**PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU**
**PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE**

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

**№ 102 (1963)**

# SUR UNE INÉGALITÉ DE HORNICH

*Radomir Lučić*

(Reçu le 13 janvier 1963)

*H. Hornich* a démontré au moyen du calcul differentiel le théorème suivant: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ désignent $n+m$ vecteurs de l'espace $R_k$, liés par

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \qquad (m \geqslant 1), \tag{1}$$

et soit $c$ le vecteur-unité dans $R_k$, on a alors

$$\sum_{i=1}^{n} (|a_i+c|-|a_i|) \leqslant \sum_{j=1}^{m} (|b_j+c|-|b_j|)+n+m-2. \tag{2}$$

Aux cas où $n=0$, $m=1$ ou $n=1$, $m=1$ la relation (2) est triviale. Pour $n=0$, $m=2$ l'inégalité (2) exprime celle entre les côtés d'un triangle.

*E. Hlawka*[1] a donné une démonstration purement algébrique du théorème ci-dessus pour le cas particulier suivant

$$n=2, \qquad m=1. \tag{3}$$

Dans cet article nous donnerons aussi une démonstration purement algébrique du théorème ci-dessus en partant du résultat de *Hlawka*. La demonstration est plus courte que celle de *Hornich.*

Démontrons qu'il s'ensuit du résultat de *Hlawka* que l'inégalité (2) est valable dans le cas particulier suivant

$$n=1, \qquad m=2. \tag{4}$$

En effet, conformément au résultat de *Hlawka* on peut écrire

$$|a_1+c|-|a_1|+|-b_1+c|-|-b_1| \leqslant |b_2+c|- -|b_2|+1,$$

en supposant que $a_1=b_1+b_2$, c'est-à-dire $a_1+(-b_1)=b_2$.

L'inégalité triangulaire mentionnée fournit

$$|b_1|-|b_1-c| \leqslant |b_1+c|-|b_1|.$$

L'addition de deux dernières inégalités donne

$$|a_1+c|-|a_1| \leqslant |b_1+c|-|b_1|+|b_2+c|-|b_2|+1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

---

1) H. Hornich: *Eine Ungleichnung für Vektorlängen,* Matematische Zeitschrift, Bd. 48 (1942), S. 268—274.

Avant de procéder à la démonstration de l'inégalité (2), nous démontrerons les deux lemmes qui suivent.

Lemme 1. — *Si l'inégalité* (2) *est valable pour* $n=r\,(\geqslant 2)$ *et* $m=1$, *elle est aussi valable pour* $n=r+1$ *et* $m=1$.

*Démonstration.* — Il s'ensuit de la supposition du lemme que

$$\sum_{i=1}^{r}(|a_i+c|-|a_i|)\leqslant\left|\sum_{i=1}^{r}a_i+c\right|-\left|\sum_{i=1}^{r}a_i\right|+r-1. \tag{5}$$

L'inégalité (2) étant valable dans le cas (3), on aura

$$\left|\sum_{i=1}^{r}a_i+c\right|-\left|\sum_{i=1}^{r}a_i\right|+|a_{r+1}+c|-|a_{r+1}|\leqslant|b_1+c|-|b_1|+1 \qquad \left(b_1=\sum_{i=1}^{r+1}a_i\right). \tag{6}$$

L'addition des inégalités (5) et (6) donne

$$\sum_{i=1}^{r+1}(|a_i+c|-|a_i|)\leqslant|b_1+c|-|b_1|+r,$$

ce qui prouve le lemme 1.

Lemme 2. — *Si l'inégalité* (2) *est valable pour* $n=1$ *et* $m=r\,(\geqslant 2)$, *elle est aussi valable pour* $n=1$ *et* $m=r+1$.

*Démonstration.* — Selon la supposition du lemme, on a

$$\left|\sum_{j=1}^{r}b_j+c\right|-\left|\sum_{j=1}^{r}b_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{r}(|b_j+c|-|b_j|)+r-1. \tag{7}$$

L'inégalité (2) étant valable pour le cas (4), il en résulte

$$|a_1+c|-|a_1|\leqslant\left|\sum_{j=1}^{r}b_j+c\right|-\left|\sum_{j=1}^{r}b_j\right|+|b_{r+1}+c|-|b_{r+1}|+1 \qquad \left(a_1=\sum_{j=1}^{r+1}b_j\right). \tag{8}$$

L'addition de (7) et de (8) conduit à

$$|a_1+c|-|a_1|\leqslant\sum_{j=1}^{r+1}(|b_j+c|-|b_j|)+r,$$

ce qui prouve le lemme 2.

*Démonstration de l'inégalité* (2). — En conséquence des résultats pour les cas (3) et (4) et des lemmes démontrés, l'application du principe de l'induction totale conduit aux inégalités suivantes

$$\sum_{j=1}^{n}(|a_i+c|-|a_i|)\leqslant\left|\sum_{j=1}^{n}a_i+c\right|-\left|\sum_{j=1}^{n}a_i\right|+n-1 \quad (n\geqslant 0),$$

$$\left|\sum_{j=1}^{m}b_j+c\right|-\left|\sum_{j=1}^{m}b_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{m}(|b_j+c|-|b_j|)+m-1 \quad (m\geqslant 1).$$

Si $\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{m}b_j$, par addition des dernières inégalités, on trouve

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i+c|-|a_i|)\leqslant\sum_{j=1}^{m}(|b_j+c|-|b_j|)+n+m-2 \quad (n\geqslant 0, m\geqslant 1),$$

ce qui prouve l'inégalité (2).