PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 112 (1963)

SKALARNA INVARIJANTA U TETRAEDARSKIM KOORDINATAMA

Borislav Lilić

1. Bibliografske napomene.— Skalarna invarijanta izražena u tetraedarskim koordinatama nalazi se u Apelovom kursu. Njen izraz, pak, nije tu izvođen, nego je dat kao gotov rezultat jednog vežbanja [1].

Navodeći taj izraz, I. Arnovljević ga je izveo u jednom svom članku [2]. Isto izvođenje I. Arnovljević je ponovio i u svome kursu [3]. A u poslednjem izdanju svoga kursa I. Arnovljević zamenjuje takvo izvođenje jednim znatno skraćenim [4].

Oba izvođenja I. Arnovljevića, međutim, imaju bitnije nedostatke. Naime, kod prvog izvođenja, polazi se od Šalove teoreme, koja ne stoji u neposrednijoj vezi sa traženim izrazom, pa se zato ide veoma zaobilaznim putem, uz zametno analitičko-geometrijsko računanje. Drugo izvođenje, opet, iako je nastojalo da se osloni na blisku i pogodnu Mebijusovu teoremu, nije propraćeno neophodnim obrazloženjima, tako da je ostalo i nejasno.

— U ovoj raspravi autor postavlja sebi cilj da izraz za skalarnu invarijantu u tetraedarskim koordinatama izvede na osnovu Mebijusove teoreme elegantno i korekno.

2. Podsećanja na Šalovu i Mebijusovu teoremu.— Za jedan proizvoljan sistem vektora $\vec{v}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ vezanih za prave neka je, u pogledu na izabran pravougli trijedar osa $Oxyz$, glavni vektor $\vec{R}\,(R_x, R_y, R_z)$ i glavni momenat $\vec{M}^0\,(M_x, M_y, M_z)$. Tada skalarna invarijanta ima za izraz

$$I=\vec{R}\cdot\vec{M}^0=R_xM_x+R_yM_y+R_zM_z. \tag{1}$$

— Skalarna invarijanta poseduje važno geometrijsko značenje. Naime, sistem vezanih vektora može se uopšte redukovati na dva vektora, takozvani vektorski krst, i to na beskonačno mnogo načina. Pri tome, za takve razne vektorske krstove vredi

Šalova (Chasles) teorema. *Uzajamni momenat svakog od vektorskih krstova zadržava invarijantnu vrednost, jednaku skalarnoj invarijanti I.*

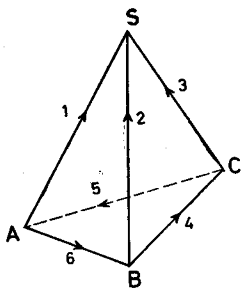
Uzajamni momenat vektorskog krsta, pak, brojno je jednak šestostrukoj algebarskoj vrednosti zapremine tetraedra konstruisanog nad vektorima krsta kao naspramnim ivicama. Iz Šalove teoreme se onda zaključuje da skalarna invarijanta geometrijski predstavlja šestostruku zapreminu tetraedra konstruisanog nad bilo kojim redukcionim krstom.

— No, umesto da se skalarna invarijanta povezuje sa postupkom redukovanja na vektorski krst, može joj se dati neposredno geometrijsko tumačenje na samom posmatranom sistemu vezanih vektora. Takvu mogućnost upravo pruža

Mebijusova (Möbius) teorema. *Uzajamni momenat redukcionog krsta jednak je zbiru uzajamnih momenata svih vektora sistema, kombinovanih po dva i dva.*

Saobrazno tome, skalarna invarijanta I jednaka je šestostrukom algebarskom zbiru zapremina tetraedara dobijenih kombinovanjem po dva i dva vektora posmatranog sistema. Jasno je da će, sa n vektora u sistemu, ukupan broj tetraedara iznositi $\binom{n}{2}$.

3. Izražavanje skalarne invarijante u tetraedarskim koordinatama.— Neka je pred nama jedan proizvoljan sistem vezanih vektora $\vec{v}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Izaberimo po volji u prostoru jedan tetraedar $SABC$ (sl. 1), orijentišući mu ivice kako sledi: za tri ivice što izlaze iz temena S tetraedra uzmu se smerovi ka tome temenu, to jest smerovi $\vec{AS}$, $\vec{BS}$, $\vec{CS}$; a ostale tri ivice tetraedrove osnove ABC dobijaju onda smerove pozitivnih rotacija oko naspramnih ivica, to jest smerove $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$.



Sl. 1

Tada se, kao što je poznato, posmatrani sistem vezanih vektora $\vec{v}_i$ daje prevesti na ekvivalentni sistem od šest vektora $\vec{T}_k$ $(k=1, 2, \ldots, 6)$ upravljenih po ivicama izabranog tetraedra $SABC$ (videti, na primer, [4], str. 60). Algebarske vrednosti T_k tih šest tetraedarskih vektora $\vec{T}_k$ ocenjenih po algebarskom znaku u naznačenim smerovima tetraedrovih ivica sačinjavaju takozvane *tetraedarske koordinate* sistema u pogledu na izabrani *koordinatni tetraedar*.

Problem o kome je reč u raspravi sastoji se onda u ovome:

Izraziti skalarnu invarijantu u tetraedarskim koordinatama.

U tome cilju, pođimo od Mebijusove teoreme. Kako smo videli, prema toj teoremi skalarna invarijanta se može izraziti kao algebarski zbir zapremina tetraedara konstruisanih nad tetraedarskim vektorima $\vec{T}_k$, budući da je njihov sistem ekvivalentan zadatom sistemu vektora $\vec{v}_i$. Za sistem od šest vektora $\vec{T}_k$ uopšte bi se dalo konstruisati ukupno $\binom{6}{2}=15$ tetraedara. Ovde, međutim, zbog toga što se sve ivice koordinatnog tetraedra $SABC$ seku, izuzev tri para naspramnih ivica, taj se broj svodi svega na tri. Radi zgodnijeg pisanja, uzmimo da indeksi k kod tetraedarskih koordinata T_k odgovaraju ivicama koordinatnog tetraedra $SABC$ u ovakvom poretku

$$1 \sim AS,\ 2 \sim BS,\ 3 \sim CS,\ 4 \sim BC,\ 5 \sim CA,\ 6 \sim AB;$$

a u vezi sa tim onda označimo algebarske vrednosti zapremina tri tetraedra nad naspramnim tetraedarskim vektorima $\vec{T_j}$, $\vec{T}_{j+3}=\vec{T_j}'$ $(j=1, 2, 3)$ sa $[T_j, T_j']$. Na taj način, skalarna invarijanta dobija izraz

(2) $$I=6\,([T_1, T_4]+[T_2, T_5]+[T_3, T_6])=6\sum_{j=1}^{3}[T_j, T_j'].$$

No, zapremine $[T_j, T_j']$ tri tetraedra nad naspramnim vektorima $\vec{T_k}$ daju se prosto izraziti pomoću zapremine koordinatnog tetraedra $SABC$. Zaista, označivši sa P površinu trougaone osnove ABC a sa h visinu kod tetraedra $SABC$, njegova zapremina će biti $V=\frac{1}{3}Ph$. Označimo još dužine ivica kod koordinatnog tetraedra $SABC$ sa l_k $(k=1, 2, \ldots, 6)$, odnosno, združujući ih naspramno, sa l_j, $l_{j+3}=l_j'$ $(j=1, 2, 3)$. Tada se neposredno uviđa, da će sa promenom dužina naspramnih ivica l_j, l_j' u algebarskim odnosima $\frac{T_j}{l_j}=t_j$, $\frac{T_j'}{l_j'}=t_j'$ zapremina V tetraedra $SABC$ preći na algebarsku vrednost

(3) $$\frac{T_j}{l_j}\,\frac{T_j'}{l_j'}=V t_j\, t_j';$$

jer, zamenjujući dužinu l_j jedne ivice na tetraedrovoj osnovi ABC dužinom brojno jednakom koordinati T_j, površina P te osnove postaje $P\frac{T_j}{l_j}$, a zamenjujući dužinu l_j' naspramne ivice dužinom brojno jednakom koordinati T_j', tetraedrova visina h postaje $h\frac{T_j'}{l_j'}$. Kako, pak, vektori $\vec{T_k}$ leže na ivicama tetraedra $SABC$, to će zapremina $[T_j, T_j']$ nad naspramnim vektorima $\vec{T_j}$, $\vec{T_j}'$ biti upravo jednaka takvoj promenjenoj algebarskoj vrednosti (3) zapremine tetraedra $SABC$:

(4) $$[T_j, T_j']=V\frac{T_j}{l_j}\,\frac{T_j'}{l_j'}=V t_j\, t_j'.$$

Do ove relacije (4) može se doći i brže, kada se iskoristi poznata formula za zapreminu tetraedra $SABC$ $V=\frac{1}{6}l_j\, l_j'\, e_j \sin\alpha_j$, gde je e_j rastojanje naspramnih ivica j, j' a α_j ugao njihovog ukrštanja. Da bi se odredila zapremina $[T_j, T_j']$ tetraedra nad odgovarajućim naspramnim vektorima $\vec{T_j}$, $\vec{T_j}'$, dovoljno je u toj formuli samo zameniti l_j, l_j' sa T_j, T_j', budući da rastojanje e_j i ugao α_j ostaju nepromenjeni.

Naposletku, kada se algebarske vrednosti (4) zapremina triju tetraedara nad naspramnim vektorima $\vec{T_j}$, $\vec{T_j}'$ uvrste u jednačinu (2), za skalarnu invarijantu se dobija ovaj traženi izraz u tetraedarskim koordinatama

(5) $$I=6V\left(\frac{T_1}{l_1}\,\frac{T_4}{l_4}+\frac{T_2}{l_2}\,\frac{T_5}{l_5}+\frac{T_3}{l_3}\,\frac{T_6}{l_6}\right)=6V\sum_{j=1}^{3}\frac{T_j}{l_j}\,\frac{T_j'}{l_j'}=6V\sum_{j=1}^{3}t_j\, t_j'.$$

LITERATURA

[1] P. Appell: *Traité de Mécannique rationelle.* Tome I, chapitre I, exercice 18; Paris, izdanje VI, 1941 god.; str. 55.

[2] I. Arnovljević: *Invarijanta sila izražena u tetraedričnim koordinatama.* Godišnjak Tehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu 1936—1937, str. 1.

[3] I. Arnovljević: *Predavanja iz teorijske mehanike.* Deo II, sveska III; Beograd, 1937, izdanje II; str. 80.

[4] I. Arnovljević: *Osnovi teorijske mehanike.* Beograd, 1949; knjiga V, str. 61.

Резюме

СКАЛЯРНЫЙ ИНВАРИАНТ В ТЕТРАЭДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Б. Лилич

Выражение скалярного инварианта в тетраэдрических координатах находим, без доказательства, в виде результата одного упражнений в учебике Апеля [1]. Проф. Арновлевич дал вывод этого выражения в своей статье [2], а в последнем издании своего курса [4] дал сокращенный вывод этого же выражения; но оба этих вывода не лишены недостатков. В настоящей работе автор выражение скалярного инварианта выводит непосредственно на основании теоремы Мебиуса.

Прежде всего воспроизведены теоремы Шаля и Мебиуса.

Точно также воспроизведено (по рис. 1) определение тетраэдрических координат T_k $(k=1, 2, \ldots, 6)$ для системы связанных векторов $\vec{v}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Затем, на основании теоремы Мебиуса для скалярного инварианта выводится выражение (2), где $[T_j, T_j']$ обозначает алгебраическое значение объема тетраэдра над противоположными тетраэдрическими векторами $\vec{T}_j$, $\vec{T}_j' = \vec{T}_{j+3}$ $(j=1, 2, 3)$. Но, три объема $[T_j, T_j']$ удается привести при помощи объема V координатного тетраэдра $SABC$ к выражениям (4), где $t_j = \frac{T_j}{l_j}$, $t_j' = \frac{T_j'}{l_j'}$, обозначив l_j, $l_j' = l_{j+3}$ длины ребер данного тетраэдра $SABC$. Ползуясь значениями (4), получаем, наконец, искомое выражение (5) скалярного инварианта.