PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 104 (1963)

JEDAN JEDNOSTAVAN POSTUPAK ZA ODREĐIVANJE OSA SIMETRIJE I METRIČKIH ELEMENATA KONUSNIH PRESEKA*

D. S. Mitrinović

(Primljeno 5. februara 1963)

1. Krive sa centrom

Opšti oblik jednačine krivih drugog reda je

(1.1) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

Za krive drugog reda sa centrom je

(1.2) $$\delta\equiv\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}\neq 0.$$

Jednačine

(1.3) $$\begin{aligned} Ax_0+By_0+D&=0,\\ Bx_0+Cy_0+E&=0, \end{aligned}$$

pod uslovom (1.2), imaju jedinstveno rešenje po x_0 i y_0. Tačka $O(x_0, y_0)$ je centar krive (1.1). Ako izvršimo translaciju koordinatnog sistema tako da novi koordinatni početak bude tačka O i označimo koordinate u novom sistemu ponovo sa x i y, jednačina (1.1) dobija oblik

(1.4) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2=F',$$

gde je

(1.5) $$F'=-\frac{\Delta}{\delta}\qquad\left(\Delta=\begin{vmatrix} A & B & D\\ B & C & E\\ D & E & F\end{vmatrix}\right).$$

Ako je $\Delta=0\Rightarrow F'=0$, jednačina (1.1) predstavlja dve prave ili tačku. Zato ćemo pretpostaviti da je $\Delta\neq 0$.

Ako je $B=0$, iz (1.4) mogu se direktno odrediti svi potrebni elementi. Zato ćemo pretpostaviti da je $B\neq 0$.

---

* Ovaj članak redigovao je *D. Ž. Đoković* na osnovu beležaka sa predavanja koja je školske 1952/53 godine držao prof. *D. S. Mitrinović* na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Beogradu.

Dokažimo da se tada jednačini (1.4) može dati oblik

$$\lambda(y-\alpha x)^2+\mu(y-\beta x)^2=1, \tag{1.6}$$

gde je

$$\alpha\beta=-1. \tag{1.7}$$

Upoređivanjem (1.4) i (1.6) dolazimo do skupa jednačina

$$\lambda\alpha^2+\mu\beta^2=A/F', \tag{1.8}$$

$$\lambda\alpha+\mu\beta=-B/F', \tag{1.9}$$

$$\lambda+\mu=C/F'. \tag{1.10}$$

Ako iz jednačina (1.8), (1.9), (1.10) eliminišemo λ i μ, dobijamo

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & A \\ \alpha & \beta & -B \\ 1 & 1 & C \end{vmatrix}=0.$$

Koristeći se jednakošću (1.7) (odakle sleduje $\alpha\neq\beta$), nalazimo jedno za drugim

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha+\beta & A \\ \alpha & 1 & -B \\ 1 & 0 & C \end{vmatrix}=0, \tag{1.11}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha+\beta & A \\ 0 & 1 & -B \\ 1 & 0 & C \end{vmatrix}=0, \tag{1.12}$$

$$\alpha+\beta=-\frac{A-C}{B}=-\varkappa. \tag{1.13}$$

Na osnovu (1.7) i (1.13) zaključujemo da su α i β koreni sledeće kvadratne jednačine po z:

$$z^2+\varkappa z-1=0. \tag{1.14}$$

Koreni ove jednačine su realni i različitog znaka. Dogovorimo se da je

$$\alpha>0, \quad \beta<0. \tag{1.15}$$

Jednačine (1.9) i (1.10) imaju jedinstveno rešenje po λ i μ. Evo tog rešenja

$$\lambda=-\frac{B+C\beta}{F'(\alpha-\beta)}, \quad \mu=\frac{B+C\alpha}{F'(\alpha-\beta)}. \tag{1.16}$$

Odavde sleduje

$$\lambda\mu=\frac{\delta}{(4+\varkappa^2)F'^2}. \tag{1.17}$$

Ovim je dokazano da se jednačini (1.4) zaista može dati oblik (1.6) ako je $\Delta\neq 0$ i $B\neq 0$. Konstante α i β određuju se iz (1.14), a λ i μ iz (1.16).

Rotirajući koordinatni sistem za ugao $\theta=\operatorname{arctg}\alpha$ $(0<\theta<\pi/2)$, jednačina (1.6) postaje

$$\lambda(\alpha^2+1)\xi^2+\mu(\beta^2+1)\eta^2=1, \tag{1.18}$$

gde su ξ i η nove koordinate.

Dakle, prave

(1.19) $$y=\alpha x \text{ i } y=\beta x$$

su ose simetrije krive (1.4).

Na osnovu (1.18), (1.17), (1.10), (1.5) zaključujemo da jednačina (1.1) određuje

1° Elipsu ako je $\delta>0$ i $C\Delta<0$;

2° Hiperbolu ako je $\delta<0$ i $\Delta\neq 0$;

3° Skup dve prave koje se seku ako je $\delta<0$ i $\Delta=0$;

4° Tačku ako je $\delta>0$ i $\Delta=0$.

Jednačina (1.1) nema geometrijskog tumačenja u realnom području ako je $\delta>0$ i $C\Delta>0$.

Iako je ova diskusija izvedena pod pretpostavkom $B\neq 0$, lako se proverava da ona važi i kada je $B=0$.

Kvadrati dužina poluosa krive (1.1) određuju se pomoću formula

(1.20) $$\pm a^2=\frac{1}{\lambda(\alpha^2+1)}, \quad \pm b^2=\frac{1}{\mu(\beta^2+1)}.$$

2. Krive bez centra

Za ove krive je

(2.1) $$\delta\equiv\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=0.$$

Ako je A ili C jednako nuli, tada je $B=0$, pa se neposredno vidi da jednačina (1.1) predstavlja parabolu i mogu se direktno odrediti njena osa, teme i parametar. Zato ćemo pretpostaviti da je $AC\neq 0$.

Stavljajući $C=B^2/A$, jednačini (1.1) možemo dati oblik

(2.2) $$(Ax+By)^2+A(2Dx+2Ey+F)=0.$$

Dalje, umesto (2.2) možemo pisati

(2.3) $$(Ax+By+\lambda)^2=2A(\lambda-D)x+2(B\lambda-AE)y+\lambda^2-AF,$$

gde je λ konstanta koju ćemo odrediti tako da prave

(2.4) $$Ax+By+\lambda=0,$$

(2.5) $$2A(\lambda-D)x+2(B\lambda-AE)y+\lambda^2-AF=0,$$

budu međusobno normalne. Uslov normalnosti ovih pravih glasi

$$A^2(\lambda-D)+B(\lambda B-AE)=0,$$

odakle sleduje

(2.6) $$\lambda=\frac{A(AD+BE)}{A^2+B^2}.$$

Kako su prave (2.4) i (2.5), za ovu vrednost λ, normalne i kako jednačina (2.3) izražava činjenicu da je rastojanje tačke (x,y) od prave (2.5) proporcionalno kvadratu rastojanja iste tačke od prave (2.4), zaključujemo da je (2.3) jednačina parabole.

Osa simetrije ove parabole je prava (2.4), a prava (2.5) je njena tangenta u temenu. Ako je $\lambda^2 - AF > 0$, parabola se nalazi sa one strane prave (2.5) gde je i koordinatni početak; a ako je $\lambda^2 - AF < 0$, sa suprotne strane.

Postoji jedan izuzetak kada su koeficijenti uz x i y u (2.5) jednaki nuli. Ako je $\lambda = D$, biće

$$A^2D + ABE - (A^2 + B^2)D \Rightarrow B(BD - AE) = 0,$$

te jednačina (2.3) postaje

$$(Ax + By + D)^2 = D^2 - AF. \tag{2.7}$$

Dakle, jednačina (1.1) ako je $\delta = 0$ i $B \neq 0$ predstavlja

1^0 Parabolu za $BD - AE \neq 0$;

2^0 Dve paralelne prave za $BD - AE = 0$ i $D^2 - AF > 0$;

3^0 Jednu dvostruku pravu za $BD - AE = 0$ i $D^2 - AF = 0$.

Jednačina (1.1) nema smisla u realnom području za

$$\delta = 0, \ B \neq 0, \quad BD - AE = 0 \text{ i } D^2 - AF < 0.$$

Ako je $B = 0$, ova diskusija ne važi.

U slučaju 1^0 parametar parabole je

$$p = \frac{\sqrt{A^2(\lambda - D)^2 + (B\lambda - AE)^2}}{A^2 + B^2} = \frac{|A(AE - BD)|}{(A^2 + B^2)^{3/2}}. \tag{2.8}$$

3. Primeri

Primer 1. Za krivu

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0 \tag{3.1}$$

imamo

$$\delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -76.$$

Kako je $\delta \neq 0$, kriva ima centar čije su koordinate $x_0 = -5/4$, $y_0 = 3/4$. U ovom slučaju je $\varkappa = 0$, $F' = 19/2$, a jednačina (1.4) glasi

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 = \frac{19}{2}.$$

Konstante α i β određuju se iz jednačine

$$z^2 - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \ \beta = -1.$$

Prema tome, ose simetrije krive (3.1) su prave

$$y - \frac{3}{4} = x + \frac{5}{4}, \quad y - \frac{3}{4} = -\left(x + \frac{5}{4}\right),$$

tj.

$$y - x = 2, \quad y + x = -\frac{1}{2}.$$

Dalje je, prema (1.16), $\lambda = 2/19$, $\mu = 4/19$. Dakle, data kriva je elipsa čije su poluose određene sa

$$a^2 = \frac{19}{4}, \quad b^2 = \frac{19}{8}.$$

Primer 2. Posmatrajmo krivu čija je jednačina

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 - 16x - 12y - 4 = 0. \tag{3.2}$$

Za nju je $\delta = 0$, $BD - AE = 150$. Prema tome, ova kriva je parabola. Na osnovu (2.6) dobijamo $\lambda = 0$. Koristeći (2.4) i (2.5), zaključujemo da je prava

$$9x - 12y = 0, \text{ tj. } 3x = 4y$$

osa simetrije parabole (3.2), a prava

$$4x + 3y + 1 = 0$$

njena tangenta u temenu. Iz (2.8) dobijamo da je parametar ove parabole $p = 2/5$. Kako je $\lambda^2 - AF = 36 > 0$, parabola (3.2) i koordinatni početak nalaze se sa iste strane prave $4x + 3y + 1 = 0$.

4. Primedba

U ovom članku tretirano je jedno klasično poglavlje analitičke geometrije. U literaturi postoji više postupaka koji se odnose na tretirana pitanja. Da li je iznet postupak za krive sa centrom nov, nismo mogli utvrditi, ali je nesumnjivo kratak i jednostavan i može se korisno upotrebiti u nastavi analitičke geometrije.

Za krive bez centra navedeni postupak nije nov, ali ipak tu ima novih detalja. Videti:

A. Geary — H. V. Lowry — H. A. Hayden: *Advanced Mathematics for technical students*, part I, London 1948, p. 213.

*

Prof. *J. Ulčar* (Skoplje) pročitao je ovaj članak u rukopisu i učinio jednu korisnu primedbu koja je uzeta u obzir u definitivnoj redakciji članka.

Résumé

UN SIMPLE PROCÉDÉ POUR LA DÉTERMINATION DES AXES DE SYMÉTRIE ET DES ÉLÉMENTS MÉTRIQUES DES COURBES PLANES DU SECOND DEGRÉ

D. S. Mitrinović

En comparant l'équation (1.4) avec l'équation (1.6) suivie de (1.7), on arrive à un procédé fournissant les équations des axes de symétrie des courbes (1.1) à centre ($AC - B^2 \neq 0$), ainsi que les éléments métriques principaux de ces courbes.

Le procédé correspondant relatif à l'équation (1.1) pour $AC - B^2 = 0$ est également indiqué.

Une traduction en français de cet article méthodique paraîtra dans un journal spécialisé pour l'enseignement des matematiques aux grandes écoles et facultés.