}(y))$$

gde je g proizvoljna striktno monotona funkcija koja je definisana na čitavoj realnoj osi a g^{-1} njoj inverzna funkcija. Ovako definisana operacija je asocijativna i ima jedinični element $e = g\,(0)$ (videti [1]).

Rešavanje jednačine (1.1), u ovom generalnijem slučaju, svodi se opet na rešavanje jednačine (1.2) (videti [4]).

U pomenutom članku je rešena na taj način funkcionalna jednačina

$$f(xy, z) + f(yz, x) + f(zx, y) = 0,$$

pod pretpostavkom da je f neprekidna funkcija.

2. Rešenje jedne klase funkcionalnih jednačina

U radu [9] određeno je opšte neprekidno rešenje jedne klase funkcionalnih jednačina koja generališe jednačinu (1.2).

Neka je ciklički operator C definisan sa

$$\mathrm{C}f(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{m+n}, x_1),$$

gde je f proizvoljna funkcija.

U pomenutom radu posmatrana je jednačina

$$\sum_{i=1}^{m+n} \mathrm{C}^{i-1} F_i\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+n}) = 0, \tag{2.1}$$

gde su m i n $(m+n>2)$ prirodni brojevi, x_i realne nezavisno promenljive i F_i nepoznate realne funkcije i dokazana je sledeća teorema.

T e o r e m a 4. *Opšte neprekidno rešenje jednačine* (2.1) *dato je sa*

$$\begin{aligned} F_i\,(x, y) &= (nx - my) f\,(x+y) + g_i\,(x+y) \quad (i = 1, 2, \ldots, m+n-1), \\ F_{m+n}\,(x, y) &= (nx - my) f\,(x+y) - \sum_{i=1}^{m+n-1} g_i\,(x+y), \end{aligned} \tag{2.2}$$

gde su f i g_i $(i = 1, 2, \ldots, m+n-1)$ proizvoljne neprekidne funkcije.

Primetimo da iz teoreme 4 možemo neposredno dobiti i opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine

$$\sum_{i=1}^{m+n} \mathrm{C}^{i-1} F\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_m, x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+n}) = 0, \tag{2.3}$$

koja se iz (2.1) dobija stavljajući $F_1 = F_2 = \ldots = F_{m+n} = F$. (U opštem slučaju to ne mora biti tačno).

Zaista, ako iskoristimo (2.2), dobijamo

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_{m+n-1} = -\sum_{i=1}^{m+n-1} g_i = -(m+n-1)\,g_1 = 0.$$

Dakle, opšte neprekidno rešenje jednačine (2.3) dato je sa

$$F(x, y) = (nx - my) f(x + y), \tag{2.4}$$

gde je f proizvoljna neprekidna funkcija.

3. Rešenje druge klase funkcionalnih jednačina

U članku [5] rešena je jednačina koja generališe jednačinu (2.3). Neka je ciklični operator C definisan sa

$$Cf(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+p}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{m+n+p}, x_1),$$

gde je f proizvoljna funkcija. Posmatrana jednačina glasi

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1} F(x_1 + \ldots + x_m, x_{m+1} + \ldots + x_{m+n}, x_{m+n+1} + \ldots + x_{m+n+p}) = 0, \tag{3.1}$$

gde su m, n, p prirodni brojevi, x_i realne nezavisno promenljive i F nepoznata realna funkcija.

U radu je dokazana sledeća teorema.

T e o r e m a 5. *Opšte neprekidno rešenje funkcionalne jednačine* (3.1) *dato je sa*

1° $$F(x, y, z) = \left(x - m \frac{x+y+z}{m+n+p}\right) f(x+y+z) + \left(y - n \frac{x+y+z}{m+n+p}\right) g(x+y+z),$$

za $m, n < p,\ m \neq n,\ m+n \neq p;$

2° $$F(x, y, z) = f\left(x + y - p \frac{x+y+z}{m+n+p},\ x+y+z\right)$$
$$- f\left(-x - y + p \frac{x+y+z}{m+n+p}, x+y+z\right) + \left(x - m \frac{x+y+z}{m+n+p}\right) g(x+y+z),$$

za $m, n < p,\ m \neq n,\ m+n = p;$

3° $$F(x, y, z) = f\left[x + y - (m+n) \frac{x+y+z}{m+n+p}, x+y+z\right]$$
$$- f\left(-y + n \frac{x+y+z}{m+n+p}, x+y+z\right) + \left(y - n \frac{x+y+z}{m+n+p}\right) g(x+y+z),$$

za $m < n = p;$

4° $$F(x, y, z) = f\left[x + y - (m+n) \frac{x+y+z}{m+n+p}, x+y+z\right]$$
$$- f\left(-x + m \frac{x+y+z}{m+n+p}, x+y+z\right) + \left(x - m \frac{x+y+z}{m+n+p}\right) g(x+y+z),$$

za $n < m = p;$

5° $F(x, y, z)=f\left(x-m\frac{x+y+z}{m+n+p}, x+y+z\right)$

$$-f\left(y-n\frac{x+y+z}{m+n+p}, x+y+z\right)+\left(x-m\frac{x+y+z}{m+n+p}\right)g(x+y+z),$$

za $2m=2n\neq p$;

6° $F(x, y, z)=f(x, y+z)-f(y, z+x)+g(x+y, z)-g(z, x+y)$,

za $2m=2n=p$,

7° $F(x, y, z)=f(x, y, z)-f(y, z, x)$, za $m=n=p$;

gde su f i g proizvoljne neprekidne funkcije.

Primetimo da su teoremom obuhvaćeni samo slučajevi kada je $p=max(m, n, p)$ dok se svi ostali slučajevi, kao što je to u članku pokazano svode na posmatrane.

Iz teoreme 2.2 i rezultata iz članka [2] sleduje da su rešenja koja su navedena u slučajevima 6° i 7° poslednje teoreme opšta ako se pretpostavi samo da su f i g proizvoljne funkcije. Taj rezultat je dobijen i u članku [5].

4. Još jedna klasa funkcionalnih jednačina

Za proizvoljnu funkciju f stavimo

$$Cf(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n+p})=f(x_2, x_3, \ldots, x_{n.+n+p}, x_1).$$

Posmatraćemo funkcionalnu jednačinu

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1}F(x_1+x_2+\ldots+x_m, x_{m+1}+x_{m+2}+\ldots+x_{m+n})=0, \tag{4.1}$$

gde su m, n, p prirodni brojevi. Ova jednačina je, u izvesnom smislu, generalizacija jednačine (2.3) i specijalni slučaj jednačine (3.1). Za ovu jednačinu odredićemo ne samo neprekidno već i opšte rešenje, što onemogućava da iskoristimo rezultate prethodnog paragrafa.

T e o r e m a 6. *Opšte rešenje jednačine* (4.1) *je funkcija*

$$F(x,y)=\varphi(nx-my) \qquad (n\neq m); \tag{4.2}$$

$$F(x,y)=\psi(x)-\psi(y) \qquad (n=m), \tag{4.3}$$

gde je φ proizvoljno rešenje Cauchyeve jednačine (1.7) *a ψ proizvoljna funkcija.*

Dokaz. Stavljajući $x_i=0$ $(i=1, 2, \ldots, m+n+p)$ iz (4.1) dobijamo $F(0, 0)=0$. Na osnovu toga, stavljajući $x_1=x$, $x_i=0$ $(i=2, 3, \ldots, m+n+p)$ iz (4.1) izlazi $mF(x, 0)+nF(0, x)=0$, tj.

$$F(0,x)=-\frac{m}{n}F(x, 0). \tag{4.4}$$

Ako u jednačini (4.1) stavimo $x_1=x, x_2=y, x_i=0$ $(i=3, 4, \ldots, m+n+p)$, dobićemo

$$(m-1)\,F(x+y, 0)+F(x, y)+(n-1)\,F(0, x+y)+F(0, x)+F(y, 0)=0,$$

tj. prema (4.4)

$$F(x, y)=\left(1-\frac{m}{n}\right)F(x+y, 0)+\frac{m}{n}F(x, 0)-F(y, 0). \tag{4.5}$$

Ako stavimo $F(x, 0)=f(x)$, prethodna relacija će glasiti

$$F(x, y)=\left(1-\frac{m}{n}\right)f(x+y)+\frac{m}{n}f(x)-f(y). \tag{4.5 bis}$$

Na osnovu toga jednačina (4.1) postaje

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{m}{n}\right)\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1}\, f(x_1+x_2+\ldots+x_{m+n})&\\ +\frac{m}{n}\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1}\, f(x_1+x_2+\ldots+x_m)&\\ =\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1}\, f(x_{m+1}+x_{m+2}+\ldots+x_{m+n})&.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Ako je $m=n$, jednačina (4.6) je identički zadovoljena, pa funkcija f može biti proizvoljna. Iz (4.5 bis) tada izlazi (4.3). Obrnuto nije teško proveriti.

Ako je $m\neq n$, dokazaćemo da iz (4.6) sleduje da funkcija f zadovoljava Cauchyevu jednačinu (1.7).

Zaista, stavljajući u (4.6)

1° $x_1=x,\ x_{m+1}=y,\ x_i=0\ (i\neq 1, m+1)$ $(p\geqslant m>n)$;

2° $x_m=x,\ x_{m+n}=y,\ x_i=0\ (i\neq m,\ m+n)$ $(p\geqslant n>m)$;

3° $x_1=x,\ x_{m+1}=y,\ x_i=0\ (i\neq 1, m+1)$ $(m>p, n;\ p+n\geqslant m)$;

4° $x_1=x,\ x_{m+1}=y,\ x_i=0\ (i\neq 1, m+1)$ $(m>p, n;\ p+n<m)$;

5° $x_m=x,\ x_{m+n}=y,\ x_i=0\ (i\neq m,\ m+n)$ $(n>p, m;\ p+m\geqslant n)$;

6° $x_m=x,\ x_{m+n}=y,\ x_i=0\ (i\neq m,\ m+n)$ $(n>p, m;\ p+m<n)$;

dobijaju se respektivno jednačine

1° $$\left(1-\frac{m}{n}\right)[nf(x+y)+mf(x)+mf(y)] +\frac{m}{n}[mf(x)+mf(y)]=nf(x)+nf(y);$$

2° $$\left(1-\frac{m}{n}\right)[mf(x+y)+nf(x)+nf(y)] +\frac{m}{n}[mf(x)+mf(y)]=nf(x)+nf(y);$$

$$3^\circ \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)[m+n-p)f(x+y)+pf(x)+pf(y)]$$

$$+\frac{m}{n}[mf(x)+mf(y)]=nf(x)+nf(y);$$

$$4^\circ \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)[(m+n-p)f(x+y)+pf(x)+pf(y)]+\frac{m}{n}[(n+p)f(x)$$

$$+(n+p)f(y)+(m-n-p)f(x+y)]=nf(x)+nf(y);$$

5° (jednačina 3°);

$$6^\circ \quad \left(1-\frac{m}{n}\right)[(m+n-p)f(x+y)+pf(x)+pf(y)]+\frac{m}{n}[mf(x)+mf(y)]$$

$$=(m+p)f(x)+(m+p)f(y)+(n-m-p)f(x+y).$$

Sve ove jednačine se svode, posle sređivanja, na Cauchyevu jednačinu

$$f(x+y)=f(x)+f(y). \tag{1.7}$$

Koristeći jednačinu (1.7) i stavljajući $f(x)=n\varphi(x)$, formula (4.5 bis) dobija oblik (4.2). Obrnuto, tj. da svaka funkcija oblika (4.2), gde je φ rešenje jednačine (1.7), zadovoljava jednačinu (4.1), neposredno se proverava. Kako slučajevi 1°—6° obuhvataju sve mogućnosti pri kojima je $m\neq n$, teorema je dokazana.

Posledica. *Opšte neprekidno rešenje jednačine* (4.1) *je funkcija*

$$F(x,y)=c(nx-my) \qquad (n\neq m); \tag{4.7}$$

$$F(x,y)=\psi(x)-\psi(y) \qquad (n=m), \tag{4.8}$$

gde je c proizvoljna konstanta a ψ proizvoljna neprekidna funkcija.

5. Jednačina

$$F_1(x_1+x_2,x_3)+F_2(x_2+x_3,x_4)+F_3(x_3+x_4,x_1)+F_4(x_4+x_1,x_2)=0$$

Neka je C operator definisan u prethodnom paragrafu. Funkcionalna jednačina

$$\sum_{i=1}^{m+n+p} C^{i-1}\, F_i(x_1+x_2+\ldots+x_m,\, x_{m+1}+x_{m+2}+\ldots+x_{m+n})=0, \tag{5.1}$$

$(m,n,p\in N)$, gde su F_i nepoznate funkcije, generališe jednačinu (2.1) u istom smislu kao što i jednačina (4.1) generališe jednačinu (2.3).

U ovom paragrafu mi ćemo rešiti jednačinu (5.1) u slučaju kada je $m=2$, $n=p=1$, pod pretpostavkom da su funkcije F_i neprekidne. Opšti slučaj je vrlo komplikovan.

Teorema 7. *Ako su realne funkcije F_i $(i=1,2,3,4)$ neprekidne i ako je*

$$F_1(x_1+x_2,x_3)+F_2(x_2+x_3,x_4)+F_3(x_3+x_4,x_1)+F_4(x_4+x_1,x_2)=0, \tag{5.2}$$

funkcije F_i $(i=1,2,3,4)$ mogu se predstaviti u obliku

$$
(5.3)\qquad \begin{aligned}
&F_1(x,y)=ax^2+(a-\alpha)y^2-2\alpha xy+bx+cy+p,\\
&F_2(x,y)=\alpha x^2+(a+\alpha)y^2+2axy+\beta x+\gamma y+q,\\
&F_3(x,y)=-ax^2-(a-\alpha)y^2+2\alpha xy-(c+\beta)x+(\gamma-\beta-b-c)y+r,\\
&F_4(x,y)=-\alpha x^2-(a+\alpha)y^2-2axy+(c+\beta-\gamma)x-(b+\beta)y-p-q-r,
\end{aligned}
$$

gde su a, b, c, α, β, γ, p, q, r konstante. Obrnuto, pri proizvoljnim vrednostima ovih konstanata, funkcije F_i, definisane sa (5.3) *zadovoljavaju jednačinu* (5.2).

Dokaz. Obrnuto tvrđenje može se proveriti zamenom funkcija F_i iz (5.3) u (5.2), na čemu se nećemo zadržavati. Treba još dokazati da iz (5.2) sleduje (5.3).

Stavljajući $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=x_4=0$, jednačina (5.2) daje

$$
(5.4)\qquad F_4(x,y)=-F_1(x+y,0)-F_2(y,0)-F_3(0,x).
$$

Na osnovu toga (5.2) će glasiti

$$
(5.5)\qquad \begin{aligned}
&F_1(x_1+x_2,x_3)+F_2(x_2+x_3,x_4)+F_3(x_3+x_4,x_1)\\
&\quad=F_1(x_4+x_1+x_2,0)+F_2(x_2,0)+F_3(0,x_4+x_1).
\end{aligned}
$$

Stavljajući ovde $x_3=x$, $x_4=y$, $x_1=x_2=0$, dobijamo

$$
(5.6)\qquad F_2(x,y)=-F_1(0,x)-F_3(x+y,0)+F_1(y,0)+F_3(0,y)+F_2(0,0).
$$

Eliminacijom funkcije F_2 iz (5.5) i (5.6), dolazi se do jednakosti

$$
(5.7)\qquad \begin{aligned}
&F_1(x_1+x_2,x_3)+F_3(x_3+x_4,x_1)+F_1(x_4,0)+F_3(0,y)+F_2(0,0)\\
&\quad=F_1(x_4+x_1+x_2,0)+F_3(x_2+x_3+x_4,0)+F_1(0,x_2+x_3)\\
&\qquad+F_3(0,x_4+x_1)+F_1(0,0)+F_3(0,0).
\end{aligned}
$$

Odavde za $x_2=x$, $x_3=y$, $x_1=x_4=0$ odnosno $x_4=x$, $x_1=y$, $x_2=x_3=0$, imamo respektivno jednakosti

$$
(5.8)\qquad \begin{aligned}
F_1(x,y)=&F_1(0,x+y)+F_3(x+y,0)+F_1(x,0)-F_1(0,x)\\
&-F_3(x,0)-F_3(y,0)+F_3(0,0),
\end{aligned}
$$

$$
(5.9)\qquad \begin{aligned}
F_3(x,y)=&F_3(0,x+y)+F_1(x+y,0)+F_3(x,0)-F_3(0,x)\\
&-F_1(x,0)-F_1(y,0)+F_1(0,0).
\end{aligned}
$$

Uvodeći notacije

$$
\begin{aligned}
&F_1(x,0)=f_1(x),\ F_1(0,x)=f_2(x),\\
&F_3(x,0)=g_1(x),\ F_3(0,x)=g_2(x),\\
&p=F_1(0,0)=f_1(0)=f_2(0),\\
&r=F_3(0,0)=g_1(0)=g_2(0),
\end{aligned}
$$

jednakosti (5.8) i (5.9) postaju

(5.8 bis) $F_1(x, y) = f_2(x+y) + g_1(x+y) + f_1(x) - f_2(x) - g_1(x) - g_1(y) + r,$

(5.9 bis) $F_3(x, y) = g_2(x+y) + f_1(x+y) + g_1(x) - g_2(x) - f_1(x) - f_1(y) + p.$

Zamenom u (5.7) i sređivanjem dolazi se do jednačine

$$\begin{aligned}(5.10)\quad & f_1(x_3+x_4+x_1) - f_1(x_4+x_1+x_2) + f_1(x_1+x_2) - f_1(x_3+x_4) + f_1(x_4) - f_1(x_1)\\ & + g_1(x_1+x_2+x_3) - g_1(x_2+x_3+x_4) + g_1(x_3+x_4) - g_1(x_1+x_2) + g_1(x_2) - g_1(x_3)\\ & + f_2(x_1+x_2+x_3) - f_2(x_1+x_2) - f_2(x_2+x_3) + f_2(x_2)\\ & + g_2(x_3+x_4+x_1) - g_2(x_3+x_4) - g_2(x_4+x_1) + g_2(x_4) = 0.\end{aligned}$$

Za $x_1 = x$, $x_3 = y$, $x_2 = x_4 = 0$, odavde se dobija

$$\begin{aligned} & f_1(x+y) - f_1(x) - f_1(y) + p\\ & + g_1(x+y) - g_1(x) - g_1(y) + r\\ & + f_2(x+y) - f_2(x) - f_2(y) + p\\ & + g_2(x+y) - g_2(x) - g_2(y) + r = 0.\end{aligned}$$

Dakle, funkcija $f_1(x) + g_1(x) + f_2(x) + g_2(x) - 2p - 2r$ zadovoljava Cauchy-evu jednačinu (1.7), odakle sleduje

$$(5.11)\qquad f_1(x) + g_1(x) + f_2(x) + g_2(x) - 2p - 2r = C_1 x \quad (C_1 = \text{const}),$$

jer su funkcije f_1, f_2, g_1, g_2 po pretpostavci neprekidne. Eliminacijom funkcije g_2 iz (5.11) i (5.10), dolazimo do jednačine:

$$\begin{aligned}(5.12)\quad & f_1(x_1+x_2) + f_1(x_2+x_4) - f_1(x_4+x_1+x_2) - f_1(x_1)\\ & + g_1(x_1+x_2+x_3) - g_1(x_1+x_2) + g_1(x_4+x_1) + 2g_1(x_3+x_4)\\ & - g_1(x_2+x_3+x_4) - g_1(x_3+x_4+x_1) + g_1(x_2) - g_1(x_3) - g_1(x_4)\\ & + f_2(x_1+x_2+x_3) - f_2(x_1+x_2) - f_2(x_2+x_3) + f_2(x_2)\\ & - f_2(x_3+x_4+x_1) + f_2(x_3+x_4) + f_2(x_4+x_1) - f_2(x_4) = 0.\end{aligned}$$

Zamenom $x_2 = x$, $x_4 = y$, $x_1 = x_3 = 0$ nalazimo

$$\begin{aligned} & f_1(x) + f_1(y) - f_1(x+y) - p\\ & + g_1(x) + g_1(y) - g_1(x+y) - r = 0,\end{aligned}$$

odakle sleduje

$$(5.13)\qquad f_1(x) + g_1(x) - p - r = C_2 x \quad (C_2 = \text{const}).$$

Elimniacijom funkcije g_1 iz (5.12) i (5.13), dobija se

$$\begin{aligned}(5.14)\quad & f_1(x_2+x_3+x_4) + f_1(x_3+x_4+x_1) - f_1(x_1+x_2+x_3) - f_1(x_4+x_1+x_2)\\ & + 2f_1(x_1+x_2) - 2f_1(x_3+x_4) - f_1(x_1) - f_1(x_2) + f_1(x_3) + f_1(x_4)\\ & + f_2(x_1+x_2+x_3) - f_2(x_3+x_4+x_1) + f_2(x_3+x_4) + f_2(x_4+x_1)\\ & - f_2(x_1+x_2) - f_2(x_2+x_3) + f_2(x_2) - f_2(x_4) = 0.\end{aligned}$$

Stavljajući ovde $x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=0$, dolazimo do jednakosti

$$-f_1(x+y+z)+f_1(y+z)+f_1(z+x)+f_1(x+y)-f_1(x)-f_1(y)-f_1(z)+f_1(0)$$
$$+f_2(x+y+z)-f_2(y+z)-f_2(z+x)-f_2(x+y)+f_2(x)+f_2(y)+f_2(z)-f_2(0)=0.$$

Dakle, funkcija f_2-f_1 zadovoljava Fréchetovu funkcionalnu jednačinu (videti [6])

(5.15) $$f(x+y+z)-f(y+z)-f(z+x)-f(x+y)+f(x)+f(y)+f(z)-f(0)=0.$$

Kako je opšte neprekidno rešenje ove jednačine polinom drugog stepena i kako je $f_1(0)=f_2(0)=p$, zaključujemo da je

(5.16) $$f_2(x)-f_1(x)=Ax^2+Bx \qquad (A,\ B=\text{const}).$$

Eliminacijom funkcije f_2 iz (5.14) i (5.16), dobijamo sledeću funkcionalnu jednačinu

(5.17) $$f_1(x_2+x_3+x_4)+f_1(x_3+x_4+x_1)-f_1(x_4+x_1+x_2)+f_1(x_1+x_2)$$
$$-2f_1(x_3+x_4)-f_1(x_3+x_1)-f_1(x_2+x_3)+2f_1(x_3)+f_1(x_4)-p=0.$$

Za $x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=0,\ x_4=z$, iz (5.17) sleduje

$$f_1(x+y+z)-f_1(y+z)-f_1(z+x)-f_1(x+y)+f_1(x)+f_1(y)+f_1(z)-f_1(0)=0,$$

tj. funkcija f_1 zadovoljava Fréchetovu jednačinu (5.15). Prema tome, postoji relacija

(5.18) $$f_1(x)=Cx^2+Dx+p \qquad (C,\ D=\text{const}).$$

Iz (5.16), (5.13) i (5.11) redom izlazi

(5.19) $$f_2(x)=(A+C)\,x^2+(B+D)\,x+p,$$

(5.20) $$g_1(x)=-Cx^2+(C_2-D)\,x+r,$$

(5.21) $$g_2(x)=-(A+C)\,x^2+(C_1-C_2-B-D)x+r.$$

Stavljajući

$$A=-\alpha,\ B=c-b,\ C=a,\ D=b,\ C=\gamma-2\beta-c,\ C_2=b-c-\beta,$$

prethodne četiri formule postaju

(5.18 bis) $$f_1(x)=ax^2+bx+p,$$

(5.19 bis) $$f_2(x)=(a-\alpha)\,x^2+cx+p,$$

(5.20 bis) $$g_1(x)=-ax^2-(c+\beta)\,x+r,$$

(5.21 bis) $$g_2(x)=-(a-\alpha)\,x^2+(\gamma-\beta-b-c)\,x+r.$$

Unoseći ove izraze za funkcije f_1, f_2, g_1, g_2 u (5.8 bis) i (5.9 bis) dobijaju se prva i treća od formula (5.3). Zamenjujući F_1 i F_3 iz (5.3) u (5.6) i označavajući $F_2(0,0)$ sa q dobija se druga formula (5.3). Konačno, iz (5.4) izlazi i poslednja formula (5.3).

Ovim je teorema 7 dokazana.

LITERATURA

[1] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel 1961.

[2] J. Aczél — M. Ghermănescu — M. Hosszú: *On cyclic equations*, Publications of the Mathematical Institut of the Hungarian Academy of Sciences, vol. 5, series A, fasc. 1—2, 1960, p. 215—221.

[3] D. Ž. Đoković: *Sur une équation fonctionnelle*, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université de Belgrade, série: Mathématiques et Physique, No. 50, 1961, p. 15—16.

[4] D. Ž. Đoković: *Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy*, Publications de la Faculté d'Electrotechnique de l'Université de Belgrade, série: Mathématiques et Physique, No. 63, 1961, p. 21—28.

[5] D. Ž. Đoković: *Rešenje jedne ciklične funkcionalne jednačine*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, vol, 13, 1961, p. 185—198.

[6] M. Fréchet: *Une définition fonctionnelle des polynômes*, Nouvelles annales de Mathématiques, quatrième série, t. 9, 1909, p. 145—162.

[7] M. Hosszú: *A lineáris függvényegyenletek egy osztályáról*, A Magyar Tudományos Akadémia matematikai és fizikai tudományok osztályának Közleményei, t. 11, No. 3, p. 249—261.

[8] D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković: *Sur une classe d'équations fonctionnelles cycliques*, Comptes Rendus, Paris, t. 252, 1961, p. 1090—1092.

[9] S. Prešić — D. Ž. Đoković: *Sur une équation fonctionnelle*, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. P. de Serbie, vol. 13, 1961, p. 149—152.

[10] *Izabrana poglavlja iz matematike* II, Beograd 1962, str. 5—23.

Resumé

SUR CERTAINES CLASSES DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES CYCLIQUES

Dragomir Ž. Djoković

Ce travail qui présente la thèse de doctorat contient trois parties:

I partie — Généralisation d'un résultat obtenu par Aczél, Ghermănescu et Hosszú;

II partie — L'équation fonctionnelle

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) - F(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}, x_1) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n \cdot x_{n+1});$$

III partie — Résolution de certaines classes d'équations fonctionnelles dans le domaine réel.

I

Dans la première partie, j'ai trouvé la solution de l'équation (1.1) et de l'équation (1.2) sous les hypothèses suivantes

1° $x_i \in S$ où S est un ensemble non vide quelconque;

2° des fonctions inconnues F et F_i prennent des valeurs dans un groupe abélien additif M;

3° $n \geqslant 2p-1$.

L'équation (1.1), pour $n \geqslant p$, a été résolue (1960) par J. Aczél, M. Ghermănescu et M. Hosszú dans leur article [2] „On cyclic equations". Ils ont trouvé la solution générale mais avec l'hypothèse supplémentaire:

4° l'équation $mX = A\,(X, A \in M;\, m \in N)$ possède une solution unique $X = A/m$ pour chaque $m \leqslant n$.

Les résultats de l'article [2] a généralisé M. Hosszú dans son travail [7], oú il n'a pas affaibli des hypothèses, mais il donne la généralisation dans un autre sens, en modifiant l'équation (1.1).

La démonstration donnée ici, pour le cas $n \geqslant 2p-1$, est plus simple de celle qu'on trouve dans [2].

L'équation (1.2) est une généralisation naturelle de l'équation (1.1) et sa solution générale pour $n \geqslant 2p-1$ est déterminée par la même méthode.

La question suivante reste ouverte: Peut-on trouver la solution générale des équations (1.1) et (1.2) si $p < n < 2p-1$ sans admettre l'hypothèse 4°?

II

Dans la deuxième partie, j'ai considéré l'équation fonctionnelle (2.1) en supposant que:

1° $x_i \in S$ où S est un semigroupe par rapport à l'opération binaire interne „·" possedant l'élément neutre $e\,(\in S)$;

2° les fonctions inconnues F et f prennent des valeurs dans un groupe abélien additif M dans lequel l'équation $(n+1)\,X = A\ (A \in M)$ possède une solution unique dénotée par $X = A/(n+1)$.

On peut montrer que la dernière hypothèse implique que l'équation

$$m^k X = A \qquad (m \mid n+1;\ k \in N)$$

possède aussi une solution unique pour chaque $A \in M$.

Par élimination de la fonction F, l'équation (2.1) se ramène à l'équation (2.2). C'est précisément l'équation fonctionnelle considérée par D. S. Mitrinović et moi dans l'article [8]. Dans cet article on a trouvé certaines solutions de l'équation (2.2) mais dans le cas général on n'a pas démontré que toute solution de (2.2) est contenue dans la solution indiquée. Dans l'article [3] j'ai démontré que la solution indiquée dans [8], pour le cas $n = 3$, est la plus générale.

Ici j'ai continué mon travail sur la recherche du caractère des solutions de l'équation (2.2) qui sont indiquées dans [8]. J'ai démontré que ces solutions sont les plus générales aussi dans les cas $n = 5$ et $n = 7$.

Cela m'a suggéré de supposer que ces solutions sont générales pour chaque n impair. Encore toujours il n'est pas connu si cette hypothèse est vraie.

Étant donné que les hypothèses concernant les ensembles S et M sont très générales, les démonstrations sont élémentaires mais très longues. Pour simplifier ces démonstrations j'ai introduit une relation d'équivalence $\sim$ dans l'ensemble des fonctions $E = \{f : S^n \to M\}$. J'ai écrit $g \sim h\ (g, h \in E)$ si et seulement si la fonction $g - h$ a la forme suivante

$$\begin{aligned} g\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) &- h\,(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\ &= f_1\,(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}, t_{n-1} \cdot t_n) - f_1\,(t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n \cdot t_1)\,. \end{aligned}$$

$$+\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\{f_\nu(t_1,t_2,\ \ldots,\ t_{n-\nu}\cdot t_{n-\nu+1},t_{n-\nu+2},\ \ldots,\ t_{n-1},t_n)$$

$$-f_\nu(t_{\nu+1},t_{\nu+2},\ \ldots,\ t_n,t_1,t_2,\ \ldots,\ t_{\nu-2},t_{\nu-1}\cdot t_\nu)\},$$

où f_i sont des fonctions convenablement choisies. Dans le même but, au lieu de $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \cdot x_8)$ j'ai écrit simplement 1234567 · 8 et similairement dans les autres cas. En d'autres termes, je n'ai écrit que les indices des variables et le signe „·" de l'opération binaire.

III

Dans la troisième partie, j'ai considéré plusieurs classes d'équations fonctionnelles dans le domaine réel. Ce sont les équations (3.1), (3.1 bis), (3.2), (3.3) et (3.4). Dans ces équations la lettre C désigne l'opérateur cyclique de période $m+n+p$ défini par

$$Cf(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_{m+n+p}) = f(x_2, x_3,\ \ldots,\ x_{m+n+p}, x_1),$$

où f est une fonction arbitraire.

L'équation (3.1) est un cas spécial de l'équation (2.1) de la deuxième partie (on a dans ce cas $S=M=R$ et l'opération „·" est l'addition ordinaire). Cette équation se ramène à l'équation (3.1 bis). Dans l'article [4] j'ai résolu l'équation (3.1 bis) sous l'hypothèse que la fonction f soit continue. En utilisant la solution générale de l'équation de Cauchy, j'ai formé les solutions générales des équations (3.1) et (3.1 bis). J'ai résolu l'équation (3.2) dans [5] sous l'hypothèse que F soit continue.

Les équations fonctionnelles (3.3) et (3.4) apparaissent ici pour la première fois. La premère se ramène à l'équation de Cauchy et l'on trouve sa solution générale. L'équation (3.4) est plus compliquée. J'ai considéré seulement un cas particulier de l'équation (3.4), à savoir $m=2$, $n=p=1$. En supposant que les fonctions $F_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ soient continues, j'ai trouvé la solution générale de cette équation. Toutes ces fonctions sont des polynômes du second degré de deux variables indépendantes, dont les coefficients satisfont à certaines conditions.

*

À la fin, je veux dire que le professeur D. S. Mitrinović m'a initié aux recherches mathématiques et en particulier dans les problèmes des équations fonctionnelles. Il a discuté avec moi le plan de cette thèse, il a lu le manuscript et il m'a donné plusieurs suggestions grâce auxquelles le texte d'une première rédaction est remarquablement amélioré.