PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 103 (1963)

L'HYPOTHÈSE DE M. A. SCHINZEL SUR LES NOMBRES PREMIERS ET LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

W. Sierpiński

(Reçu le 5 février 1963)

$ak+b$ $(k=1, 2, \ldots)$ étant une progression arithmétique, où a et b sont des nombres naturels donnés, il est facile de trouver la condition nécessaire pour qu'il existe dans cette progression une infinité de paires de termes consécutifs qui sont des nombres premiers. Telle est, comme on le voit sans peine, la condition C qu'on ait $(a, b)=1$ et que le nombre a soit pair. En effet, s'il était $d=(a, b)>1$, les nombres $ak+b$ (où $k=1, 2, \ldots$) seraient tous composés (divisibles par d et plus grands que d), et si le nombre a était impair, la différence de deux termes consécutifs de notre progression serait toujours impaire, et il n'existe même quatre nombres premiers $q_1<q_2<q_3<q_4$ tels que les différences $q_2—q_1$ et $q_3—q_4$ soient impaires.

Il se pose le problème si la condition C est aussi suffisante. Il est impossible, dans l'état actuel de la science, de le démontrer sans faire appel à aucune hypothèse. En effet, dans le cas le plus simple, lorsque $a=2$, $b=1$, l'affirmation que la progression arithmétique $2k+1$ $(k=1, 2, \ldots)$ contient une infinité de paires de termes consécutifs qui sont des nombres premiers, équivant à l'affirmation de l'existence d'une infinité de paires de nombres premiers jumeaux.

Or, je démontrerai qu'il résulte de l'hypothèse H de M. A. Schinzel (énoncée par lui dans les *Acta Arithmetica*, vol. IV, p. 188) que la condition C est suffisante.

En effet, soient a et b deux nombres naturels tels que $(a, b)=1$, a pair (donc b impair). Soit $f(x)=ax+b, F(x)=f(x)\, f(x+1)=(ax+b)(ax+a+b)$. Comme a est pair, b impair et $(a, b)=1$, on trouve $(a+b, a-b)=1$. Supposons qu'il existe un nombre naturel $d>1$ tel que $d \mid F(x)$ quel que soit l'entier x. On aurait donc $d \mid F(0), d \mid F(-1)$, et $d \mid F(1)$. Or, on a $F(0)=b(a+b)$, $F(-1)=(b-a)\, b$, $F(1)=(a+b)(2a+b)$. Comme $d \mid F(0)$ et $d \mid F(-1)$, on aurait $d \mid b(a+b)$ et $d \mid (b-a) b$ et, comme $(a+b, a-b)=1$, il en résulterait que $d \mid b$. Le nombre b étant impair, il serait donc le même pour le nombre d et, comme $d \mid F(1)$, on aurait $d \mid 2a^2$, donc $d \mid a^2$. Or, comme $(a, b)=1$ on a $(a^2, b)=1$ donc $d \mid 1$, contrairement à l'hypothèse que $d>1$.

Nous avons ainsi démontré qu'il n'existe aucun entier $d>1$ tel que $d \mid F(x)$ quel que soit l'entier x.

D'après l'hypothèse H il en résulte qu'il existe une infinité de nombres naturels x, tels que les nombres $f(x)$ et $f(x+1)$ sont premiers. Cela prouve que la condition C est suffisante.

Nous avons ainsi démontré qu'*il résulte de l'hypothèse H de M. A Schinzel que pour que la progressions arithmétique* $ak+b$ $(k=1, 2, \dots)$, *où* a *et* b *sont des nombres naturels, contienne une infinité de paires de termes consécutifs qui sont des nombres premiers, il faut et il suffit qu'on ait* $(a, b)=1$ *et que le nombre* a *soit pair.*

Voici plusieurs paires de nombres premiers qui sont des termes consécutifs dans les progressions suivantes[1]:

$4k+1$:	**13** et **17**,	**37** et **41**,	**97** et **101**,	**109** et **113**,	**193** et **197**;
$4k+3$:	**7** et **11**,	**19** et **23**,	**43** et **47**,	**79** et **83**,	**103** et **107**;
$6k+1$:	7 et 13,	**31** et **37**,	**61** et **67**,	**73** et **79**,	97 et 103;
$6k+5$:	17 et 23,	**23** et **29**,	41 et 47,	**47** et **53**,	**53** et **59**;
$8k+1$:	**89** et **97**,	233 et 241,	**401** et **409**,	**449** et **457**,	569 et 577;
$8k+3$:	3 et 11,	11 et 19,	59 et 67,	131 et 139,	**491** et **499**;
$8k+5$:	29 et 37,	53 et 61,	101 et 109,	149 et 157,	173 et 181;
$8k+7$:	23 et 31,	71 et 79,	191 et 199,	263 et 271,	**359** et **367**;
$10k+1$:	31 et 41,	61 et 71,	**181** et **191**,	**241** et **251**,	271 et 281;
$10k+3$:	3 et 13,	13 et 23,	43 et 53,	73 et 83,	103 et 113;
$10k+7$:	7 et 17,	37 et 47,	97 et 107,	127 et 137,	157 et 167;
$10k+9$:	19 et 29,	79 et 89,	**139** et **149**,	229 et 239,	349 et 359.

Nous démontrerons ici encore le théorème suivant:

Théorème.— *La proposition* P *que toute progression arithmétique* $ak+b$ $(k=1, 2, \dots)$, *où* a *et* b *sont des nombres naturels,* $(a, b)=1$ *et* $2 \mid a$, *contient au moins une paire de termes consécutifs qui sont des nombres premiers, entraîne la proposition* Q *que chacune telle progression contient une infinité de paires de termes consécutifs qui sont des nombres premiers.*

Démonstration.— Admettons que la proposition P est vraie et soit $ak+b$ $(k=1, 2, \dots)$ une progression arithmétique, où a et b sont des nombres naturels, $(a, b)=1$ et $2 \mid a$. Soit m un nombre naturel donné quelconque. Comme $(a, b)=1$ et $2 \mid a$, on a $(a, am+b)=1$ et, d'après la proposition P, la progression arithmétique $ak+am+b$ $(k=1, 2, \dots)$ contient une paire de termes consécutifs, soient ak_0+am+b et $ak_0+a+am+b$, qui sont des nombres premiers. Or, ces deux nombres sont évidemment $> m$ et, comme $ak_0+am+b=a(k_0+m)+b$ et $ak_0+a+am+b=a(k_0+m)+a+b$, la progression arithmétique $ak+b$ $(k=1, 2, \dots)$ contient des paires de termes consécutifs aussi grands que l'on veut qui sont des nombres premiers. Il est ainsi démontré que la proposition P entraîne la proposition Q, c. q. f. d.

D'après une remarque de M. A. Schinzel, de la coséquence C_{13} de son hypothèse H qu'il a publié dans les *Acta Arithmetica*, VII (1961), p. 1, on peut déduire la proposition suivante:

Si a *et* b *sont des nombres naturels,* $(a, b)=1$ *et* $2 \mid a$, *la progression arithmétique* $ak+b$ $(k=1, 2, \dots)$ *contient une infinité de paires de termes consécutifs qui sont des nombres premiers consécutifs.*

Pour déduire cette proposition de la conséquence C_{13}, il suffit de poser dans C_{13}: $s=2$, $t=a-1$, $F_1(x)=ax+b$, $F_2(x)=ax+a+b$, $G_i(x)=ax+b+i$ pour $i=1, 2, \dots, a-1$.

Dans les progressions arithmétiques $8k+5$, $10k+3$ et $10k+7$ $(k=1, 2, \dots)$ les premières paires de termes consécutifs qui sont des nombres premiers consécutifs sont respectivement: 389 et 397, 283 et 293, 337 et 347.

---

[1]) Les nombres premiers consécutifs sont ici imprimés en gras.